Classe : 3ième Année Prépa, ST	**Année universitaire** : 2021-2022
Domaine : Mathématique et informatique	**Date** : 02/01/2022
Module : Analyse 5	**Durée** :2 heures

Corrigé de synthèse S1

Corrigé de l'exercice 1 (....points). *On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

1. *Pour $t > 0$ fixé, on pose :*

$$\hat{u}(\lambda, t) = \mathcal{F}[u(x,.)](\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

i) *Déterminer l'équation différentielle ordinaire satisfaite par $\hat{u}(\lambda, t)$.*
On applique la transformation de fourier sur l'edp(1)

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](\lambda,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathcal{F}[u]\right)(\lambda,t) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\lambda,t)$$
$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\lambda,t) = (i\lambda)^2 \mathcal{F}[u](\lambda,t) = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda,t)$$

d'où la fonction $\hat{u}$ vérifie l'equation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\lambda,t) + \lambda^2 \hat{u}(\lambda,t) = 0$$

en tenant compte des conditions initiales, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x,0)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \\ &= \hat{f}(\lambda). \\ \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right) \\ &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\lambda,t) \Rightarrow 0 = \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right] = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\lambda,0) \end{aligned}$$

(***1pt+1pt***)

d'où $\hat{u}$ vérifie le problème aux valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\lambda,t) + \lambda^2 \hat{u}(\lambda,t) = 0 & t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{f}(\lambda) & \lambda \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\lambda,0) = 0 & \lambda \in \mathbb{R}.(\boldsymbol{1pt}) \end{cases}$$

ii) *Trouver $\hat{u}(\lambda, t)$, puis en déduire la solution du problème*(1)

— *Tout d'abord, on doit résoudre l'equation différentielle* $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\lambda, t) + \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t) = 0$ *qui est de la forme* $v''(t) + \lambda^2 v(t) = 0$, *et dont la solution générale est :*

$$v(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t) \qquad A, B \text{ deux constante}$$

d'où

$$\hat{u}(\lambda, t) = A(\lambda)\cos(\lambda t) + B(\lambda)\sin(\lambda t) \qquad t > 0.$$

Comme $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\lambda, 0) = 0$, *alors*

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\lambda, t) = -A(\lambda)\sin(\lambda t) + B(\lambda)\cos(\lambda t)$$
$$0 = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\lambda, 0) = +B(\lambda)\cos(0) = B(\lambda).$$

d'autre part $\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{f}(\lambda)$

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{u}(\lambda, 0) = A(\lambda)\cos(0) = A(\lambda)$$

par conséquent :

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{f}(\lambda)\cos(\lambda t).(\textbf{\textit{1pt}})$$

— *Pour déterminer la fonction* u, *on applique la transformation de fourier inverse :*

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\lambda)\cos(\lambda t)\right](x,t). \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\cos(\lambda t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\left(\frac{e^{i\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}\right) e^{i\lambda x}\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda(t+x)}\, d\lambda + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda(-t+x)}\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}\right](x+t) + \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}\right](x-t) \\
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right].(\textbf{\textit{2pts}})
\end{aligned}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}\right] (\mathbf{1pt})$$

Corrigé de l'exercice 2. *Soit l'équation aux dérivées partielles d'ordre un suivante :*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z^2}{x}. \tag{2}$$

1. *Déterminer le système caractéristique et les intégrales premières associées l'edp*(2)

Le système caractéristique : le système caractéristique associé à l'edp(2) est :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{\frac{-z^2}{x}}.(\mathbf{1pts})$$

Les intégrales premières : Pour déterminer les intégrales première on doit résoudre le système caractéristique associé

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}\Rightarrow\frac{ydx+xdy}{xy-xy}=\frac{d(xy)}{0}\Rightarrow xy=C_1,\quad C_1\in\mathbb{R}$$

d'où la première intégrale impropre est :

$$u(x,y,z)=xy.(\mathbf{1pts})$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{\frac{-z^2}{x}}\Rightarrow\frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{-z^2}\Rightarrow\frac{-1}{x}+C_2=\frac{1}{z}\qquad C_2\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=C_2.$$

d'où la seconde intégrale première est :

$$v(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}.(\mathbf{1pts})$$

2. *Donner la solution générale de l'edp*(2)*.* Pour $z\neq 0$, La solution générale de l'edp(2) est donnée par :

$$F\left(xy,\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=0\ (\mathbf{2pts})$$

dès que u et v sont fonctionnellement indépendantes :

$$\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v=\begin{pmatrix}y & & \frac{-1}{x^2}\\ x & \times & 0\\ 0 & & \frac{-1}{z^2}\end{pmatrix}\neq\vec{0}\qquad\text{car}$$

$$\begin{vmatrix}x & 0\\ 0 & \frac{-1}{z^2}\end{vmatrix}=\frac{-x}{z^2}\neq 0\qquad\forall(x,y,z)\in\Omega\subset\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/xz\neq 0\}.$$

3. *Déterminer la surface solution de l'edp*(2) *contenant la courbe γ définie par :*

$$(\gamma):y=1,\quad(x^2-1)z=x.$$

La courbe (γ) est représenté par :

$$\vec{\gamma}(x)=(x,1,\frac{x}{x^2-1})$$

et qui n'est pas caractéristique vu que :

$$\vec{\gamma}'(x)=\left(1,0,\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right)\qquad\text{et}$$

$$\vec{\gamma}'\times\vec{V}=\begin{pmatrix}1 & & x\\ 0 & \times & -1\\ \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} & & \frac{-x}{(x^2-1)^2}\end{pmatrix}\neq\vec{0}\qquad\forall(x,y,z)\in\Omega\quad\text{car}$$

$$\begin{vmatrix}1 & x\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Le problème de Cauchy admet une unique solution :

$$F\left(xy,\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=0\qquad\forall(x,y,z)\in(\gamma)$$

$$F\left(x,\frac{1}{x}+\frac{x^2-1}{x}\right)=0\qquad\forall x$$

$$\Rightarrow F(x,x)=0\qquad\forall x$$

d'où, il suffit de prendre

$$F(u,v) = u - v$$

et la solution est donnée par la forme implicite :

$$xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 0.(\mathbf{2pts})$$

Corrigé de l'exercice 3. ***a)*** *On a $A = 1, B = 3$ et $C = 2$. Alors*

$$B^2 - 4AC = (3)^2 - 4.2 = 1.$$

*Alors $B^2 - 4AC > 0$. Donc l'équation est hyperbolique sur $\mathbb{R}^2$.(**1pts**)*
b) *Les courbes caractéristiques sont solutions de l'équation différentielle ordinaire*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (3)\frac{dy}{dx} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Les équations caractéristiques sont alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{3-1}{2} = 1 \ et \ \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Les solutions de ces équations différentielles ordinaires sont respectivement $y = x + c_1$ et $y = 2x + c_2$. On peut donc considérer les coordonnées caractéristiques

$$\xi(x,y) = y - x \quad et \quad \eta(x,y) = y - 2x.(\boldsymbol{2pts})$$

On vérifie aisément que le jacobien

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

c) *On peut maintenant effectuer le changement de variables $\xi = y - x$ et $\eta = y - 2x$.*
Par la régle de chaénes (dérivée de fonctions composées), on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2\frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'EDP, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (1+a)\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \\
+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0$. *La forme canonique de cette EDP est donc*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0.(\boldsymbol{2pts})$$

d) *En intégrant par rapport à* ξ *puis par rapport à* η, *on trouve*

$$u(\xi,\eta) = g(\xi) + h(\eta),$$

où g *et* h *sont deux fonctions arbitraires. Alors*

$$u(x,y) = g(y-x) + h(y-2x).(\boldsymbol{2pts})$$