

Manuel des solutions aux exercices d'
Analyse Complexe

Par

LAADJ Toufik

Avril 2022

Table des matières

Table des matières	i
1 Fonctions Complexes	1
1.1 Exercices	1
1.2 Solutions	4
2 Holomorphie - Harmonicité	25
2.1 Exercices	25
2.2 Solutions	29
3 Intégration et formule de Cauchy	56
3.1 Exercices	56
3.2 Solutions	59
4 Résidus et applications	76
4.1 Exercices	76
4.2 Solutions	78

Chapitre 1

Fonctions Complexes

1.1 Exercices

Exercice 1.1

Déterminer les parties réelles et imaginaires des fonctions complexes suivantes :

$$\text{a) } f(z) = 2z^2 - 3iz, \quad \text{b) } f(z) = z + \frac{1}{z}, \quad \text{c) } f(z) = \frac{1-z}{1+z}, \quad \text{d) } f(z) = \bar{z} - iz^2, \\ \text{e) } f(z) = \frac{\bar{z}}{z}, \quad \text{f) } f(z) = z^{\frac{1}{2}}, \quad \text{g) } f(z) = z^2 e^{2z}.$$

Exercice 1.2

Trouver les images des axes réel et imaginaire par les transformations :

$$\text{a) } w = \frac{z+1}{z-1}, \quad \text{b) } w = 1 + \frac{1}{z}.$$

Exercice 1.3

Soit S un carré du plan de la variable z de sommets $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ et $D = (0,1)$. Déterminer le domaine du plan de la variable w transformé de S par

$$\text{a) } w = z^2, \quad \text{b) } w = 1 + \frac{1}{z}.$$

Exercice 1.4

Mettre e^z sous la forme $u + iv$ et calculer $|e^z|$ dans chacun des cas

$$\text{a) } z = 3 + 4i, \quad \text{b) } z = 2i\pi(1 + i), \quad \text{c) } z = 2 + 3\pi i, \quad \text{d) } z = \frac{11\pi}{2}i.$$

Exercice 1.5

Déterminer la partie réelle et imaginaire des quantités suivantes :

$$\text{a) } f(z) = e^{-\pi z}, \text{ b) } f(z) = e^{z^2}, \text{ c) } f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \text{ d) } f(z) = e^{z^3}.$$

Exercice 1.6

Établir que

$$\text{a) } \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \text{ b) } \overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \text{ c) } |e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}, \text{ d) } |e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

Exercice 1.7

Déterminer toutes les valeurs de z telles que

$$\text{a) } e^z \text{ est un réel} \quad \text{b) } |e^{-z}| < 1.$$

Exercice 1.8

Résoudre dans le plan complexe les équations

$$\text{a) } e^z = 1, \text{ b) } e^z = 4 + 3i, \text{ c) } e^z = 0, \text{ d) } e^z = -2.$$

Exercice 1.9

Mettre sous la forme $u + iv$ les nombres suivants

$$\text{a) } \sin(2\pi i), \text{ b) } \operatorname{Sh}(3 + 4i), \text{ c) } \operatorname{Ch}(3 + 4i), \text{ d) } \sin(\pi i), \text{ e) } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi i\right).$$

Exercice 1.10

Montrer que

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{Ch} z &= \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y, & \text{b) } \operatorname{Sh} z &= \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y, \\ \text{c) } \operatorname{Ch}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Sh} z_2, & \text{d) } \operatorname{Sh}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Sh} z_2, \\ \text{e) } \operatorname{Ch}^2 z - \operatorname{Sh}^2 z &= 1, & \text{f) } \operatorname{Ch}^2 z + \operatorname{Sh}^2 z &= \operatorname{Ch}(2z). \end{aligned}$$

Exercice 1.11

Montrer que pour tout $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos z &= \cos z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi \text{ ou } z = -z_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \text{b) } \sin z &= \sin z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - z_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \text{c) } \cos z &= 0 \iff z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi], \\ \text{d) } \sin z &= 0 \iff z \equiv 0 [\pi]. \end{aligned}$$

Exercice 1.12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } \sin z = 100, \text{ b) } \operatorname{Ch} z = 0, \text{ c) } \operatorname{Sh} z = 0, \text{ d) } \operatorname{Ch} z = -1.$$

Exercice 1.13

Montrer que toutes les racines des équations $\sin z = a$ et $\cos z = a$ où $-1 \leq a \leq 1$, sont réelles.

Exercice 1.14

Montrer que pour tout $z = x + iy$

$$\text{a) } |\operatorname{Sh} y| \leq |\cos z| \leq |\operatorname{Ch} y|, \quad \text{b) } |\operatorname{Sh} y| \leq |\sin z| \leq |\operatorname{Ch} y|.$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 1.15

Déterminer tout les points z de $\mathbb{C}$ qui vérifie $|\cos z| \leq 1$.

Exercice 1.16

Déterminer les valeurs de $\operatorname{Log} z$ dans chacun des cas, où Log désigne la détermination principale du logarithme :

$$\text{a) } z = -11, \text{ b) } z = 4 + 4i, \text{ c) } z = 4 - 4i, \text{ d) } z = 1 \pm i, \text{ e) } z = ei.$$

Exercice 1.17

Déterminer toutes les valeurs de $\operatorname{Log} z$ dans les cas suivants :

$$\text{a) } z = e, \text{ b) } z = 1, \text{ c) } z = -7, \text{ d) } z = e^i, \text{ e) } z = 4 + 3i.$$

Puis montrer que l'ensemble des valeurs de $\operatorname{Log}(i^2)$ est différent de l'ensemble des valeurs de $2 \operatorname{Log}(i)$.

Exercice 1.18

Résoudre les équations suivantes :

$$\text{a) } \operatorname{Log} z = -i\frac{\pi}{2}, \text{ b) } \operatorname{Log} z = 4 - 3i, \text{ c) } \operatorname{Log} z = e - \pi i.$$

Exercice 1.19

Trouver la valeur principale de

$$\text{a) } (1 + i)^{1-i}, \text{ b) } (1 - i)^{1+i}, \text{ c) } i^{\frac{i}{2}}, \text{ d) } (-1)^{2-i}, \text{ e) } (3 + 4i)^{\frac{1}{3}}.$$

1.2 Solutions

Exercice 1.1

Déterminer les parties réelles et imaginaires des fonctions complexes suivantes :

a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$, **b)** $f(z) = z + \frac{1}{z}$, **c)** $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$, **d)** $f(z) = \bar{z} - iz^2$,
e) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, **f)** $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, **g)** $f(z) = z^2 e^{2z}$.

Solution.

a) On a $z = x + iy$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= 2(x + iy)^2 - 3i(x + iy) = 2x^2 + 4ixy - 2y^2 - 3ix + 3y \\ &= 2x^2 - 2y^2 + 3y + i(4xy - 3x). \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Re}(f(z)) = 2x^2 - 2y^2 + 3y$ et $\operatorname{Im}(f(z)) = 4xy - 3x$.

b) $f(z) = z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x + iy}$.

Pour écrire un quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique $u + iv$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur.

$$f(z) = x + iy + \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

c) $f(z) = \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-x-iy}{1+x+iy} = \frac{(1-x-iy)(1+x-iy)}{(1+x+iy)(1+x-iy)} = \frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2} + i\frac{-2y}{(1+x)^2+y^2}.$

d) $f(z) = \bar{z} - iz^2 = x - iy - i(x + iy)^2 = x - iy - i(x^2 - y^2 + 2ixy) = x + 2xy + i(y^2 - x^2 - y).$

e) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} = \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{-2xy}{x^2+y^2}.$

f) En écrivant z sous forme polaire $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}} = (re^{i(\theta+2k\pi)})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)} = \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right).$$

g) $f(z) = z^2 e^{2z} = (x + iy)^2 e^{2(x+iy)} = (x^2 - y^2 + 2ixy) e^{2x} (\cos(2y) + i \sin(2y))$
 $= ((x^2 - y^2) \cos(2y) - 2xy \sin(2y)) e^{2x} + i((x^2 - y^2) \sin(2y) + 2xy \cos(2y)) e^{2x}.$

Exercice 1.2

Trouver les images des axes réel et imaginaire par les transformations :

$$\text{a) } w = \frac{z+1}{z-1}, \quad \text{b) } w = 1 + \frac{1}{z}.$$

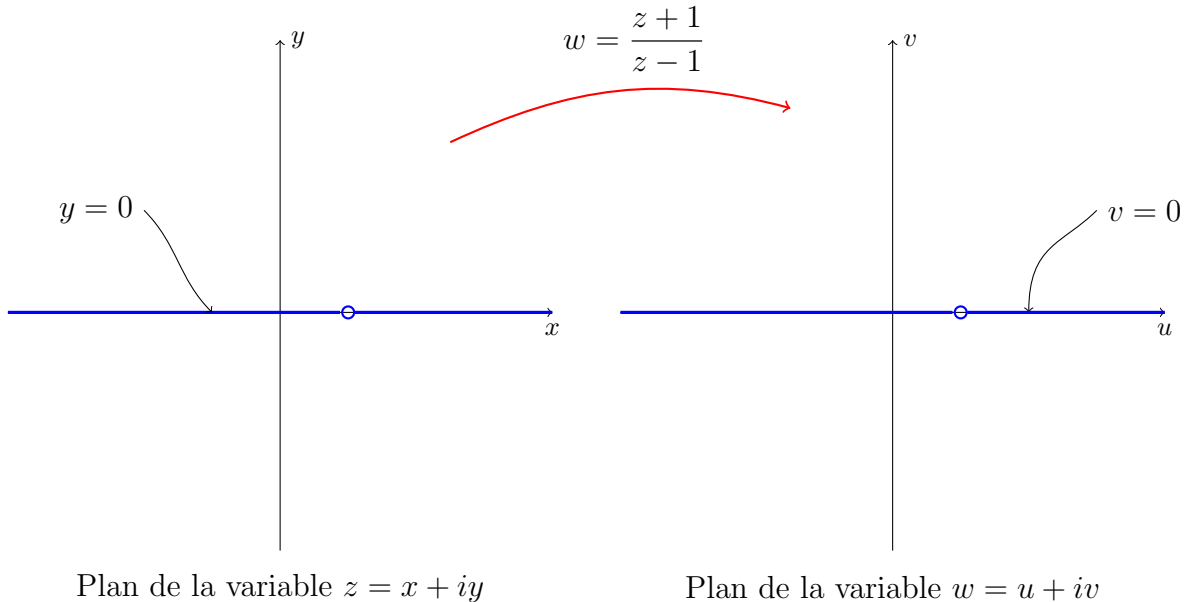
Solution.

a)

- L'équation paramétrique de l'axe des réels est $y = 0$ ou $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, alors

$$w = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

En tenant compte de $w = u + iv$, les équations paramétriques de la courbe image sont $u = \frac{x+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $v = 0$. Lorsque x varie en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ on obtient dans le plan de la variable w , l'axe des réels $v = 0$ à l'exception du point $(1, 0)$ car pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ il existe $x = \frac{u+1}{u-1}$ solution de $u = \frac{x+1}{x-1}$.

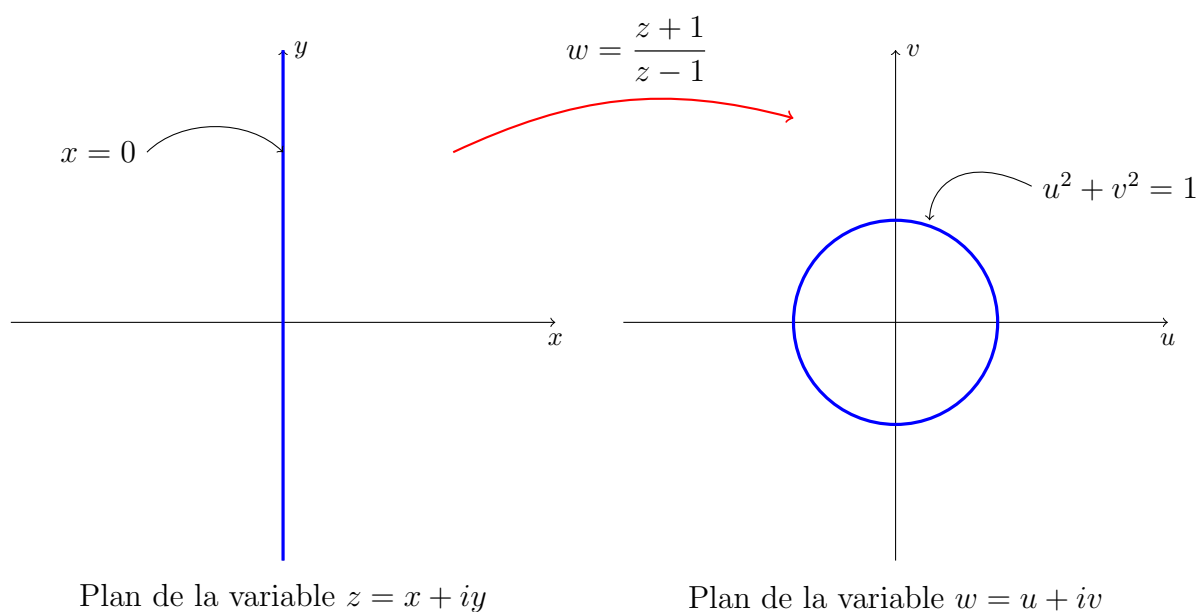


- L'équation paramétrique de l'axe des imaginaires est $x = 0$ ou $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, alors

$$w = \frac{z+1}{z-1} = \frac{iy+1}{iy-1} = \frac{y^2-1}{y^2+1} + i \frac{(-2y)}{y^2+1}, y \in \mathbb{R}.$$

Les équations paramétriques de la courbe image sont $u = \frac{t^2-1}{t^2+1}, v = \frac{-2t}{t^2+1}, t \in \mathbb{R}$. En éliminant t entre ces deux équations, on trouve $u^2 + v^2 = 1$, qui est une équation d'un

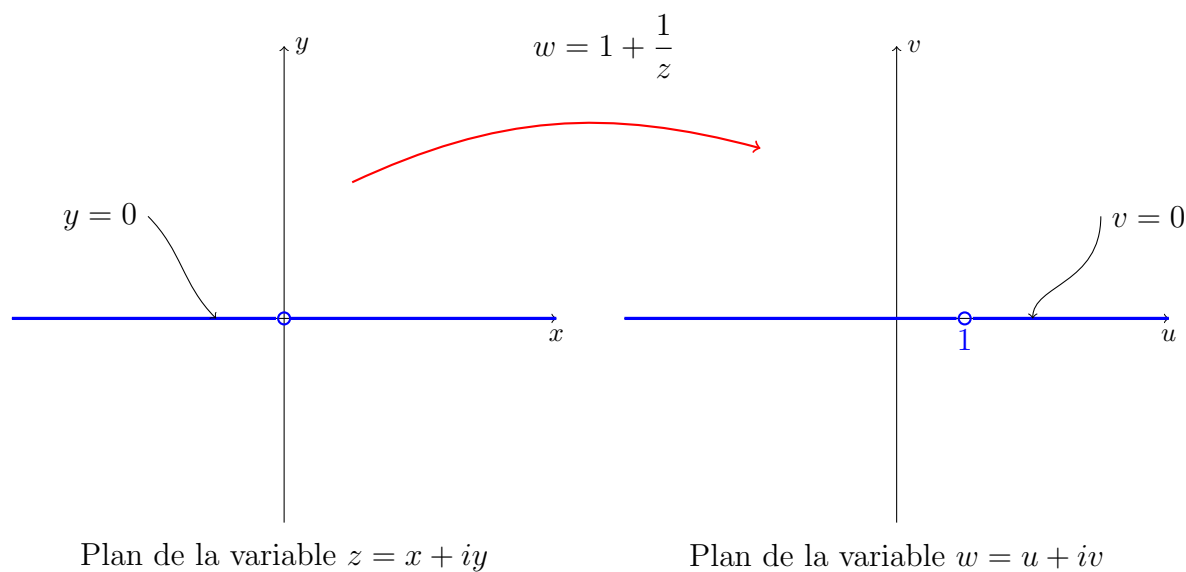
cercle de centre origine et de rayon 1.



b)

- Les points $z = x + iy$ dans l'axe des réels correspondent à $y = 0$ ou $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, alors

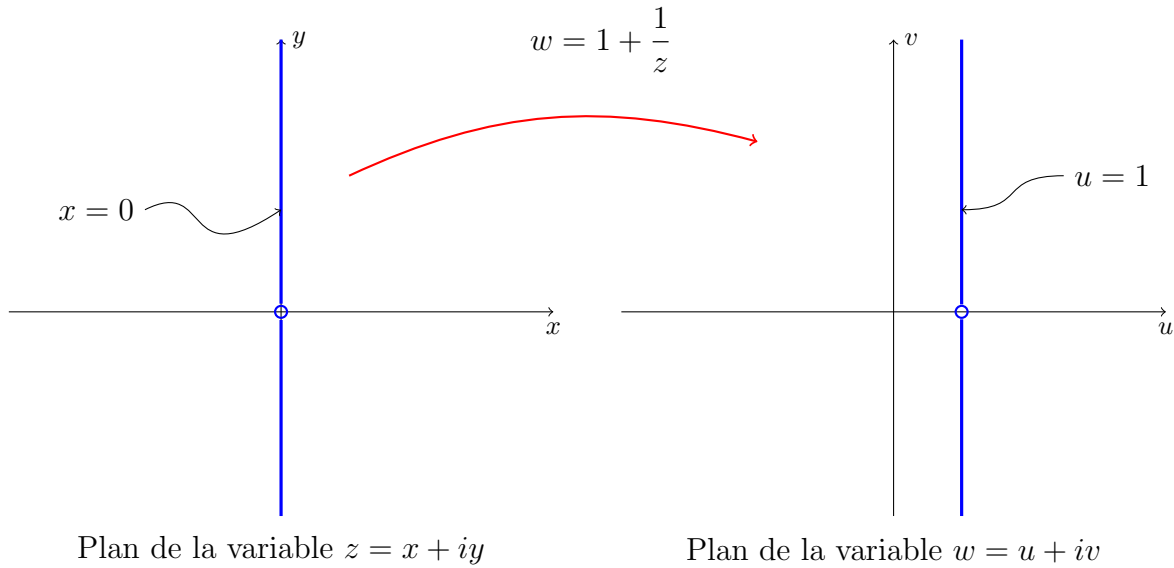
$w = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$. Lorsque x varie en $\mathbb{R}^*$ on obtient dans le plan de la variable w , l'ensemble $\{u, u \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\}$ car l'équation $1 + \frac{1}{x} = u$ admet une solution $x = \frac{1}{u-1}$ lorsque $u \neq 1$.



- L'axe des imaginaires correspond à $x = 0$ ou $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, alors

$$w = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{iy} = 1 - i\frac{1}{y}, y \in \mathbb{R}^*.$$

Lorsque y varie en $\mathbb{R}^*$ on obtient dans le plan de la variable w , la droite $u = 1$ exempté le point $(1, 0)$ car pour tout $v \in \mathbb{R}$ l'équation $-\frac{1}{y} = v$ admet une solution $y = \frac{-1}{v}$ si $v \neq 0$.



Exercice 1.3

Soit S un carré du plan de la variable z de sommets $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ et $D = (0, 1)$. Déterminer le domaine du plan de la variable w transformé de S par

$$\text{a) } w = z^2, \text{ b) } w = 1 + \frac{1}{z}.$$

Solution.

Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = (1-t)z_0 + tz_1, t \in [0, 1]\}.$$

Les équations paramétriques des segments de droites $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ sont, respectivement, $z = t$, $z = 1 + it$, $z = 1 - t + i$ et $z = (1-t)i$ avec $t \in [0, 1]$.

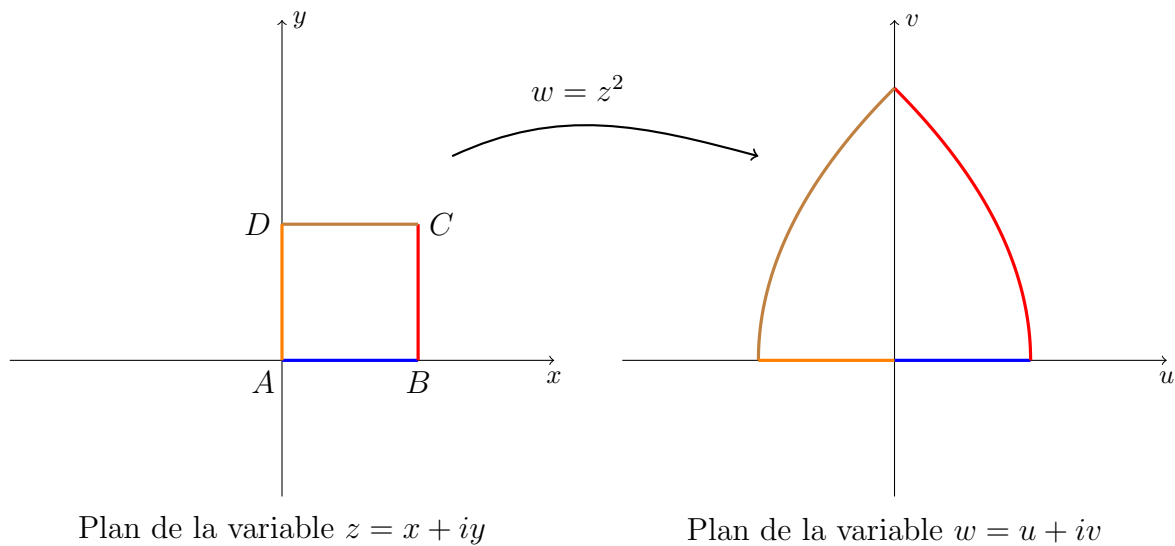
a) Les courbes transformées par $w = z^2$ de ces segments de droites ont pour équations, respectivement, $w = t^2$, $w = 1 - t^2 + 2it$, $w = t^2 - 2t + (2-2t)i$ et $w = -(1-t)^2$ avec $t \in [0, 1]$.

En tenant compte de $w = u + iv$, les équations paramétriques des courbes images sont, respectivement,

$$\{u = t^2, v = 0\}, \{u = 1 - t^2, v = 2t\}, \{u = t^2 - 2t, v = 2 - 2t\} \text{ et } \{u = -(1-t)^2, v = 0\}$$

avec $t \in [0, 1]$. En éliminant t entre u et v , on trouve, respectivement, les courbes

$$\{(u, 0), u \in [0, 1]\}, \{u = 1 - \frac{1}{4}v^2, v \in [0, 2]\}, \{u = \frac{1}{4}v^2 - 1, v \in [0, 2]\} \text{ et } \{(u, 0), u \in [-1, 0]\}.$$



b) Les courbes transformées par $w = 1 + \frac{1}{z}$ des segments de droites $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ ont pour équations, respectivement,

$$w = 1 + \frac{1}{t}, w = \frac{t^2 + 2}{t^2 + 1} - i \frac{t}{t^2 + 1}, w = \frac{(1-t)^2 + (1-t) + 1}{(1-t)^2 + 1} - i \frac{1}{(1-t)^2 + 1} \text{ et } w = 1 - i \frac{1}{(1-t)}$$

avec $t \in [0, 1]$. En tenant compte de $w = u + iv$, les équations paramétriques des courbes images sont, respectivement,

$$\left\{u = 1 + \frac{1}{t}, v = 0\right\}, \left\{u = \frac{t^2 + 2}{t^2 + 1}, v = \frac{-t}{t^2 + 1}\right\}, \left\{u = \frac{(1-t)^2 + (1-t) + 1}{(1-t)^2 + 1}, v = \frac{-1}{(1-t)^2 + 1}\right\}$$

et $\left\{u = 1, v = \frac{-1}{1-t}\right\}$ avec $t \in [0, 1]$.

- La courbe $\left\{u = 1 + \frac{1}{t}, v = 0\right\}, t \in [0, 1]$ représente la demi droite $\{u \geq 2, v = 0\}$.
- En éliminant t entre u et v dans $\left\{u = \frac{t^2 + 2}{t^2 + 1}, v = \frac{-t}{t^2 + 1}\right\}$ on trouve

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4} \text{ avec } u \in \left[\frac{3}{2}, 2\right],$$

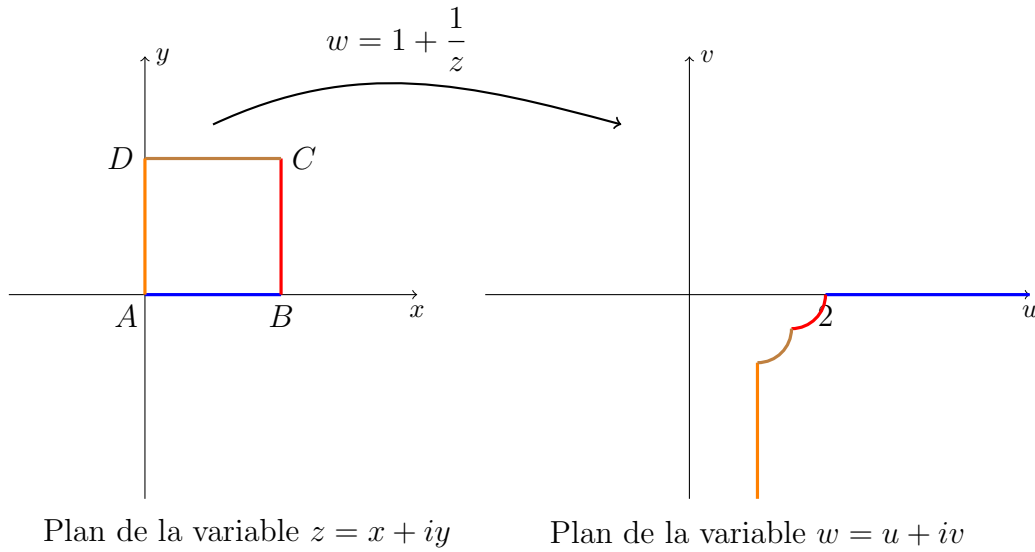
qui est un arc d'un cercle.

- En éliminant t entre u et v dans $\left\{u = \frac{(1-t)^2 + (1-t) + 1}{(1-t)^2 + 1}, v = \frac{-1}{(1-t)^2 + 1}\right\}$ on trouve

$$(u - 1)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ avec } u \in \left[1, \frac{3}{2}\right],$$

qui est aussi un arc d'un cercle.

- La courbe $\{u = 1, v = \frac{-1}{1-t}\}$, $t \in [0, 1]$ représente la demi droite $\{u = 1, v \in]-\infty, -1]\}$.



Exercice 1.4

Mettre e^z sous la forme $u + iv$ et calculer $|e^z|$ dans chacun des cas

a) $z = 3 + 4i$, b) $z = 2i\pi(1 + i)$, c) $z = 2 + 3\pi i$, d) $z = \frac{11\pi}{2}i$.

Solution.

Par définition $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ où $z = x + iy$. Donc $|e^z| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = e^x$.

a) $e^{3+4i} = e^3 (\cos 4 + i \sin 4) = e^3 \cos 4 + ie^3 \sin 4$ et $|e^{3+4i}| = e^3$.

b) $e^{2i\pi(1+i)} = e^{-2\pi+2i\pi} = e^{-2\pi} (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = e^{-2\pi}$ et $|e^{2i\pi(1+i)}| = e^{-2\pi}$.

c) $e^{2+3\pi i} = e^2 (\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)) = -e^2$ et $|e^{2+3\pi i}| = e^2$.

d) $e^{\frac{11\pi}{2}i} = e^0 (\cos(\frac{11\pi}{2}) + i \sin(\frac{11\pi}{2})) = -i$ et $|e^{\frac{11\pi}{2}i}| = 1$.

Exercice 1.5

Déterminer la partie réelle et imaginaire des quantités suivantes :

a) $f(z) = e^{-\pi z}$, b) $f(z) = e^{z^2}$, c) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, d) $f(z) = e^{z^3}$.

Solution.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= e^{-\pi z} = e^{-\pi(x+iy)} = e^{-\pi x} e^{-i\pi y} = e^{-\pi x} (\cos(\pi y) - i \sin(\pi y)) \\ &= e^{-\pi x} \cos(\pi y) - i e^{-\pi x} \sin(\pi y), \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(z) = e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+i2xy} = e^{x^2-y^2} \cos(2xy) + i e^{x^2-y^2} \sin(2xy),$$

$$\text{c) } f(z) = e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+iy}} = e^{\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + i e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

$$\text{d) } \text{On a } z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3). \text{ Alors}$$

$$f(z) = e^{z^3} = e^{x^3-3xy^2} \cos(3x^2y - y^3) + i e^{x^3-3xy^2} \sin(3x^2y - y^3).$$

Exercice 1.6

Établir que

$$\text{a) } \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \text{ b) } \overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \text{ c) } |e^{iz}| = e^{-\text{Im } z}, \text{ d) } |e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}.$$

Solution.

a) Par définition $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ où $z = x + iy$. Donc si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)}{e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)} = e^{x_1-x_2} \frac{(\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 - i \sin y_2)}{(\cos y_2 + i \sin y_2) (\cos y_2 - i \sin y_2)} \\ &= e^{x_1-x_2} \frac{\cos y_1 \cos y_2 + \sin y_1 \sin y_2 + i (\cos y_2 \sin y_1 - \cos y_1 \sin y_2)}{\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2} \end{aligned}$$

Comme $\cos y_1 \cos y_2 + \sin y_1 \sin y_2 = \cos(y_1 - y_2)$, $\cos y_2 \sin y_1 - \cos y_1 \sin y_2 = \sin(y_1 - y_2)$ et $\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2 = 1$, alors

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{x_1-x_2} (\cos(y_1 - y_2) + i \sin(y_1 - y_2)) = e^{x_1-x_2+i(y_1-y_2)} \\ &= e^{x_1+iy_1-(x_2+iy_2)} \\ &= e^{z_1-z_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \overline{e^z} &= \overline{e^x (\cos y + i \sin y)} = e^x (\cos y - i \sin y) = e^x (\cos(-y) + i \sin(-y)) \\ &= e^{x+i(-y)} = e^{\bar{z}}. \end{aligned}$$

c) $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y+ix}| = |e^{-y}(\cos x + i \sin x)| = e^{-y}(\cos^2 x + \sin^2 x) = e^{-y} = e^{-\operatorname{Im} z}.$

d) Nous verrons plus tard que la fonction exponentielle complexe e^z est définie en étendant la série de Taylor de e^x à partir de valeurs réelles de x à des valeurs complexes :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Alors

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

En prenant la valeur absolue (module) de cette identité et en appliquant l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, nous obtenons

$$|e^z - 1| \leq |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \dots = e^{|z|} - 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^{|z|} - 1 &= |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + \dots \\ &\leq |z| + \frac{|z|^2}{1!} + \frac{|z|^3}{2!} + \frac{|z|^4}{3!} + \dots \\ &= |z| \left(1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \dots \right) \\ &= |z| e^{|z|}. \end{aligned}$$

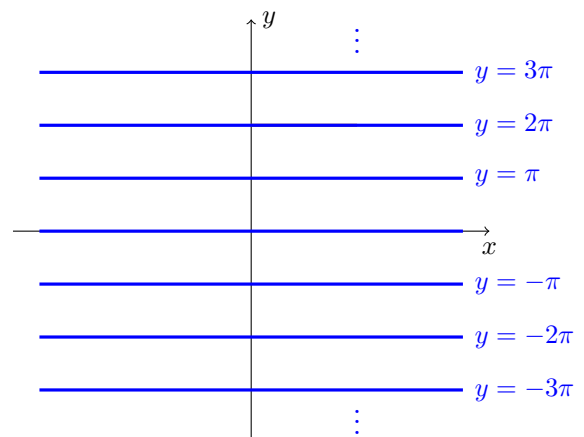
Exercice 1.7

Déterminer toutes les valeurs de z telles que

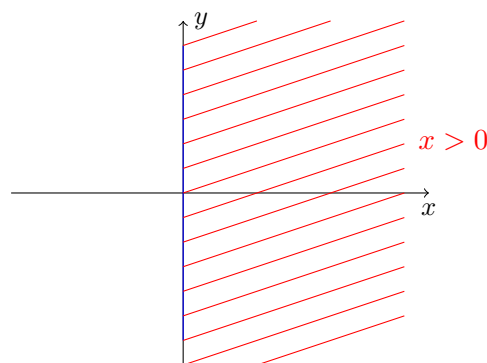
a) e^z est un réel b) $|e^{-z}| < 1.$

Solution.

a) Par définition $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$ où $z = x + iy$. Donc la partie imaginaire de e^z s'annule si $e^x \sin y = 0$, ce qui est équivalent à $\sin y = 0$ car $e^x > 0$. D'où $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors e^z est un réel si et seulement si $z = x + ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, qui sont des droites $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, parallèles à l'axe des x .



b) On a $e^{-z} = e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y$. Donc $|e^{-z}| = e^{-x}$. Alors $|e^{-z}| < 1$ est équivalent à $e^{-x} < 1$ ou bien $x > 0$. D'où les valeurs de z vérifiant $|e^{-z}| < 1$ sont situés dans le demi-plan à droite de l'axe des y : $\{z = x + iy \mid x > 0\}$. Dans la figure ci-contre, c'est la partie hachurée.



Exercice 1.8

Résoudre dans le plan complexe les équations

a) $e^z = 1$, b) $e^z = 4 + 3i$, c) $e^z = 0$, d) $e^z = -2$.

Solution.

a) Si $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = 1$, alors on a les deux équations $e^x \cos y = 1$ et $e^x \sin y = 0$. Puisque $e^x > 0$, on aura $\sin y = 0$ ce qui implique que $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^x \cos(k\pi) = 1 \text{ ou bien } e^x = \frac{1}{\cos(k\pi)} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k.$$

Ceci est possible seulement si k est un nombre pair. Dans ce cas $x = 0$. Alors les racines de l'équation $e^z = 1$ sont $z_k = i(2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Autre méthode. Si $w = e^z$ on a $z = \text{Log } w$. On obtient alors $z = \text{Log } w$, et donc

$$z = \ln |1| + i \arg(1) = 0 + i(0 + 2k\pi) = i(2k)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) L'équation $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = 4 + 3i$ est équivalente à $e^x \cos y = 4$ et $e^x \sin y = 3$. En prenant le carré des deux dernières équations et en les additionnant, on obtient $e^{2x} = 4^2 + 3^2 = 25$ ou bien $e^x = 5$, ce qui donne $x = \ln 5$. Encore une fois en réarrangeant ces équations, on obtient $\text{tg } y = \frac{3}{4}$, ce qui donne $y = \text{Arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D'où les solutions sont $z = \ln 5 + i\left(\text{Arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Autre méthode. $e^z = 4 + 3i$ implique

$$z = \text{Log}(4 + 3i) = \ln |4 + 3i| + i \arg(4 + 3i) = \ln 5 + i\left(\text{Arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

c) L'équation $e^z = 0$ n'admet pas de solutions car $e^x \cos y = 0$ et $e^x \sin y = 0$, ce qui implique que $\cos y = \sin y = 0$ et ceci n'est pas possible.

d) L'équation $e^z = -2$ implique $z = \operatorname{Log}(-2) = \ln|-2| + i \arg(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1.9

Mettre sous la forme $u + iv$ les nombres suivants

a) $\sin(2\pi i)$, **b)** $\operatorname{Sh}(3 + 4i)$, **c)** $\operatorname{Ch}(3 + 4i)$, **d)** $\sin(\pi i)$, **e)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi i\right)$.

Solution.

a) Par définition $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Alors $\sin(2\pi i) = \frac{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}{2i} = i \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2} = i \operatorname{Sh}(2\pi)$.

b) On a $\operatorname{Sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh}(3 + 4i) &= \frac{e^{3+4i} - e^{-3-4i}}{2} = \frac{e^3 \cos 4 + ie^3 \sin 4 - e^{-3} \cos 4 + ie^{-3} \sin 4}{2} \\ &= \operatorname{Sh} 3 \cos 4 + i \operatorname{Ch} 3 \sin 4. \end{aligned}$$

c) On a $\operatorname{Ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Ch}(3 + 4i) &= \frac{e^{3+4i} + e^{-3-4i}}{2} = \frac{e^3 \cos 4 + ie^3 \sin 4 + e^{-3} \cos 4 - ie^{-3} \sin 4}{2} \\ &= \operatorname{Ch} 3 \cos 4 + i \operatorname{Sh} 3 \sin 4. \end{aligned}$$

d) $\sin(\pi i) = \frac{e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}}{2i} = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i} = i \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = i \operatorname{Sh}(\pi)$.

e) Par définition $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi i\right) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2} + \pi} + e^{-i\frac{\pi}{2} - \pi}}{2} = \frac{e^{\pi} \cos \frac{\pi}{2} + ie^{\pi} \sin \frac{\pi}{2} + e^{-\pi} \cos \frac{\pi}{2} - ie^{-\pi} \sin \frac{\pi}{2}}{2} \\ &= \frac{ie^{\pi} - ie^{-\pi}}{2} = i \operatorname{Sh} \pi. \end{aligned}$$

Exercice 1.10

Montrer que

a) $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y,$

b) $\operatorname{Sh} z = \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y,$

c) $\operatorname{Ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Sh} z_2,$

d) $\operatorname{Sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Sh} z_2,$

e) $\operatorname{Ch}^2 z - \operatorname{Sh}^2 z = 1,$

f) $\operatorname{Ch}^2 z + \operatorname{Sh}^2 z = \operatorname{Ch}(2z).$

Solution.

a) On a $\operatorname{Ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Ch} z &= \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x \cos y + ie^x \sin y + e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y}{2} \\ &= \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y. \end{aligned}$$

b) On a $\operatorname{Sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh} z &= \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x \cos y + ie^x \sin y - e^{-x} \cos y + ie^{-x} \sin y}{2} \\ &= \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y. \end{aligned}$$

c) On a $\operatorname{Ch}(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{2}$. Comme $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Ch}(z_1 + z_2) &= \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}}{2} = \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} \\ &= \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} \\ &= \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} \right) + \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \right) \\ &= \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Sh} z_2. \end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Sh}(z_1 + z_2) &= \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2}}{2} = \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} \\ &= \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} \\ &= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} \right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Sh} z_2.$$

e) Si on prend $z_1 = -z_2 = z$ dans l'identité c) on trouve $\operatorname{Ch} 0 = \operatorname{Ch} z \operatorname{Ch} (-z) + \operatorname{Sh} z \operatorname{Sh} (-z)$.

Comme $\operatorname{Ch} 0 = 1$, $\operatorname{Ch} (-z) = \operatorname{Ch} z$ et $\operatorname{Sh} (-z) = -\operatorname{Sh} z$ alors on obtient $\operatorname{Ch}^2 z - \operatorname{Sh}^2 z = 1$.

f) Si on prend $z_1 = z_2 = z$ dans l'identité c) on trouve $\operatorname{Ch} (2z) = \operatorname{Ch}^2 z + \operatorname{Sh}^2 z$.

Exercice 1.11

Montrer que pour tout $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

a) $\cos z = \cos z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi \text{ ou } z = -z_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$

b) $\sin z = \sin z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - z_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$

c) $\cos z = 0 \iff z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi],$

d) $\sin z = 0 \iff z \equiv 0 [\pi].$

Solution.

a) On a $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \cos z = \cos z_0 &\iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz_0} + e^{-iz_0}}{2} \\ &\iff e^{iz} - e^{iz_0} - e^{-iz_0} + e^{-iz} = 0 \\ &\iff e^{-iz} (e^{2iz} - e^{iz+iz_0} - e^{iz-iz_0} + 1) = 0 \quad (\text{en factorisant } e^{-iz}) \\ &\iff e^{-iz} (e^{iz-iz_0} e^{iz+iz_0} - e^{iz+iz_0} - e^{iz-iz_0} + 1) = 0 \quad \text{car } e^{2iz} = e^{iz-iz_0} e^{iz+iz_0} \\ &\iff e^{-iz} (e^{iz-iz_0} - 1) (e^{iz+iz_0} - 1) = 0 \end{aligned}$$

Puisque e^{-iz} ne s'annule pas alors soit $e^{iz-iz_0} = 1$ soit $e^{iz+iz_0} = 1$, ce qui donne

$$iz - iz_0 = \operatorname{Log} 1 = \ln |1| + i \arg(1) = i(2k\pi) \text{ ou } iz + iz_0 = i(2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'où $z = z_0 + 2k\pi$ ou $z = -z_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

b) On a $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Alors de même

$$\begin{aligned}
 \sin z = \sin z_0 &\iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz_0} - e^{-iz_0}}{2i} \\
 &\iff e^{iz} - e^{iz_0} + e^{-iz_0} - e^{-iz} = 0 \\
 &\iff e^{-iz} (e^{2iz} - e^{iz+iz_0} + e^{iz-iz_0} - 1) = 0 \quad (\text{en factorisant } e^{-iz}) \\
 &\iff e^{-iz} (e^{iz-iz_0} e^{iz+iz_0} - e^{iz+iz_0} + e^{iz-iz_0} - 1) = 0 \quad \text{car } e^{2iz} = e^{iz-iz_0} e^{iz+iz_0} \\
 &\iff e^{-iz} (e^{iz-iz_0} - 1) (e^{iz+iz_0} + 1) = 0
 \end{aligned}$$

Puisque e^{-iz} ne s'annule pas alors soit $e^{iz-iz_0} = 1$ soit $e^{iz+iz_0} = -1$, ce qui donne

$$iz - iz_0 = i(2k\pi) \text{ ou } iz + iz_0 = \text{Log } 1 = \ln |-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'où

$$z = z_0 + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - z_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Si on prend $z_0 = \frac{\pi}{2}$ dans l'identité a) on trouve

$$\begin{aligned}
 \cos z = 0 &\iff z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].
 \end{aligned}$$

d) Si on prend $z_0 = 0$ dans l'identité b) on trouve

$$\begin{aligned}
 \sin z = 0 &\iff z = 0 + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff z \equiv 0 [\pi].
 \end{aligned}$$

Exercice 1.12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\sin z = 100$, b) $\text{Ch } z = 0$, c) $\text{Sh } z = 0$, d) $\text{Ch } z = -1$.

Solution.

a) Tout d'abord, nous séparons les parties réelles et imaginaires de la fonction $\sin z$. Nous avons

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = \frac{(e^{-y} - e^y) \cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y} + e^y) \sin x}{2i} \\
&= i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x + \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x \\
&= \operatorname{Ch} y \sin x + i \operatorname{Sh} y \cos x.
\end{aligned}$$

Alors $\sin z = 100$ entraîne $\operatorname{Ch} y \sin x = 100$ et $\operatorname{Sh} y \cos x = 0$. Donc d'après la deuxième équation soit $y = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans la première équation on obtient

$$y = 0 \text{ et } \sin x = 100$$

ou

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ch} y = \frac{100}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = \frac{100}{(-1)^k}.$$

Le premier cas n'est pas possible car $|\sin x| \leq 1$. Dans le deuxième cas k soit pair car $\operatorname{Ch} y \geq 1$. D'où les racines cherchées sont

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \operatorname{Argch}(100), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. D'après l'exercice précédent 1.11, si on prend $z_0 = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{Argch}(100)$, on trouve

$$z = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{Argch}(100) + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - \frac{\pi}{2} - i \operatorname{Argch}(100) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) D'après l'exercice 1.10, $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y$. Donc l'équation $\operatorname{Ch} z = 0$ est équivalente à $\operatorname{Ch} x \cos y = 0$ et $\operatorname{Sh} x \sin y = 0$.

Si $\operatorname{Sh} x = 0$, i.e. $x = 0$, on aura

$$\cos y = 0 \implies y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\sin y = 0$ i.e. $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\operatorname{Ch} x \cos(k\pi) = 0$ ce qui n'est pas possible.

Alors, les racines de l'équation $\operatorname{Ch} z = 0$ sont

$$z_k = i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. $\operatorname{Ch} z = 0 \iff \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \iff e^{2z} = -1$. Alors

$$2z = \operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ou bien

$$z_k = i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) D'après l'exercice 1.10, $\operatorname{Sh} z = \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y$. Donc l'équation $\operatorname{Sh} z = 0$ est équivalente à $\operatorname{Sh} x \cos y = 0$ et $\operatorname{Ch} x \sin y = 0$.

Si $\operatorname{Sh} x = 0$, i.e. $x = 0$, on aura

$$\sin y = 0 \implies y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\cos y = 0$ i.e. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\operatorname{Ch} x \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ ce qui n'est pas possible.

Alors, les racines de l'équation $\operatorname{Sh} z = 0$ sont

$$z_k = ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. $\operatorname{Sh} z = 0 \iff \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \iff e^{2z} = 1$. Alors

$$2z = \operatorname{Log} 1 = \ln |1| + i \arg(1) = i(2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ou bien

$$z_k = ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) On a $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y$. Donc l'équation $\operatorname{Ch} z = -1$ est équivalente à $\operatorname{Ch} x \cos y = -1$ et $\operatorname{Sh} x \sin y = 0$.

Si $\operatorname{Sh} x = 0$, i.e. $x = 0$, on aura

$$\cos y = -1 \implies y = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\sin y = 0$ i.e. $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\operatorname{Ch} x \cos(k\pi) = -1 \implies \operatorname{Ch} x = \frac{-1}{\cos(k\pi)} = \frac{-1}{(-1)^k} = (-1)^{k+1}$$

ce qui donne $x = 0$ dans le cas k impair et aucun x si k pair.

Alors, les racines de l'équation $\operatorname{Ch} z = -1$ sont

$$z_k = i(\pi + 2k\pi) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. $\operatorname{Ch} z = -1 \iff \frac{e^z + e^{-z}}{2} = -1 \iff \frac{e^{-z}}{2}(e^z + 1)^2 = 0$. Alors $e^z = -1$ et donc

$$z = \operatorname{Log}(-1) = \ln |-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 1.13

Montrer que toutes les racines des équations $\sin z = a$ et $\cos z = a$ où $-1 \leq a \leq 1$, sont réelles.

Solution.

L'équation $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = a$ est équivalente à $(e^{iz})^2 - 2iae^{iz} - 1 = 0$, qui est une équation quadratique en e^{iz} . En la résolvant on obtient

$$e^{iz} = \pm\sqrt{1-a^2} + ia.$$

Donc

$$iz = \operatorname{Log} \left(\pm\sqrt{1-a^2} + ia \right) = \ln \left| \pm\sqrt{1-a^2} + ia \right| + i \arg \left(\pm\sqrt{1-a^2} + ia \right).$$

Comme $a \in [-1, 1]$, alors $\ln \left| \pm\sqrt{1-a^2} + ia \right| = \ln 1 = 0$, donc

$$z = \arg \left(\pm\sqrt{1-a^2} + ia \right) \in \mathbb{R}.$$

De même l'équation $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = a$ est équivalente à $(e^{iz})^2 - 2ae^{iz} + 1 = 0$, ce qui donne

$$e^{iz} = a \pm i\sqrt{1-a^2}.$$

Comme précédemment $\ln \left| a \pm i\sqrt{1-a^2} \right| = \ln 1 = 0$ car $a \in [-1, 1]$, donc

$$z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} \left(a \pm i\sqrt{1-a^2} \right) = \arg \left(a \pm i\sqrt{1-a^2} \right) \in \mathbb{R}.$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 1.14

Montrer que pour tout $z = x + iy$

$$\textbf{a)} \quad |\operatorname{Sh} y| \leq |\cos z| \leq |\operatorname{Ch} y|, \quad \textbf{b)} \quad |\operatorname{Sh} y| \leq |\sin z| \leq |\operatorname{Ch} y|.$$

Solution.

Nous pouvons calculer le module d'un nombre complexe w , soit par définition en identifiant ses parties réelles et imaginaires ou par la propriété $|w|^2 = w\bar{w}$.

Nous allons utiliser la propriété $|w|^2 = w\bar{w}$ ici.

a) On a

$$|\cos z|^2 = \cos z \overline{\cos z} = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \left(\frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} \right) = \frac{e^{i(z-\bar{z})} + e^{i(z+\bar{z})} + e^{-i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{4}.$$

Puisque $z - \bar{z} = 2iy$ et $z + \bar{z} = 2x$, on aura

$$|\cos z|^2 = \frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{Ch}(2y) + \cos(2x)).$$

Par les transformations $\operatorname{Ch}(2y) = 2\operatorname{Ch}^2 y - 1$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, on obtient la relation

$$|\cos z|^2 = \frac{1}{2} (2\operatorname{Ch}^2 y - 1 + 1 - 2\sin^2 x) = \operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x.$$

Comme $-1 \leq -\sin^2 x \leq 0$, alors $\operatorname{Sh}^2 y = \operatorname{Ch}^2 y - 1 \leq \operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x \leq \operatorname{Ch}^2 y$. D'où le résultat demandé

$$|\operatorname{Sh} y| \leq |\cos z| \leq |\operatorname{Ch} y|.$$

b) On a

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin z \overline{\sin z} = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \left(\frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} \right) = \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{4} \\ &= \frac{e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{Ch}(2y) - \cos(2x)). \end{aligned}$$

En utilisant les transformations $\operatorname{Ch}(2y) = 2\operatorname{Ch}^2 y - 1$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, on trouve

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{2} (2\operatorname{Ch}^2 y - 1 - (2\cos^2 x - 1)) = \operatorname{Ch}^2 y - \cos^2 x.$$

Comme précédemment $-1 \leq -\cos^2 x \leq 0$ implique que $|\operatorname{Sh} y| \leq |\sin z| \leq |\operatorname{Ch} y|$.

Nous pouvons conclure des inégalités ci-dessus que les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ ne sont pas bornées dans le domaine complexe.

Exercice 1.15

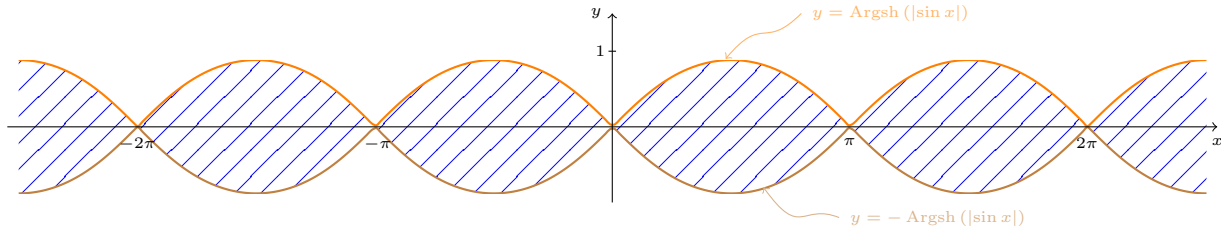
Déterminer tout les points z de $\mathbb{C}$ qui vérifie $|\cos z| \leq 1$.

Solution.

D'après la solution de l'exercice précédent 1.14, on a $|\cos z|^2 = \operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x$. Alors $|\cos z| \leq 1$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x \leq 1 &\iff \operatorname{Sh}^2 y = \operatorname{Ch}^2 y - 1 \leq \sin^2 x \\ &\iff -|\sin x| \leq \operatorname{Sh} y \leq |\sin x| \\ &\iff -\operatorname{Argsh}(|\sin x|) \leq y \leq \operatorname{Argsh}(|\sin x|) \end{aligned}$$

Dans la figure ci-dessous, il s'agit de la partie hachurée.


Exercice 1.16

Déterminer les valeurs de $\text{Log } z$ dans chacun des cas, où Log désigne la détermination principale du logarithme :

- a) $z = -11$, b) $z = 4 + 4i$, c) $z = 4 - 4i$, d) $z = 1 \pm i$, e) $z = ei$.

Solution.

On rappelle que la fonction $z \mapsto \text{Log } z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned} \text{Log } z &= \ln |z| + i \arg z \\ &= \ln |z| + i (\text{Arg } z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ où } -\pi < \text{Arg } z \leq \pi. \end{aligned}$$

La détermination **principale** ou valeur principale de $\text{Log } z$ est souvent définie par

$$\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z, \text{ où } -\pi < \text{Arg } z \leq \pi \text{ ou } 0 \leq \text{Arg } z < 2\pi.$$

a) On a $\text{Log}(-11) = \ln |11| + i \text{Arg}(-11) = \ln 11 + i\pi$.

b) $\text{Log}(4 + 4i) = \ln |4 + 4i| + i \text{Arg}(4 + 4i) = \frac{5}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

c) $\text{Log}(4 - 4i) = \ln |4 - 4i| + i \text{Arg}(4 - 4i) = \frac{5}{2} \ln 2 - i\frac{\pi}{4}$.

d) $\text{Log}(1 - i) = \ln |1 - i| + i \text{Arg}(1 - i) = \ln 2 - i\frac{\pi}{4}$,

$$\text{Log}(1 + i) = \ln |1 + i| + i \text{Arg}(1 + i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{4},$$

e) $\operatorname{Log}(ei) = \ln|ei| + i \operatorname{Arg}(ei) = 1 + i\frac{\pi}{2}.$

Exercice 1.17

Déterminer toutes les valeurs de $\operatorname{Log} z$ dans les cas suivants :

a) $z = e$, b) $z = 1$, c) $z = -7$, d) $z = e^i$, e) $z = 4 + 3i$.

Puis montrer que l'ensemble des valeurs de $\operatorname{Log}(i^2)$ est différent de l'ensemble des valeurs de $2\operatorname{Log}(i)$.

Solution.

a) $\operatorname{Log}(e) = \ln|e| + i \arg(e) = 1 + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) $\operatorname{Log}(1) = \ln|1| + i \arg(1) = 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}.$

c) $\operatorname{Log}(-7) = \ln|-7| + i \arg(-7) = \ln 7 + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

d) $\operatorname{Log}(e^i) = \ln|e^i| + i \arg(e^i) = \ln 1 + i(1 + 2k\pi) = i(1 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

e) $\operatorname{Log}(4 + 3i) = \ln|4 + 3i| + i \arg(4 + 3i) = \ln 5 + i(\operatorname{Arctg}(\frac{3}{4}) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

En ce qui concerne la deuxième partie de l'exercice, on a

$$\operatorname{Log}(i^2) = \operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

et

$$2\operatorname{Log}(i) = 2(\ln|i| + i \arg(i)) = 2i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i(\pi + 4k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Notons que l'ensemble des valeurs de $2\operatorname{Log}(i)$ est strictement inclus dans l'ensemble des valeurs de $\operatorname{Log}(i^2)$.

Exercice 1.18

Résoudre les équations suivantes :

a) $\operatorname{Log} z = -i\frac{\pi}{2}$, b) $\operatorname{Log} z = 4 - 3i$, c) $\operatorname{Log} z = e - \pi i$.

Solution.

On rappelle que la fonction $z \mapsto \operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^z : $\operatorname{Log} z = w \iff z = e^w$. Alors

a) $z = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$.

b) $z = e^{4-3i} = e^4 (\cos(-3) + i \sin(-3)) = e^4 \cos 3 - ie^4 \sin 3$.

c) $z = e^{e-\pi i} = e^e (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -e^e$.

Exercice 1.19

Trouver la valeur principale de

a) $(1+i)^{1-i}$, b) $(1-i)^{1+i}$, c) $i^{\frac{i}{2}}$, d) $(-1)^{2-i}$, e) $(3+4i)^{\frac{1}{3}}$.

Solution.

La fonction $z \mapsto z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, est définie par $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z} = e^{\alpha(\ln|z|+i(\operatorname{Arg} z+2k\pi))}$, $k \in \mathbb{Z}$. La valeur principale est $e^{\alpha(\ln|z|+i \operatorname{Arg} z)}$ obtenue en donnant à k la valeur 0. Alors

$$\begin{aligned} \text{a) } (1+i)^{1-i} &= e^{(1-i) \operatorname{Log}(1+i)} = e^{(1-i) \{\ln|1+i|+i \arg(1+i)\}} \\ &= e^{(1-i) \left\{ \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right\}} = e^{\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} + 2\pi k + i \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} + 2\pi k \right)} \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi k} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} + 2\pi k \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi k} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) \right\}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

La valeur principale est $\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) \right) \simeq 2.8079 + 1.3179i$.

$$\begin{aligned} \text{b) } (1-i)^{1+i} &= e^{(1+i) \operatorname{Log}(1-i)} = e^{(1+i) \{\ln|1-i|+i \arg(1-i)\}} \\ &= e^{(1+i) \left\{ \ln \sqrt{2} + i \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right\}} = e^{\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} - 2\pi k + i \left(-\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} + 2\pi k \right)} \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi k} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} + 2\pi k \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} + 2\pi k \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi k} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) \right\}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

La valeur principale est $\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) \right) \simeq 2.8079 - 1.3179i$

$$\text{c) } i^{\frac{i}{2}} = e^{\frac{i}{2} \operatorname{Log} i} = e^{\frac{i}{2} (\ln|i|+i \arg i)} = e^{\frac{i}{2} (\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d)} \quad (-1)^{2-i} &= e^{(2-i) \operatorname{Log}(-1)} = e^{(2-i) \{\ln|-1| + i \arg(-1)\}} = e^{(2-i) i(\pi+2k\pi)} \\ &= e^{\pi+2k\pi+i(2\pi+4k\pi)} = e^{\pi+2k\pi} \{\cos(2\pi+4k\pi) + i \sin(2\pi+4k\pi)\} \\ &= e^{\pi+2k\pi}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

La valeur principale est e^π .

$$\begin{aligned}\mathbf{e)} \quad (3+4i)^{\frac{1}{3}} &= e^{\frac{1}{3} \operatorname{Log}(3+4i)} = e^{\frac{1}{3}(\ln|3+4i| + i \arg(3+4i))} \\ &= e^{\frac{1}{3}(2 \ln 5 + i(\operatorname{Arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi))} = e^{\frac{2}{3} \ln 5 + i(\frac{1}{3} \operatorname{Arctg} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} k\pi)} \\ &= \sqrt[3]{25} \left\{ \cos\left(\frac{1}{3} \operatorname{Arctg} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} k\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{3} \operatorname{Arctg} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} k\pi\right) \right\}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

La valeur principale est $\sqrt[3]{25} \left(\cos\left(\frac{1}{3} \operatorname{Arctg} \frac{4}{3}\right) + i \sin\left(\frac{1}{3} \operatorname{Arctg} \frac{4}{3}\right) \right) \simeq 2.7854 + 0.88949i$.

C^ha^pi^tr^e 2

Holomorphie - Harmonicité

2.1 Exercices

Exercice 2.1

En utilisant les règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(z) = (2-i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6, & \text{b)} f(z) = 5(iz)^3 - 10z^2 + 3 - 4i, \\ \text{c)} f(z) = (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i), & \text{d)} f(z) = (z^2 + 2z + 7i)^2(z^4 - 4iz)^3, \\ \text{e)} f(z) = \frac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}, & \text{f)} f(z) = -5iz^2 + \frac{2+i}{z^2}, \\ \text{g)} f(z) = (z^4 - 2iz^2 + z)^{10}, & \text{h)} f(z) = \left(\frac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i} \right)^3. \end{array}$$

Exercice 2.2

Montrer que la fonction $f(z) = x + 4iy$ n'est dérivable en aucun point.

Exercice 2.3

Soit la fonction $f(z) = |z|^2$; montrer que f est dérivable qu'à l'origine (même chose pour $g(z) = \bar{z}$ et $h(z) = |z|$).

Exercice 2.4

Montrer que la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

est non dérivable à l'origine. (on pourra considérer les chemins le long des axes).

Exercice 2.5

Étudier l'holomorphie des fonctions suivantes (en précisant leurs domaines).

a) $f(z) = z^3$,

b) $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$,

c) $f(z) = \operatorname{Re} z$,

d) $f(z) = e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y$,

e) $f(z) = x^2 + y^2$,

f) $f(z) = x + \sin x \operatorname{Ch} y + i(y + \cos x \operatorname{Sh} y)$,

g) $f(z) = y + ix$,

h) $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$,

i) $f(z) = \bar{z}^2$,

j) $f(z) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy) + ie^{x^2-y^2} \sin(2xy)$,

k) $f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1)$,

l) $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$,

m) $f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - i\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$,

n) $f(z) = \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + i\frac{y^3+x^2y-y}{x^2+y^2}$.

Exercice 2.6

Déterminer les constantes a, b, c et d de telle sorte que la fonction f soit holomorphe dans chacun des cas

a) $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$, b) $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$.

Exercice 2.7

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann montrer que les fonctions suivantes ne sont pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, néanmoins elle sont dérivables sur les chemins indiquées

a) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$, l'axe des abscisses,

b) $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2$, les deux axes,

c) $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$, les deux axes,

d) $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$, $y = x + 2$.

Exercice 2.8

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction complexe, on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

1. Montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta.$$

2. Exprimer les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires et montrer que

$$f'(z) = (\cos \theta - i \sin \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r}.$$

3. Appliquer les résultats trouvés pour étudier l'holomorphic des fonctions

$$f(z) = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r} \quad \text{et} \quad g(z) = 5r \cos \theta + r^4 \cos(4\theta) + i(5r \sin \theta + r^4 \sin(4\theta)).$$

Exercice 2.9

Soient U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes

1. f est constante.
2. $P = \operatorname{Re}(f)$ est constante.
3. $Q = \operatorname{Im}(f)$ est constante.
4. $\bar{f}$ est holomorphe sur U .
5. $|f|$ est constante.

Exercice 2.10

Vérifier que les fonctions données sont harmoniques et déterminer leurs conjuguées harmoniques dans chacun des cas suivants.

- a)** $u(x, y) = x$, **b)** $u(x, y) = 2x - 2xy$, **c)** $u(x, y) = x^2 - y^2$,
d) $u(x, y) = -e^{-x} \sin y$, **e)** $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, **f)** $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$.

Exercice 2.11

Vérifier que la fonction u donnée est harmonique et déterminer sa conjuguée harmonique v , puis expliciter la fonction complexe $f(z) = u + iv$ en fonction de z dans les cas suivants

- a)** $u(x, y) = xy + x + 2y$ avec $f(2i) = -1 + 5i$,
b) $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$ avec $f(1 + i) = 5 + 4i$.

Exercice 2.12

Soit v la fonction définie par $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

1. Montrer que v est harmonique dans un domaine D qui ne contient pas l'origine.

2. Trouver une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qui soit holomorphe sur le domaine D .
3. Exprimer f en fonction de z .

Exercice 2.13

Soit $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ une fonction holomorphe sur un domaine D . En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann sous forme polaire montrer que u et v satisfont à l'équation de Laplace sous forme polaire

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Application : montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$$\text{a) } u(x, y) = r^3 \cos(3\theta), \quad \text{b) } u(x, y) = \frac{10r^2 - \sin(2\theta)}{r^2}.$$

Exercice 2.14

Trouver toutes les fonctions conjuguées harmoniques qui correspondent aux formes suivantes :

$$\text{a) } u = F(x^2 + y^2), \quad \text{b) } u = F(ax + by), \quad \text{c) } u = F(xy), \quad \text{d) } u = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 2.15

Déterminer les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ de la variable $z = x + iy$ dans chacun des cas suivants :

1. P ne dépend que de $x \cos \varphi + y \sin \varphi$ où φ est un angle donné.
2. $P^2 + Q^2$ ne dépend que de x .
3. $\frac{P}{Q}$ ne dépend que de x .

2.2 Solutions

Exercice 2.1

En utilisant les règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(z) &= (2-i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6, & \text{b) } f(z) &= 5(iz)^3 - 10z^2 + 3 - 4i, \\
 \text{c) } f(z) &= (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i), & \text{d) } f(z) &= (z^2 + 2z + 7i)^2(z^4 - 4iz)^3, \\
 \text{e) } f(z) &= \frac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}, & \text{f) } f(z) &= -5iz^2 + \frac{2+i}{z^2}, \\
 \text{g) } f(z) &= (z^4 - 2iz^2 + z)^{10}, & \text{h) } f(z) &= \left(\frac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i} \right)^3.
 \end{aligned}$$

Solution.

On rappelle que les règles de dérivation des fonctions de la variable complexe, concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions réelles.

Ainsi les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

$$\text{a) } f'(z) = 5(2-i)z^4 + 4iz^3 - 6z.$$

$$\text{b) } f'(z) = 15i(iz)^2 - 20z = -15iz^2 - 20z.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f'(z) &= (z^6 - 1) \frac{d}{dz}(z^2 - z + 1 - 5i) + (z^2 - z + 1 - 5i) \frac{d}{dz}(z^6 - 1) \\
 &= (z^6 - 1)(2z - 1) + (z^2 - z + 1 - 5i)(6z^5) \\
 &= 8z^7 - 7z^6 + (6 - 30i)z^5 - 2z + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } f'(z) &= (z^2 + 2z + 7i)^2 \frac{d}{dz}(z^4 - 4iz)^3 + (z^4 - 4iz)^3 \frac{d}{dz}(z^2 + 2z + 7i)^2 \\
 &= (z^2 + 2z + 7i)^2 3(4z^3 - 4i)(z^4 - 4iz)^2 + (z^4 - 4iz)^3 2(2z + 2)(z^2 + 2z + 7i) \\
 &= (z^4 - 4iz)^2 (z^2 + 2z + 7i) (3(z^2 + 2z + 7i)(4z^3 - 4i) + 2(z^4 - 4iz)(2z + 2)) \\
 &= (z^4 - 4iz)^2 (z^2 + 2z + 7i) (16z^5 + 28z^4 + 84iz^3 - 28iz^2 - 40iz + 84).
 \end{aligned}$$

$$\text{e) } f'(z) = \frac{(3z + 1 - i) \frac{d}{dz}(iz^2 - 2z) - (iz^2 - 2z) \frac{d}{dz}(3z + 1 - i)}{(3z + 1 - i)^2}$$

$$= \frac{(3z + 1 - i)(2iz - 2) - (iz^2 - 2z)(3)}{(3z + 1 - i)^2} = \frac{3iz^2 + (2 + 2i)z - 2 + 2i}{(3z + 1 - i)^2}.$$

f) $f'(z) = -10iz - \frac{4 + 2i}{z^3}.$

g) $f'(z) = 10(4z^3 - 4iz + 1)(z^4 - 2iz^2 + z)^9.$

h)
$$\begin{aligned} f'(z) &= 3 \left(\frac{(4 + 2i)z}{(2 - i)z^2 + 9i} \right)^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{(4 + 2i)z}{(2 - i)z^2 + 9i} \right) \\ &= 3 \left(\frac{(4 + 2i)z}{(2 - i)z^2 + 9i} \right)^2 \left(\frac{-2(5z^2 + 9 - 18i)}{((2 - i)z^2 + 9i)^2} \right) \\ &= \frac{-24(3 + 4i)z^2(5z^2 + 9 - 18i)}{((2 - i)z^2 + 9i)^4}. \end{aligned}$$

Exercice 2.2

Montrer que la fonction $f(z) = x + 4iy$ n'est dérivable en aucun point.

Solution.

Par définition, la fonction f n'est pas dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si la limite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'existe pas, *i.e.* la limite dépend de la manière dont z tend vers z_0 .

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. On a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x + 4iy - (x_0 + 4iy_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - x_0 + 4i(y - y_0)}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

Pour $y = y_0$ et $x \rightarrow x_0$, la limite cherchée est $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Pour $x = x_0$ et $y \rightarrow y_0$, la limite cherchée est $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{4i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = 4$.

La limite obtenue dépendant de la façon dont $z \rightarrow z_0$, la dérivée n'existe pas *i.e.* la fonction f n'est dérivable en aucun point.

Exercice 2.3

Soit la fonction $f(z) = |z|^2$; montrer que f est dérivable qu'à l'origine (même chose pour $g(z) = \bar{z}$ et $h(z) = |z|$).

Solution.

a) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$ i.e. $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. On a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

Pour $y = y_0$ et $x \rightarrow x_0$, la limite cherchée est $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0$.

Pour $x = x_0$ et $y \rightarrow y_0$, la limite cherchée est

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y^2 - y_0^2}{i(y - y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{(y - y_0)(y + y_0)}{i(y - y_0)} = -2iy_0.$$

Pour $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$, la limite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ dépendant de la façon dont $z \rightarrow z_0$, donc la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}^*$.

Si $z_0 = 0$ i.e. $(x_0, y_0) = (0, 0)$. On a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 \bar{z}}{z \bar{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0.$$

Donc f est dérivable qu'à l'origine avec $f'(0) = 0$.

b) Si $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ alors $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - x_0 - i(y - y_0)}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$

Si $y = y_0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Si $x = x_0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1$.

Pour tout z_0 dans $\mathbb{C}$, la limite n'existe pas donc la fonction g n'est dérivable en aucun point.

c) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

Si $y = y_0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x - x_0} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$

Si $x = x_0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\sqrt{x_0^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{i(y - y_0)} = \frac{-iy_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$

Ainsi $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, la limite en $z = 0$ n'existe pas car elle dépend de θ . La fonction h aussi n'est dérivable en aucun point.

Exercice 2.4

Montrer que la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

est non dérivable à l'origine. (on pourra considérer les chemins le long des axes).

Solution.

On a

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}{x + iy}.$$

Pour $y = 0$ et $x \rightarrow 0$, la limite cherchée est $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + ix}{x} = 1 + i$.

Pour $x = y = t$ et $t \rightarrow 0$, la limite cherchée est $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{it}{t + it} = \frac{i}{1 + i} = \frac{1 + i}{2}$.

La limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ dépend de la façon dont $z \rightarrow 0$, donc la fonction f n'est pas dérivable à l'origine $z = 0$.

Exercice 2.5

Étudier l'holomorphie des fonctions suivantes (en précisant leurs domaines).

a) $f(z) = z^3,$

b) $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i,$

c) $f(z) = \operatorname{Re} z,$

d) $f(z) = e^{-x} \cos y - i e^{-x} \sin y,$

e) $f(z) = x^2 + y^2,$

f) $f(z) = x + \sin x \operatorname{Ch} y + i(y + \cos x \operatorname{Sh} y),$

g) $f(z) = y + ix,$

h) $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3,$

i) $f(z) = \bar{z}^2,$

j) $f(z) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy) + i e^{x^2-y^2} \sin(2xy),$

k) $f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1),$

l) $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2},$

m) $f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - i \frac{y}{(x-1)^2+y^2},$

n) $f(z) = \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + i \frac{y^3+x^2y-y}{x^2+y^2}.$

Solution.

Nous rappelons que si $f = u + iv$ et les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ sont continues dans un domaine D , alors les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sont nécessaires et suffisantes pour que f soit holomorphe dans D .

En notant que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

a) La fonction $f(z) = z^3$ ne contient pas le terme $\bar{z}$, donc d'après la condition de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, la fonction $f(z) = z^3$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

b) Comme précédemment $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$ ne contient pas le terme $\bar{z}$, donc elle est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

c) On a $f(z) = \operatorname{Re} z = x$. Posons $u = x$ et $v = 0$.

Il est clair que $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, la première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite. Alors la fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

d) On a $u = e^{-x} \cos y$ et $v = -e^{-x} \sin y$. Les dérivées partielles de u et v sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x} \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x} \sin y.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x} \cos y \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x} \sin y,$$

la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

On remarque aussi que $f(z)$ n'est que e^{-z} , qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car elle ne contient pas le terme $\bar{z}$.

e) On a $f(z) = x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$ et donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$. La condition de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ n'est satisfaite qu'en $z_0 = 0$. La fonction f est dérivable en $z_0 = 0$ car

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0,$$

mais elle n'est pas holomorphe en 0 car il n'y a pas d'un disque ouvert centré en 0 sur lequel f est dérivable.

Alors la fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

f) On a $u = x + \sin x \operatorname{Ch} y$ et $v = y + \cos x \operatorname{Sh} y$ et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \cos x \operatorname{Ch} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \cos x \operatorname{Ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{Sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{Sh} y.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ car

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \cos x \operatorname{Ch} y \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \sin x \operatorname{Sh} y.$$

La fonction f , qui n'est que $z + \sin z$, est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$.

g) On a $u = y$ et $v = x$ et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

La première condition de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ est satisfaite, mais la seconde condition $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ n'est pas satisfaite en aucun point. Donc la fonction f , qui est $i\bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

h) On a $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$ et donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -6 \neq 0$. Alors f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

i) On a $f(z) = \bar{z}^2$ et donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2\bar{z} \neq 0$ sauf en 0. Alors f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$. Mais elle est dérivable en 0 car

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0 \text{ à cause de } \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{\bar{z}^2}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} |z| = 0.$$

j) On a $u = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$ et $v = e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{x^2-y^2} (x \cos(2xy) - y \sin(2xy)), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{x^2-y^2} (y \cos(2xy) + x \sin(2xy)). \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction f , qui n'est que e^{z^2} , est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$.

k) On a $u = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9$ et $v = 8xy + 5y - 1$ et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 8x + 5 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -8y.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction f , qui n'est que $4z^2 + 5z + 9 - i$, est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$.

l) On a $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$ et donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{-1}{\bar{z}^2} \neq 0$. Alors f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

m) On a $f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{\overline{z-1}}{|z-1|^2} = \frac{1}{z-1}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

n) On a $f(z) = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} + i \frac{y^3 + x^2y - y}{x^2 + y^2} = \frac{z^2\bar{z} + \bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{z^2 + 1}{z} = z + \frac{1}{z}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2.6

Déterminer les constantes a, b, c et d de telle sorte que la fonction f soit holomorphe dans chacun des cas

a) $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$, b) $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$.

Solution.

a) On a $u = 3x - y + 5$ et $v = ax + by - 3$. Les dérivées partielles de u et v sont continues et elles sont données par

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = a.$$

Les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow b = 3 \\ \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

sont alors nécessaires et suffisantes pour que f soit holomorphe. Dans ce cas

$$f(z) = 3x - y + 5 + i(x + 3y - 3) = (3 + i)z + 5 - 3i.$$

b) On a $u = x^2 + axy + by^2$ et $v = cx^2 + dxy + y^2$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + ay, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = dx + 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = ax + 2by, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2cx + dy.$$

Les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ donnent

$$2x + ay = dx + 2y \quad \text{et} \quad ax + 2by = -2cx - dy.$$

Ce qui implique que $a = d = 2$ et $b = c = -1$. Dans ce cas

$$f(z) = x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2) = (1 - i)z^2.$$

Exercice 2.7

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann montrer que les fonctions suivantes ne sont pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, néanmoins elle sont dérivables sur les chemins indiquées

a) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$, l'axe des abscisses,

b) $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2$, les deux axes,

c) $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$, les deux axes,

d) $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$, $y = x + 2$.

Solution.

a) On a $u = x^2 + y^2$ et $v = 2xy$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

La deuxième équation de Cauchy-Riemann n'est satisfaite qu'aux points de l'axe des abscisses $y = 0$. Si $z_0 = x_0$ un point de cet axe des abscisses, alors la fonction f est dérivable en z_0 car

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2 + 2ixy - x_0^2}{x + iy - x_0} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{x^2 - y^2 + 2ixy - x_0^2}{x + iy - x_0} + \frac{2y^2}{x + iy - x_0} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{x^2 - y^2 + 2ixy - x_0^2}{x + iy - x_0} + \frac{2y^2}{x + iy - x_0} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \left(x + iy + x_0 + \frac{2y^2}{x + iy - x_0} \right) \\ &= 2x_0, \end{aligned}$$

mais elle n'est pas holomorphe en z_0 car il n'y a pas d'un disque ouvert centré en z_0 sur lequel f est dérivable.

Alors la fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

b) On a $u = 3x^2y^2$ et $v = -6x^2y^2$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -12x^2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -12xy^2.$$

Les équations de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites que lorsque $xy = 0$ c'est-à-dire aux points des deux axes $y = 0$ et $x = 0$. Sur les deux axes la fonction est dérivable car si $z_0 = x_0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x^2y^2 - 6ix^2y^2}{x + iy - x_0} = 0$$

et si $z_0 = iy_0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{3x^2y^2 - 6ix^2y^2}{x + iy - iy_0} = 0.$$

Pour la même raison que celle qui précède f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

c) On a $u = x^3 + 3xy^2 - x$ et $v = y^3 + 3x^2y - y$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 + 3x^2 - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy.$$

Comme précédemment, les équations de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites que lorsque $xy = 0$.

Sur les deux axes $xy = 0$ la fonction est dérivable car si $z_0 = x_0$,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y) - x_0^3 + x_0}{x + iy - x_0} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2y) - x_0^3}{x + iy - x_0} - 1 \\ &= 3x_0^2 - 1 \quad (\text{en posant } x = x_0 + r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta), \end{aligned}$$

et si $z_0 = iy_0$,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y) - i(y_0^3 - y_0)}{x + iy - iy_0} \\ &= 3y_0^2 - 1 \quad (\text{en posant } x = r \cos \theta \text{ et } y = y_0 + r \sin \theta). \end{aligned}$$

Alors la fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

d) On a $u = x^2 - x + y$ et $v = y^2 - 5y - x$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y - 5, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1.$$

Les équations de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites que lorsque $2x - 1 = 2y - 5$ ou bien $y = x + 2$. Sur la droite $y = x + 2$ la fonction est dérivable car si $z_0 = x_0 + i(x_0 + 2)$,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow x_0 + 2}} \frac{x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x) - ((1 + i)x_0^2 - 2ix_0 + 2 - 6i)}{x + iy - x_0 - i(x_0 + 2)} \\ &= 2x_0 - 1 - i \quad (\text{en posant } x = x_0 + r \cos \theta \text{ et } y = x_0 + 2 + r \sin \theta). \end{aligned}$$

Alors la fonction f n'est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$$f(z) = x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2) = (1 - i)z^2.$$

Exercice 2.8

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction complexe, on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

1. Montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta.$$

2. Exprimer les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires et montrer que

$$f'(z) = (\cos \theta - i \sin \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r}.$$

3. Appliquer les résultats trouvés pour étudier l'holomorphie des fonctions

$$f(z) = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r} \quad \text{et} \quad g(z) = 5r \cos \theta + r^4 \cos(4\theta) + i(5r \sin \theta + r^4 \sin(4\theta)).$$

Solution.

1. On a $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ ou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$. D'où

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta. \quad (2.2)$$

2. De la même façon

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \theta. \quad (2.4)$$

D'après les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, les équations (2.4) et (2.3) peuvent être écrites comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \theta = \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta = r \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right), \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta = -\frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta = - \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

En tenant compte de (2.1) et (2.2), on trouve les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (2.5)$$

On rappelle que si $f = u + iv$ est holomorphe dans un domaine D de $\mathbb{C}$, alors la dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad z \in D. \quad (2.6)$$

En multipliant (2.1) par $\cos \theta$, (2.2) par $-\frac{\sin \theta}{r}$ et en additionnant, il vient, tenant compte de (2.5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (2.7)$$

De même en multipliant (2.1) par $\sin \theta$, (2.2) par $\frac{\cos \theta}{r}$ et en additionnant, il vient, tenant compte de (2.5)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (2.8)$$

En tenant compte de (2.7) et (2.8), la dérivée de f peut s'écrire

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} - i \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ &= (\cos \theta - i \sin \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r}. \end{aligned}$$

3. Pour $f(z) = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r}$, on a $u = \frac{\cos \theta}{r}$ et $v = -\frac{\sin \theta}{r}$, et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\cos \theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\sin \theta}{r^2} = -\frac{1}{r} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires sont satisfaites, alors la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Pour $g(z) = 5r \cos \theta + r^4 \cos(4\theta) + i(5r \sin \theta + r^4 \sin(4\theta))$, on a $u = 5r \cos \theta + r^4 \cos(4\theta)$ et $v = 5r \sin \theta + r^4 \sin(4\theta)$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= 5 \cos \theta + 4r^3 \cos(4\theta) = \frac{1}{r} (5r \cos \theta + 4r^4 \cos(4\theta)) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 5 \sin \theta + 4r^3 \sin(4\theta) = -\frac{1}{r} (-5r \sin \theta - 4r^4 \sin(4\theta)) = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Il vient alors que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.9

Soient U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes

1. f est constante.
2. $P = \operatorname{Re}(f)$ est constante.
3. $Q = \operatorname{Im}(f)$ est constante.
4. $\bar{f}$ est holomorphe sur U .
5. $|f|$ est constante.

Solution.

Il est clair que la condition 1) implique les autres. Comme $f = u + iv$ est holomorphe sur U , alors pour $z = x + iy \in U$, $x, y \in \mathbb{R}$, il vient $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

La connexité de U implique alors l'équivalence de 2) et 3). Par suite, la condition 2) implique la condition 1). D'où l'équivalence 1) $\iff$ 2) $\iff$ 3).

De $2u = f + \bar{f}$, on déduit que, si 4) est vérifié, on a u holomorphe sur U . Comme $\operatorname{Im}(u) = 0$, l'équivalence de 2) et 3) nous fournit alors l'implication 4) $\implies$ 2). On en déduit l'équivalence des conditions 1) à 4).

Si 5) est vérifié, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f|^2 = u^2 + v^2 = C$ pour tout $z \in U$. Si $C = 0$, il vient $f = 0$. Supposons $C \neq 0$. Pour $z \in U$, on a

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Compte tenu des conditions de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ on obtient

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Le système précédent aux inconnues $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ est homogène, et a pour déterminant $u^2 + v^2 = C \neq 0$. On voit donc que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Comme U est connexe, u est donc constante. Ainsi 5) $\implies$ 2). Par suite, les conditions 1) à 5) sont équivalentes.

Exercice 2.10

Vérifier que les fonctions données sont harmoniques et déterminer leurs conjuguées harmoniques dans chacun des cas suivants.

- a) $u(x, y) = x$, b) $u(x, y) = 2x - 2xy$, c) $u(x, y) = x^2 - y^2$,
d) $u(x, y) = -e^{-x} \sin y$, e) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, f) $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$.

Solution.

On rappelle qu'une fonction u de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω est dite harmonique si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

La fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est notée Δu et est appelée laplacien de u .

Notons que toutes les fonctions de a) à f) sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi si u une fonction harmonique dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Alors une fonction v est dite harmonique conjuguée de u si les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann et dans ce cas $f = u + iv$ est une fonction holomorphe sur $\Omega \subset \mathbb{C}$.

a) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Donc $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v conjuguée harmonique de u , on utilise les conditions de Cauchy-Riemann. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.10)$$

En intégrant l'équation (2.9) par rapport à y , il vient

$$v = y + C_1(x), \quad (2.11)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (2.11) dans (2.10) on obtient

$$\frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \rightarrow C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.11), $v = y + c$.

b) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Donc $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$, d'où la fonction u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 2y, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2x. \quad (2.13)$$

En intégrant l'équation (2.12) par rapport à y , il vient

$$v = 2y - y^2 + C_1(x), \quad (2.14)$$

Par substitution de (2.14) dans (2.13) on obtient

$$\frac{d}{dx}C_1(x) = 2x \rightarrow C_1(x) = x^2 + c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.14), $v = 2y - y^2 + x^2 + c$.

c) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, alors u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y. \quad (2.16)$$

En intégrant l'équation (2.15) par rapport à y , il vient

$$v = 2xy + C_1(x), \quad (2.17)$$

Par substitution de (2.17) dans (2.16) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx}C_1(x) = 2y \rightarrow \frac{d}{dx}C_1(x) = 0 \rightarrow C_1(x) = c,$$

D'où de (2.17), $v = 2xy + c$.

d) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x} \sin y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-x} \sin y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x} \cos y$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x} \sin y$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x} \sin y + e^{-x} \sin y = 0$, alors u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x} \sin y, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x} \cos y. \quad (2.19)$$

En intégrant l'équation (2.18) par rapport à y , il vient

$$v = -e^{-x} \cos y + C_1(x), \quad (2.20)$$

Par substitution de (2.20) dans (2.19) on obtient

$$e^{-x} \cos y + \frac{d}{dx} C_1(x) = e^{-x} \sin y \rightarrow \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \rightarrow C_1(x) = c,$$

D'où de (2.20), $v = -e^{-x} \cos y + c$.

e) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$, alors u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy. \quad (2.22)$$

En intégrant l'équation (2.21) par rapport à y , il vient

$$v = 3x^2 y - y^3 + C_1(x), \quad (2.23)$$

Par substitution de (2.23) dans (2.22) on obtient

$$6xy + \frac{d}{dx} C_1(x) = 6xy \rightarrow \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \rightarrow C_1(x) = c,$$

D'où de (2.23), $v = 3x^2 y - y^3 + c$.

f) On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x ((1+x) \cos y - y \sin y), & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^x ((2+x) \cos y - y \sin y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x ((1+x) \sin y + y \cos y), & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^x ((2+x) \cos y - y \sin y). \end{aligned}$$

D'où $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x ((2+x) \cos y - y \sin y) - e^x ((2+x) \cos y - y \sin y) = 0$ ce qui montre que u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x ((1+x) \cos y - y \sin y), \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x ((1+x) \sin y + y \cos y). \quad (2.25)$$

En intégrant l'équation (2.24) par rapport à y , il vient

$$v = e^x (x \sin y + y \cos y) + C_1(x), \quad (2.26)$$

Par substitution de (2.26) dans (2.25) on obtient

$$e^x ((1+x) \sin y + y \cos y) + \frac{d}{dx} C_1(x) = e^x ((1+x) \sin y + y \cos y) \rightarrow C_1(x) = c,$$

D'où de (2.26), $v = e^x (x \sin y + y \cos y) + c$.

Exercice 2.11

Vérifier que la fonction u donnée est harmonique et déterminer sa conjuguée harmonique v , puis expliciter la fonction complexe $f(z) = u + iv$ en fonction de z dans les cas suivants

- a) $u(x, y) = xy + x + 2y$ avec $f(2i) = -1 + 5i$,
 b) $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$ avec $f(1+i) = 5 + 4i$.

Solution.

Remarquons que les fonction u des deux cas a) et b) sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = y + 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v conjuguée harmonique de u , on utilise les conditions de Cauchy-Riemann. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y + 1, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x - 2. \quad (2.28)$$

En intégrant l'équation (2.27) par rapport à y , il vient

$$v = \frac{1}{2}y^2 + y + C_1(x), \quad (2.29)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (2.29) dans (2.28) on obtient

$$\frac{d}{dx} C_1(x) = -x - 2 \rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.29),

$$v = \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c.$$

Nous présentons quatre méthodes pour expliciter f en fonction de z :

Méthode 1.

On a $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Posons $y = 0$, $f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0)$.

En remplaçant x par z on trouve $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$. Comme $u(z, 0) = z$ et $v(z, 0) = -\frac{1}{2}z^2 - 2z + c$, alors $f(z) = z - \frac{1}{2}iz^2 - 2iz + ic$. La condition $f(2i) = -1 + 5i$ donne

$$f(z) = (1 - 2i)z - \frac{1}{2}iz^2 - 3 + i.$$

Méthode 2.

On a

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = xy + x + 2y + i\left(\frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c\right) \\ &= xy + \frac{1}{2}iy^2 - \frac{1}{2}ix^2 + x + 2y + iy - 2ix + ic \\ &= -\frac{1}{2}i(x^2 - y^2 + 2ixy) + x + iy - 2i(x + iy) + ic \\ &= -\frac{1}{2}iz^2 + z - 2iz + ic. \end{aligned}$$

Méthode 3.

On sait que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. D'où par substitution dans $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ on trouve, après des calculs fastidieux, que z disparaît et que seul subsiste le résultat $(1 - 2i)z - \frac{1}{2}iz^2 + ic$.

En général la méthode 1 est préférable aux méthodes 2 et 3 quand à la fois u et v sont connus.

Méthode 4.

Pour une fonction f holomorphe sur un domaine D on a $f(z) + f(\bar{z}) = 2u(x, y)$. En remplaçant x par $\frac{z}{2}$ et y par $-i\frac{z}{2}$ on trouve

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) - f(0).$$

Alors

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) = 2\left(\frac{z}{2}\left(-i\frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2} - iz\right) + 2ic$$

$$= -\frac{1}{2}iz^2 + (1 - 2i)z + 2ic.$$

En général la méthode 1 est préférable aux méthodes 2 et 3 quand à la fois u et v sont connus.

b) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y + 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -24xy$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 12xy^2 - 4x^3$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 24xy$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -24xy + 24xy = 0$, d'où la fonction u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y + 1, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2. \quad (2.31)$$

En intégrant l'équation (2.30) par rapport à y , il vient

$$v = y^4 - 6x^2y^2 + C_1(x), \quad (2.32)$$

Par substitution de (2.32) dans (2.31) on obtient

$$-12xy^2 + \frac{d}{dx}C_1(x) = 4x^3 - 12xy^2 \rightarrow \frac{d}{dx}C_1(x) = 4x^3 \rightarrow C_1(x) = x^4 + c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.32), $v = y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + c$. Alors

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = z + iz^4 + ic.$$

Avec la condition $f(1 + i) = 5 + 4i$ on trouve $f(z) = iz^4 + z + 4 + 7i$.

Exercice 2.12

Soit v la fonction définie par $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

1. Montrer que v est harmonique dans un domaine D qui ne contient pas l'origine.
2. Trouver une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qui soit holomorphe sur le domaine D .
3. Exprimer f en fonction de z .

Solution.

Remarquons que la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ qui ne contient pas l'origine.

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2x \frac{(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2x \frac{(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ce qui montre que v est harmonique.

2. Pour trouver une fonction u pour que $f = u + iv$ soit holomorphe sur le domaine D , on utilise les conditions de Cauchy-Riemann, qui s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (2.34)$$

En intégrant l'équation (2.33) par rapport à x , il vient

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} + C_1(y), \quad (2.35)$$

où $C_1(y)$ est une fonction réelle de y .

Par substitution de (2.35) dans (2.34) on obtient

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{d}{dy}C_1(y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \rightarrow C_1(y) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.35),

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} + c.$$

3. On a

$$\begin{aligned}f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + c + i \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{i(x - iy)}{(x - iy)(x + iy)} + c = \frac{i}{x + iy} + c \\ &= \frac{i}{z} + c\end{aligned}$$

Exercice 2.13

Soit $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ une fonction holomorphe sur un domaine D . En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann sous forme polaire montrer que u et v satisfont à l'équation de Laplace sous forme polaire

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Application : montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$$\text{a) } u(x, y) = r^3 \cos(3\theta), \quad \text{b) } u(x, y) = \frac{10r^2 - \sin(2\theta)}{r^2}.$$

Solution.

D'après le problème 2.8, les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires sont

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (2.37)$$

Pour éliminer v on dérive (2.36) par rapport à r et (2.37) par rapport à θ , d'où

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (2.39)$$

Mais $\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}$ si l'on suppose les dérivées partielles secondes continues. D'où d'après (2.38) et (2.39)

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{ou} \quad r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

De la même façon, par élimination de u on trouve $r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$.

Application :

a) On a $\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \cos(3\theta)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 6r \cos(3\theta)$, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -3r^3 \sin(3\theta)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -9r^3 \cos(3\theta)$.

Donc

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2 (6r \cos(3\theta)) + r (3r^2 \cos(3\theta)) - 9r^3 \cos(3\theta) = 0,$$

ce qui montre que u est harmonique.

b) On a $u(x, y) = \frac{10r^2 - \sin(2\theta)}{r^2} = 10 - \frac{\sin(2\theta)}{r^2}$ donc

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2 \frac{\sin(2\theta)}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -6 \frac{\sin(2\theta)}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -2 \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 4 \frac{\sin(2\theta)}{r^2}.$$

Alors

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2 \left(-6 \frac{\sin(2\theta)}{r^4} \right) + r \left(2 \frac{\sin(2\theta)}{r^3} \right) + 4 \frac{\sin(2\theta)}{r^2} = 0,$$

ce qui montre que u est harmonique.

Exercice 2.14

Trouver toutes les fonctions conjuguées harmoniques qui correspondent aux formes suivantes :

$$\mathbf{a)} \ u = F(x^2 + y^2), \quad \mathbf{b)} \ u = F(ax + by), \quad \mathbf{c)} \ u = F(xy), \quad \mathbf{d)} \ u = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Solution.

a) Il faut d'abord déterminer la fonction F pour laquelle u soit harmonique.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2xF'(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2F'(x^2 + y^2) + 4x^2F''(x^2 + y^2), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2yF'(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2F'(x^2 + y^2) + 4y^2F''(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Donc $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4F'(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2)F''(x^2 + y^2)$, alors u est harmonique si et seulement si

$$F'(s) + sF''(s) = 0,$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 et elle est équivalente à

$$\frac{F''(s)}{F'(s)} = -\frac{1}{s}.$$

En intégrant par rapport à s , on trouve

$$\ln F'(s) = -\ln s + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad \text{ou bien} \quad F'(s) = \frac{c_2}{s}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

En intégrant une autre fois par rapport à s , on obtient

$$F(s) = c_2 \ln s + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}.$$

Donc l'expression de F doit être $F(x^2 + y^2) = c_2 \ln(x^2 + y^2) + c_3$ avec $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas $\frac{\partial u}{\partial x} = c_2 \frac{2x}{x^2 + y^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = c_2 \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

Maintenant, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann pour trouver une fonction v conjuguée harmonique de u . Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = c_2 \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -c_2 \frac{2y}{x^2 + y^2}. \quad (2.41)$$

En intégrant l'équation (2.40) par rapport à y , il vient

$$v = 2c_2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C_1(x), \quad (2.42)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (2.42) dans (2.41) on obtient

$$-c_2 \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{d}{dx} C_1(x) = -c_2 \frac{2y}{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \rightarrow C_1(x) = c_4,$$

où c_4 désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.42), $v = 2c_2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_4$.

b) Pour $u = F(ax + by)$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = aF'(ax + by), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 F''(ax + by), \frac{\partial u}{\partial y} = bF'(ax + by) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 F''(ax + by).$$

Donc $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (a^2 + b^2) F''(ax + by)$, d'où la fonction u est harmonique si et seulement si $u = F(ax + by) = ax + by + c_1$, où c_1 une constante dans $\mathbb{R}$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -b. \quad (2.44)$$

En intégrant l'équation (2.43) par rapport à y , il vient

$$v = ay + C_1(x), \quad (2.45)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (2.45) dans (2.44) on obtient

$$\frac{d}{dx} C_1(x) = -b \rightarrow C_1(x) = -bx + c_2,$$

où c_2 désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.45), $v = ay - bx + c_2$.

c) Pour $u = F(xy)$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yF'(xy), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 F''(xy), \frac{\partial u}{\partial y} = xF'(xy) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 F''(xy).$$

Donc $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) F''(xy)$, d'où la fonction u est harmonique si et seulement si $u = F(xy) = c_1 xy + c_2$, où c_1, c_2 sont des constantes dans $\mathbb{R}$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = c_1 y, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -c_1 x. \quad (2.47)$$

En intégrant l'équation (2.46) par rapport à y , il vient

$$v = \frac{c_2}{2} y^2 + C_1(x), \quad (2.48)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (2.48) dans (2.47) on obtient

$$\frac{d}{dx} C_1(x) = -c_1 x \rightarrow C_1(x) = -\frac{c_1}{2} x^2 + c_2,$$

où c_2 désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.48), $v = \frac{c_1}{2} (y^2 - x^2) + c_2$.

d) Pour $u = F\left(\frac{y}{x}\right)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} F'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} F'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} F''\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} F''\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \left(2\frac{y}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) F''\left(\frac{y}{x}\right) \right),$$

d'où la fonction u est harmonique si et seulement si

$$2sF'(s) + (s^2 + 1)F''(s) = 0,$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 et elle est équivalente à

$$\frac{F''(s)}{F'(s)} = -\frac{2s}{s^2 + 1}.$$

En intégrant par rapport à s , on trouve

$$\ln F'(s) = -\ln(s^2 + 1) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ ou bien } F'(s) = \frac{c_2}{s^2 + 1}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

En intégrant une autre fois par rapport à s , on obtient

$$F(s) = c_2 \operatorname{Arctg} s + c_3, \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Donc l'expression de F doit être $F\left(\frac{y}{x}\right) = c_2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_3$ avec $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Dans ce cas $\frac{\partial u}{\partial x} = -c_2 \frac{y}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = c_2 \frac{x}{x^2+y^2}$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -c_2 \frac{y}{x^2+y^2}, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -c_2 \frac{x}{x^2+y^2}. \quad (2.50)$$

En intégrant l'équation (2.49) par rapport à y , il vient

$$v = -\frac{c_2}{2} \ln(x^2 + y^2) + C_1(x), \quad (2.51)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (2.51) dans (2.50) on obtient

$$-c_2 \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{d}{dx} C_1(x) = -c_2 \frac{x}{x^2+y^2} \rightarrow C_1(x) = c_4,$$

où c_4 désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.51), $v = -\frac{c_2}{2} \ln(x^2 + y^2) + c_4$.

Exercice 2.15

Déterminer les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ de la variable $z = x + iy$ dans chacun des cas suivants :

1. P ne dépend que de $x \cos \varphi + y \sin \varphi$ où φ est un angle donné.
2. $P^2 + Q^2$ ne dépend que de x .
3. $\frac{P}{Q}$ ne dépend que de x .

Solution.

1. Soit $P(x, y) = F(x \cos \varphi + y \sin \varphi)$. D'après la question b) de l'exercice 2.14 pour $a = \cos \varphi$ et $b = \sin \varphi$, la fonction $P = c_1(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et la fonction v conjuguée harmonique de u est $Q = c_1(y \cos \varphi - \sin \varphi x) + c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$. Les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ dans ce cas sont

$$f(z) = c_1(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + c_2 + ic_1(y \cos \varphi - \sin \varphi x) + ic_3$$

$$\begin{aligned}
 &= c_1 \cos \varphi (x + iy) + c_1 \sin \varphi (y - ix) + c_2 + ic_3 \\
 &= c_1 z \cos \varphi - ic_1 z \sin \varphi + c_2 + ic_3 \\
 &= c_1 e^{-\varphi} z + c_2 + ic_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

2. Soit $f = P + iQ$ telle que $P^2(x, y) + Q^2(x, y) = F(x)$ où F est une fonction positive non identiquement nulle sur un domaine connexe. En dérivant par rapport à x et puis y on trouve

$$\begin{aligned}
 2P(x, y) \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + 2Q(x, y) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= F'(x), \\
 2P(x, y) \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + 2Q(x, y) \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= 0.
 \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions de Cauchy-Riemann $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$ on obtient

$$\begin{cases} P(x, y) \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - Q(x, y) \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} F'(x), \\ Q(x, y) \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + P(x, y) \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système en $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ est $D = P^2(x, y) + Q^2(x, y) \equiv F(x) \neq 0$. En résolvant ce système on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} P(x, y) \frac{F'(x)}{F(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{2} Q(x, y) \frac{F'(x)}{F(x)},$$

ou encore comme $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ on aura

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)}{P(x, y)} = \frac{1}{2} \frac{F'(x)}{F(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{1}{2} \frac{F'(x)}{F(x)}.$$

En intégrant par rapport à x puis en prenant l'exponentielle des deux côtés on trouve

$$P(x, y) = G_1(y) \sqrt{F(x)} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = G_2(y) \sqrt{F(x)},$$

où G_1 et G_2 sont des fonctions de y . Comme $P^2(x, y) + Q^2(x, y) = F(x)$ alors $G_1^2(y) + G_2^2(y) = 1$ et donc

$$P(x, y) = G(y) \sqrt{F(x)} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \sqrt{F(x)} \sqrt{1 - G^2(y)},$$

où G est une fonction qui ne dépend que de y et qui satisfait la condition $1 - G^2(y) \geq 0$ sur un domaine connexe.

Pour déterminer la forme des fonctions F et G on utilise les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} &\implies \frac{1}{2} \frac{F'(x)}{\sqrt{F(x)}} G(y) = -\frac{G(y) G'(y)}{\sqrt{1-G^2(y)}} \sqrt{F(x)}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} &\implies G'(y) \sqrt{F(x)} = -\frac{1}{2} \frac{F'(x)}{\sqrt{F(x)}} \sqrt{1-G^2(y)}.\end{aligned}$$

Ces deux équations sont identiques et peuvent s'écrire

$$-\frac{G'(y)}{\sqrt{1-G^2(y)}} = \frac{1}{2} \frac{F'(x)}{F(x)} = c_1, \text{ où } c_1 \text{ est une constante dans } \mathbb{R}.$$

En intégrant on trouve

$$F(x) = c_2 e^{2c_1 x} \text{ et } G(y) = \cos(c_1 y + c_3), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ dans ce cas sont

$$\begin{aligned}f(z) &= c_4 e^{c_1 x} \cos(c_1 y + c_3) + i c_4 e^{c_1 x} \sin(c_1 y + c_3), \quad c_4 \in \mathbb{R} \\ &= \alpha e^{cz}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

3. Soit $f = P + iQ$ telle que $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = F(x)$ ou bien $P(x, y) = F(x) Q(x, y)$ où F est une fonction non identiquement nulle sur un domaine connexe. En dérivant par rapport à x et puis y on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= F'(x) Q(x, y) + F(x) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= F(x) \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y).\end{aligned}$$

Compte tenu des conditions de Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ on obtient

$$\begin{cases} F(x) \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = -F'(x) Q(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) + F(x) \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système en $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ on obtient

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{F(x) F'(x)}{1 + F^2(x)} Q(x, y), \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{F'(x)}{1 + F^2(x)} Q(x, y). \quad (2.53)$$

En intégrant l'équation (2.52) par rapport à x , il vient

$$Q(x, y) = \frac{G(y)}{\sqrt{1 + F^2(x)}}, \quad (2.54)$$

où $G(y)$ est une fonction réelle de y .

Par substitution de (2.54) dans (2.53) on obtient

$$\frac{G'(y)}{\sqrt{1 + F^2(x)}} = \frac{F'(x)}{1 + F^2(x)} \frac{G(y)}{\sqrt{1 + F^2(x)}},$$

ce qui implique

$$\frac{G'(y)}{G(y)} = \frac{F'(x)}{1 + F^2(x)} = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Encore en intégrant cet équation on trouve

$$F(x) = \operatorname{tg}(c_1 x + c_2) \quad \text{et} \quad G(y) = c_3 e^{c_1 y}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$Q(x, y) = \frac{G(y)}{\sqrt{1 + F^2(x)}} = c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2).$$

Pour déterminer la fonction P on utilise les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = c_1 c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2), \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = c_1 c_3 e^{c_1 y} \sin(c_1 x + c_2). \quad (2.56)$$

En intégrant l'équation (2.56) par rapport à y , il vient

$$P(x, y) = c_3 e^{c_1 y} \sin(c_1 x + c_2) + C(x), \quad (2.57)$$

où $C(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (2.57) dans (2.55) on obtient

$$c_1 c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2) + C'(x) = c_1 c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2) \rightarrow C(x) = c_4, \quad c_4 \in \mathbb{R}.$$

La constante c_4 doit être nulle car $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ ne dépend que de x . D'où

$$P(x, y) = c_3 e^{c_1 y} \sin(c_1 x + c_2), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ dans ce cas sont

$$\begin{aligned} f(z) &= c_3 e^{c_1 y} \sin(c_1 x + c_2) + i c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, \\ &= \alpha e^{ciz}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

C^ha^pi^tr^e 3

Intégration et formule de Cauchy

3.1 Exercices

Exercice 3.1

Déterminer et représenter graphiquement les chemins suivants.

- a) $z(t) = \left(1 + \frac{1}{2i}\right)t$, $2 \leq t \leq 5$, b) $z(t) = 3 + i + (1 - i)t$, $0 \leq t \leq 3$,
c) $z(t) = t + (1 - t)^2 i$, $-1 \leq t \leq 1$, d) $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}$, $0 \leq t \leq 2$,
e) $z(t) = 2 + 4e^{\frac{\pi}{2} i t}$, $0 \leq t \leq 2$, f) $z(t) = 2 \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 3.2

Donner une représentation paramétrique des chemins suivants.

- a) Le segment allant de $(-1, 1)$ vers $(1, 3)$.
b) L'arc de courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, allant de $(1, 1)$ à $\left(5, \frac{1}{5}\right)$.
c) Le demi cercle supérieur $|z - 2 + i| = 2$ de $(4, -1)$ à $(0, -1)$.
d) L'ellipse d'équation $4(x - 2)^2 + 5(y + 1)^2 = 20$.
e) La branche d'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 4$ contenant $(2, 0)$.
f) L'arc de la parabole d'équation $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ avec $-2 \leq x \leq 2$.

Exercice 3.3

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

- a) $\int_C e^z dz$ où C est le chemin le plus court reliant $i\pi$ à $2i\pi$.
- b) $\int_C \operatorname{Re} z dz$ où C est l'arc de la parabole $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$ de $1+i$ à $3+3i$.
- c) $\int_C \cos(2z) dz$ où C est le demi cercle $|z| = \pi, x \geq 0$ de $-i\pi$ vers $i\pi$.
- d) $\int_C \operatorname{Re}(z^2) dz$ où C est le carré de sommets $0, 1, 1+i$ et i orienté positivement.
- e) $\int_C ze^{z^2} dz$ où C est le chemin reliant 1 à i le long des axes.
- f) $\int_C \operatorname{Im}(z^2) dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1$ et i orienté positivement.
- g) $\int_C \left(\frac{5}{z-2i} - \frac{6}{(z-2i)^2} \right) dz$ où C est le cercle $|z-2i| = 4$ orienté positivement.

Exercice 3.4

Calculer l'intégrale $\int_{|z|=R} f(z) dz$ dans chacun des cas suivants.

- a) $f(z) = e^{z^2}$, b) $f(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right)$, c) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$,
- d) $f(z) = \operatorname{Im} z$, e) $f(z) = \frac{1}{|z|^2}$, f) $f(z) = \frac{1}{4z-3}$.

Exercice 3.5

Évaluer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

- a) $\int_C \operatorname{Log}(1-z) dz$ où C est le parallélogramme de sommets $-1-i, -i, 1+i$ et i .
- b) $\int_C \coth\left(\frac{1}{2}z\right) dz$ où C est le cercle $\left|z - \frac{\pi}{2}i\right| = 1$
- c) $\int_C \frac{\sin z}{z+2iz} dz$ où C est le cercle $|z-4-2i| = \frac{11}{2}$.
- d) $\int_C \frac{1}{z-3i} dz$ où C est le cercle $|z| = \pi$.
- e) $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 2 \text{ ou } |z|^- = 1\}$.
- f) $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 1 \text{ ou } |z|^- = 3\}$.
- g) $\int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4-16} dz$ où C est le carré de sommets $-i, 1, i$ et -1 .
- h) $\int_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz$ où C est le cercle $|z-2| = 4$.

Exercice 3.6

Calculer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

- a) $\int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz$ où C est l'ellipse de l'équation $4x^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- b) $\int_C \frac{z}{z^2 + 4z + 3} dz$ où C est le cercle $|z + 1| = 2$.
- c) $\int_C \frac{z + 2}{z - 2} dz$ où C est le cercle $|z - 1| = 2$.
- d) $\int_C \frac{\operatorname{Ch}(z^2 - \pi i)}{z - \pi i} dz$ où C est le carré de sommets $2, 2 + 4i, -2 + 4i$ et -2 .
- e) $\int_C \frac{\operatorname{tg} z}{z - i} dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1 + 2i$ et $-1 + 2i$.
- f) $\int_C \frac{\operatorname{Log}(z + 1)}{z^2 + 1} dz$ où C est le cercle $|z - i| = \frac{7}{5}$.

3.2 Solutions

Exercice 3.1

Déterminer et représenter graphiquement les chemins suivants.

- a) $z(t) = \left(1 + \frac{1}{2i}\right)t, \quad 2 \leq t \leq 5,$ b) $z(t) = 3 + i + (1 - i)t, \quad 0 \leq t \leq 3,$
 c) $z(t) = t + (1 - t)^2 i, \quad -1 \leq t \leq 1,$ d) $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 2,$
 e) $z(t) = 2 + 4e^{\frac{\pi}{2} i t}, \quad 0 \leq t \leq 2,$ f) $z(t) = 2 \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Solution.

Nous rappelons qu'un **chemin** ou **arc** de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{C}$ est défini comme étant une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle réel $I = [a, b]$, $a < b$, vers le plan complexe $\mathbb{C}$.

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

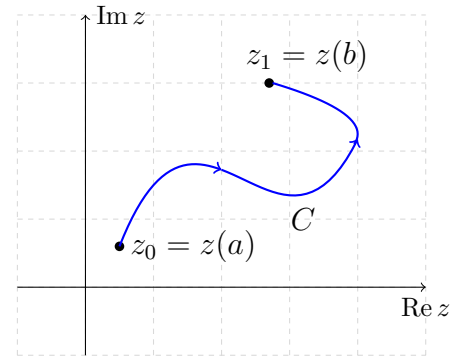
$$t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t).$$

Ses points initial et final sont $z_0 = z(a)$ et $z_1 = z(b)$.

La fonction $t \mapsto z(t)$ est souvent notée $t \mapsto \gamma(t)$ ou $t \mapsto \phi(t)$. Les points initial $z_0 = \gamma(a)$ et final $z_1 = \gamma(b)$ sont appelés respectivement l'origine et l'extrémité de γ .

L'image $C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [a, b]\}$ s'appelle support de γ ou **courbe** dans le plan complexe $\mathbb{C}$ paramétrée par la fonction $\gamma : t \mapsto z(t)$.

Souvent on confond le chemin avec son support et on dit que C est un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

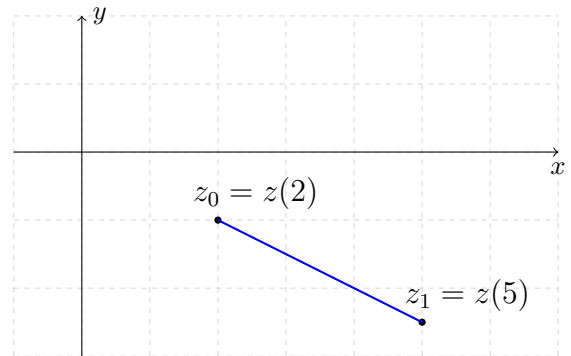


- a) On a $z(t) = \left(1 + \frac{1}{2i}\right)t = t - \frac{1}{2}it, \quad 2 \leq t \leq 5.$

Donc $x(t) = t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}t.$

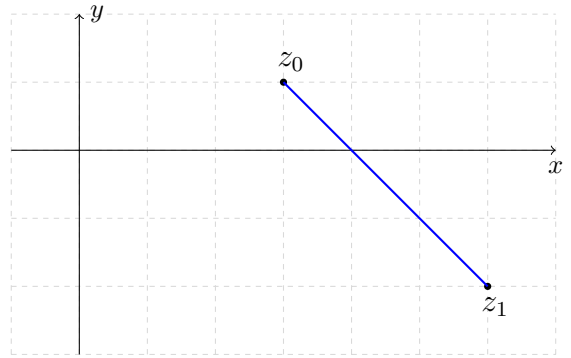
En éliminant t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve

$y = -\frac{1}{2}x, \quad 2 \leq x \leq 5,$ qui est un segment de droite, reliant les deux points complexes $z_0 = 2 - i$ et $z_1 = 5 - \frac{5}{2}i.$



- b) On a $z(t) = 3 + i + (1 - i)t = 3 + t + i(1 - t)$,
 $0 \leq t \leq 3$. Donc $x(t) = 3 + t$ et $y(t) = 1 - t$.

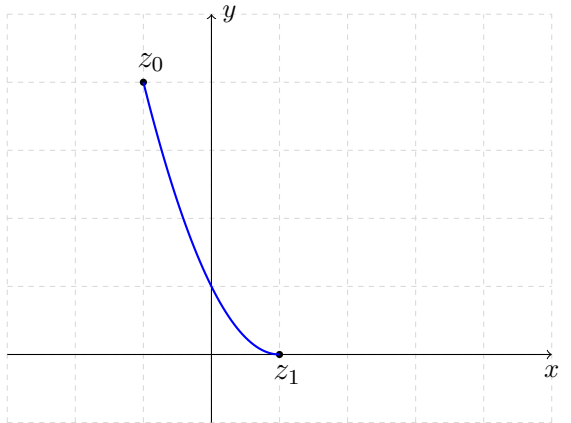
En éliminant t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve
 $y = 4 - x$, $3 \leq x \leq 6$, qui est un segment de
droite, reliant les deux points complexes $z_0 = 3 + i$
et $z_1 = 6 - 2i$.



- c) On a $z(t) = t + (1 - t)^2 i$, $-1 \leq t \leq 1$.

Donc $x(t) = t$ et $y(t) = (1 - t)^2$.

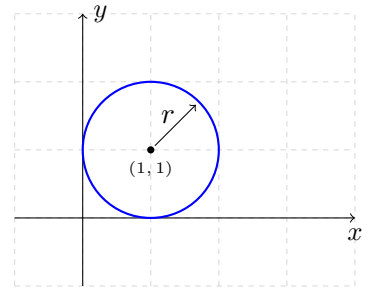
En éliminant t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve
 $y = (1 - x)^2$, $-1 \leq x \leq 1$, qui est un arc
d'une parabole, reliant les deux points complexes
 $z_0 = -1 + 4i$ et $z_1 = 1$.



- d) On a $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t} = 1 + \cos(\pi t) + i(1 - \sin(\pi t))$, $0 \leq t \leq 2$.

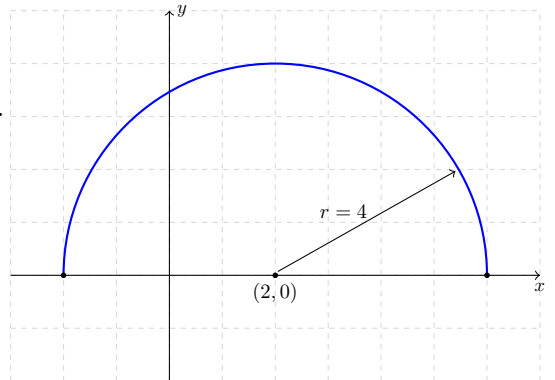
Donc $x(t) = 1 + \cos(\pi t)$ et $y(t) = 1 - \sin(\pi t)$.

En tenant compte de $\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = 1$ on obtient
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $0 \leq x \leq 2$, qui est un cercle de rayon
 $r = 1$ et de centre $(1, 1)$.



- e) On a $z(t) = 2 + 4e^{\frac{\pi}{2}it}$
 $= 2 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 4i\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $0 \leq t \leq 2$.
Donc $2 + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ et $y(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

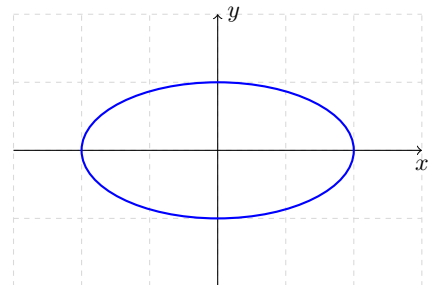
En tenant compte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1$ on
obtient $(x - 2)^2 + y^2 = 4^2$, $0 \leq y \leq 4$, qui est le
demi cercle supérieur de rayon $r = 4$ et de centre
 $(2, 0)$.



- f) On a $z(t) = 2\cos t + i\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Donc $x(t) = 2\cos t$ et $y(t) = \sin t$.

En tenant compte de $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ on obtient
 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $-2 \leq x \leq 2$, qui est un ellipse.



Exercice 3.2

Donner une représentation paramétrique des chemins suivants.

- a) Le segment allant de $(-1, 1)$ vers $(1, 3)$.
- b) L'arc de courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, allant de $(1, 1)$ à $(5, \frac{1}{5})$.
- c) Le demi cercle supérieur $|z - 2 + i| = 2$ de $(4, -1)$ à $(0, -1)$.
- d) L'ellipse d'équation $4(x - 2)^2 + 5(y + 1)^2 = 20$.
- e) La branche d'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 4$ contenant $(2, 0)$.
- f) L'arc de la parabole d'équation $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ avec $-2 \leq x \leq 2$.

Solution.

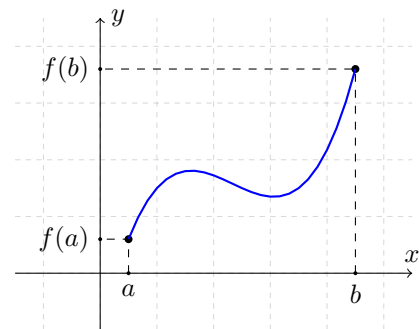
On rappelle que :

- La courbe représentative d'une fonction

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

est paramétrée par

$$z(t) = t + if(t), \quad t \in [a, b].$$

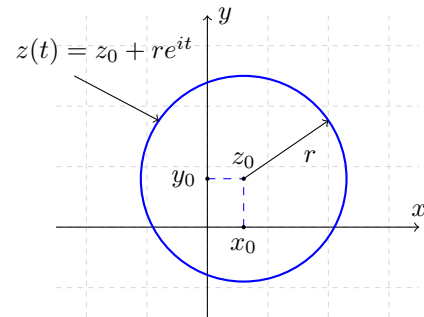


- Le cercle de centre z_0 et de rayon r est une courbe paramétrée par

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ou

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



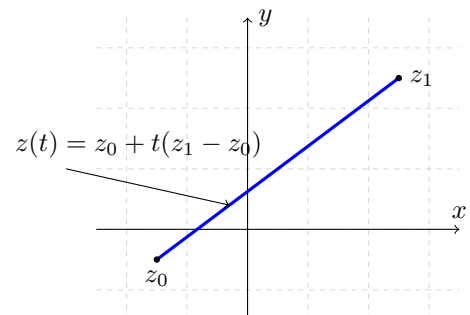
Cercle de centre z_0 et de rayon r

- Le segment d'extrémités z_0 et z_1 noté $[z_0, z_1]$ est une courbe paramétrée par

$$z(t) = z_0(1 - t) + tz_1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ou

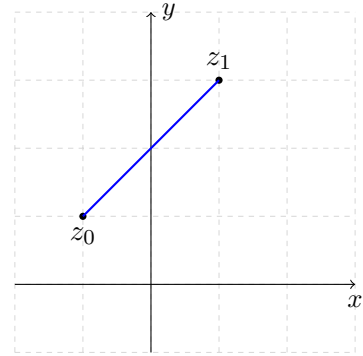
$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Segment d'extrémités z_0 et z_1

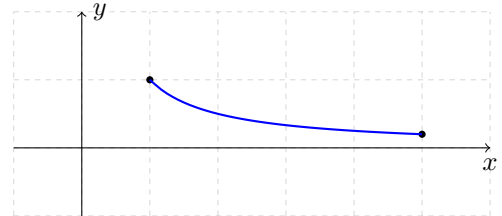
- a) Le segment de droite reliant les deux points $z_0 = -1 + i$ et $z_1 = 1 + 3i$ est paramétré par

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0(1-t) + tz_1 \\ &= (1+i)(1-t) + t(1+3i) \\ &= 1 + i(2t+1), \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$



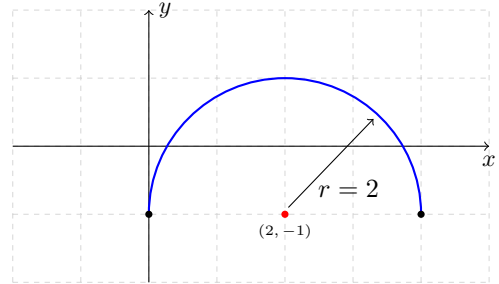
- b) L'arc de courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, allant de $(1, 1)$ à $(5, \frac{1}{5})$ est paramétré par

$$z(t) = t + \frac{i}{t}, \quad 1 \leq t \leq 5.$$



- c) Le demi cercle supérieur $|z - 2 + i| = 2$ de $(4, -1)$ à $(0, -1)$ est paramétré par

$$z(t) = 2 - i + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$



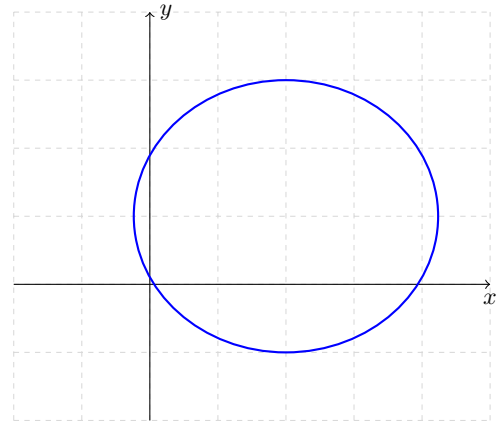
- d) L'équation de l'ellipse $4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20$ est équivalente à

$$\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1.$$

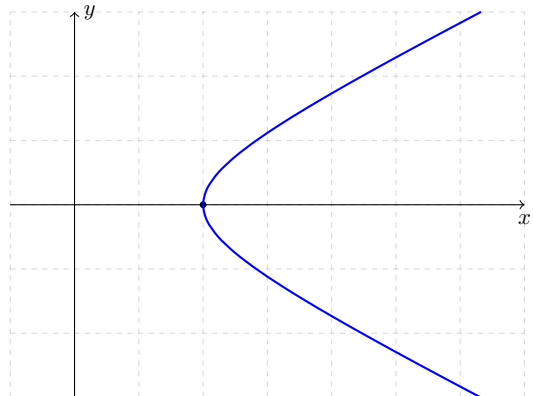
Posons $\frac{x(t)-2}{\sqrt{5}} = \cos t$ et $\frac{y(t)+1}{2} = \sin t$.

L'équation paramétrique cherchée est alors

$$z(t) = 2 + i + \sqrt{5} \cos t + 2i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



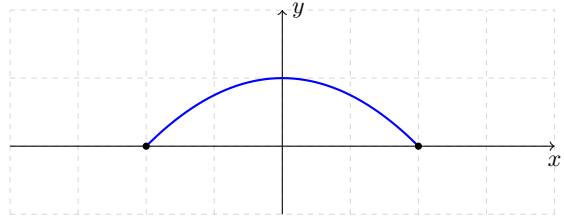
- e) L'équation $x^2 - 4y^2 = 4$ est équivalente à $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2 = 1$. C'est une hyperbole et elle est constituée de deux branches disjointes symétriques l'une de l'autre. La branche contenant $(2, 0)$ correspond aux valeurs de $x \geq 2$. Posons alors $\frac{x(t)}{2} = \text{Ch } t$ et $y(t) = \text{Sh } t$, $t \in \mathbb{R}$. L'équation paramétrique cherchée est donc



$$z(t) = 2 \text{Ch } t + i \text{Sh } t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- f) L'arc de la parabole d'équation $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ avec $-2 \leq x \leq 2$ est paramétré par

$$z(t) = t + i \left(1 - \frac{1}{4}t^2 \right), \quad -2 \leq t \leq 2.$$



Exercice 3.3

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

- a) $\int_C e^z dz$ où C est le chemin le plus court reliant $i\pi$ à $2i\pi$.
- b) $\int_C \operatorname{Re} z dz$ où C est l'arc de la parabole $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$ de $1+i$ à $3+3i$.
- c) $\int_C \cos(2z) dz$ où C est le demi cercle $|z| = \pi, x \geq 0$ de $-i\pi$ vers $i\pi$.
- d) $\int_C \operatorname{Re}(z^2) dz$ où C est le carré de sommets $0, 1, 1+i$ et i orienté positivement.
- e) $\int_C ze^{z^2} dz$ où C est le chemin reliant 1 à i le long des axes.
- f) $\int_C \operatorname{Im}(z^2) dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1$ et i orienté positivement.
- g) $\int_C \left(\frac{5}{z-2i} - \frac{6}{(z-2i)^2} \right) dz$ où C est le cercle $|z-2i| = 4$ orienté positivement.

Solution.

On rappelle que si D un domaine (connexe ouvert) non vide dans $\mathbb{C}$ et C une courbe paramétrée par un chemin

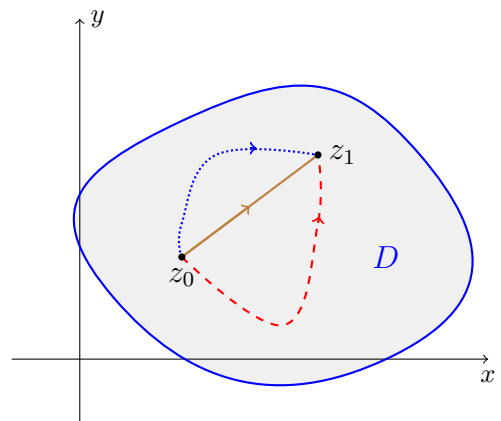
$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow D \\ t &\mapsto \gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue en tout point de C , alors

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) dz(t) = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Ainsi, si f est holomorphe dans D et si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D , alors pour toute courbe C dans D de point initial z_0 et de point final z_1 , l'intégrale $\int_C f(z) dz$ est indépendante du chemin suivi pour aller de z_0 à z_1 . De plus, si $F'(z) = f(z)$, alors

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = [F(z)]_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).$$



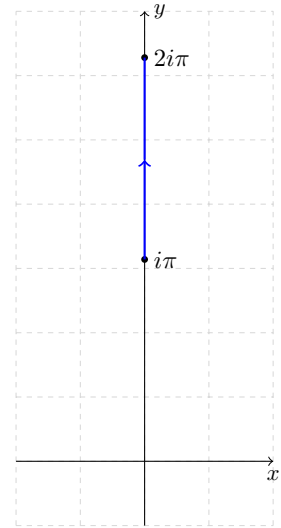
- a) Le plus court chemin joignant $i\pi$ et $2i\pi$ est le segment de droite allant de $i\pi$ à $2i\pi$ dont l'équation paramétrique est

$$z(t) = i\pi(1-t) + 2i\pi t = i\pi t + i\pi, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Les points $i\pi$ et $2i\pi$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 1$.

L'intégrale curviligne considérée vaut donc

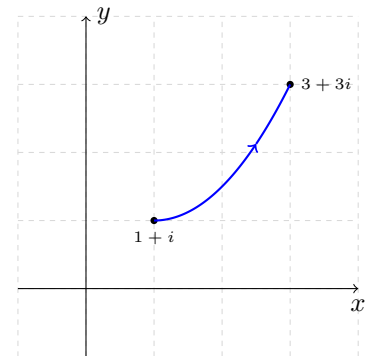
$$\begin{aligned} \int_C e^z dz &= \int_{t=0}^{t=1} e^{i\pi t + i\pi} d(i\pi t + i\pi) \\ &= \int_0^1 e^{i\pi t + i\pi} i\pi dt = [e^{i\pi t + i\pi}]_{t=0}^{t=1} = e^{2i\pi} - e^{i\pi} = 2. \end{aligned}$$



Autre méthode. La fonction e^z est holomorphe dans $\mathbb{C}$ alors $\int_C e^z dz$ est indépendant du chemin suivi pour aller de $i\pi$ à $2i\pi$ et on a $\int_C e^z dz = \int_{i\pi}^{2i\pi} e^z dz = [e^z]_{z_0}^{z_1} = e^{2i\pi} - e^{i\pi} = 2$.

- b) L'arc de la parabole $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$ de $1+i$ à $3+3i$ est paramétré par

$$\begin{aligned} z(t) &= t + i \left(1 + \frac{1}{2}(t-1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}it^2 + (1-i)t + \frac{3}{2}i, \quad 1 \leq t \leq 3. \end{aligned}$$



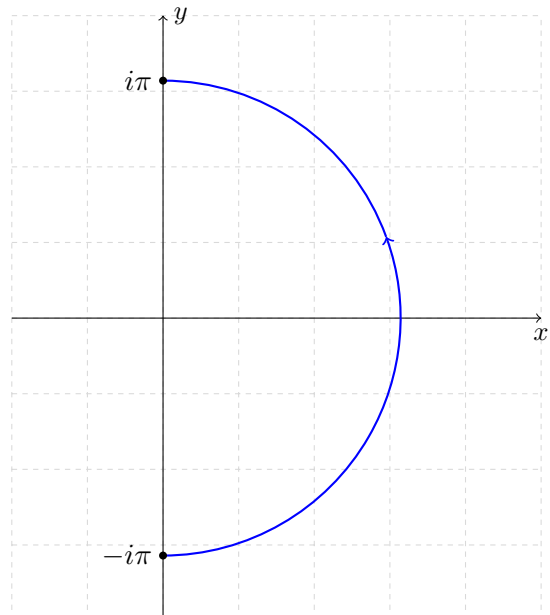
On a $dz = (it + 1 - i) dt$ et donc l'intégrale donnée vaut

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{t=1}^{t=3} t(it + 1 - i) dt = \left[\frac{1}{3}it^3 + \frac{1}{2}(1-i)t^2 \right]_{t=1}^{t=3} = 4 + \frac{14}{3}i.$$

- c) Le demi cercle $|z| = \pi, x \geq 0$ de $-i\pi$ vers $i\pi$ est paramétré par $z(t) = \pi e^{i\pi t}, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_C \cos(2z) dz &= \int_{t=-\frac{1}{2}}^{t=\frac{1}{2}} \cos(2\pi e^{i\pi t}) d(\pi e^{i\pi t}) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} i\pi^2 \cos(2\pi e^{i\pi t}) e^{i\pi t} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin(2\pi e^{i\pi t}) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \sin(2i\pi) \\ &= i \operatorname{Sh}(2\pi) \simeq 267.74i. \end{aligned}$$

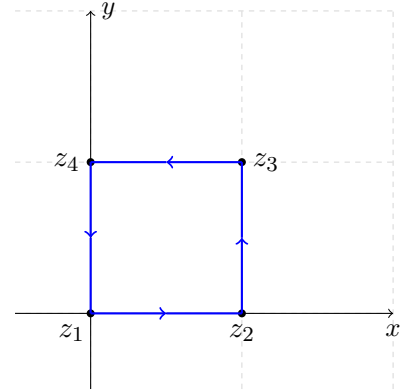


Autre méthode. La fonction $\cos(2z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ alors $\int_C \cos(2z) dz$ est indépendant du chemin suivi pour aller de $-i\pi$ à $i\pi$ et on a

$$\begin{aligned} \int_C \cos(2z) dz &= \int_{-i\pi}^{i\pi} \cos(2z) dz = \left[\frac{1}{2} \sin(2z) \right]_{-i\pi}^{i\pi} \\ &= \frac{1}{2} \sin(2i\pi) - \frac{1}{2} \sin(-2i\pi) = \sin(2i\pi) = i \operatorname{Sh}(2\pi). \end{aligned}$$

d) Posons $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1 + i$ et $z_4 = i$. Les équations paramétriques des segments de droites $[z_1 z_2], [z_2 z_3], [z_3 z_4]$ et $[z_4 z_1]$ sont, respectivement,

$$\begin{aligned} z &= t, z = 1 + it, z = 1 - t + i \\ \text{et } z &= (1 - t)i \text{ avec } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$



Ainsi

$$\operatorname{Re}(z^2) = t^2, \operatorname{Re}(z^2) = 1 - t^2, \operatorname{Re}(z^2) = t^2 - 2t \text{ et } \operatorname{Re}(z^2) = -(1 - t)^2 \text{ avec } t \in [0, 1].$$

L'intégrale donnée vaut

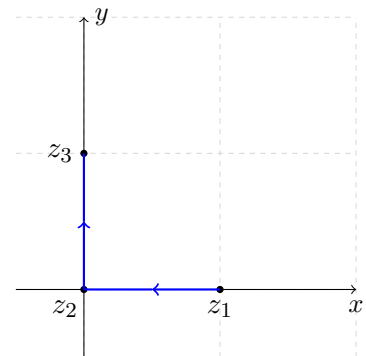
$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Re}(z^2) dz &= \int_{[z_1 z_2]} \operatorname{Re}(z^2) dz + \int_{[z_2 z_3]} \operatorname{Re}(z^2) dz + \int_{[z_3 z_4]} \operatorname{Re}(z^2) dz + \int_{[z_4 z_1]} \operatorname{Re}(z^2) dz \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1 - t^2) i dt + \int_0^1 (t^2 - 2t) (-dt) + \int_0^1 -(1 - t)^2 (-idt) \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[i \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \right]_0^1 + \left[\left(t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \right]_0^1 + \left[-\frac{i}{3} (1 - t)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{2}{3} + \frac{i}{3} = 1 + i. \end{aligned}$$

e) Posons $z_1 = 1, z_2 = 0$ et $z_3 = i$. Les équations paramétriques des segments de droites $[z_1 z_2]$ et $[z_2 z_3]$ sont, respectivement,

$$z = 1 - t \text{ et } z = it \text{ avec } t \in [0, 1].$$

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_C z e^{z^2} dz &= \int_{[z_1 z_2]} z e^{z^2} dz + \int_{[z_2 z_3]} z e^{z^2} dz \\ &= \int_0^1 (1 - t) e^{(1-t)^2} (-dt) + \int_0^1 it e^{-t^2} i dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{(1-t)^2} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^1 = \frac{1 - e}{2} + \frac{e^{-1} - 1}{2} = \frac{e^{-1} - e}{2} = -\operatorname{Sh} 1 \simeq -1.1752. \end{aligned}$$



Autre méthode. La fonction ze^{z^2} est holomorphe dans $\mathbb{C}$ alors $\int_C ze^{z^2} dz$ est indépendant du chemin suivi pour aller de 1 à i et on a

$$\int_C ze^{z^2} dz = \int_1^i ze^{z^2} dz = \left[\frac{1}{2} e^{z^2} \right]_1^i = \frac{e^{-1} - e}{2} = -\operatorname{Sh} 1 \simeq -1.1752.$$

f) Posons $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ et $z_3 = i$. Les équations paramétriques des segments de droites $[z_1 z_2]$, $[z_2 z_3]$ et $[z_3 z_1]$ sont, respectivement,

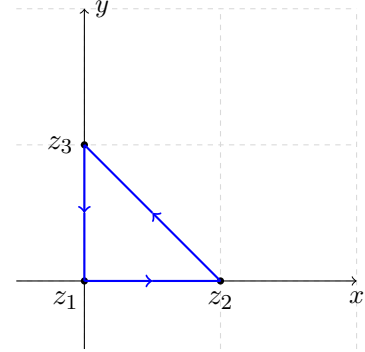
$$z = t, z = 1 - t + it \text{ et } z = (1 - t)i \text{ avec } t \in [0, 1].$$

Ainsi

$$\operatorname{Im}(z^2) = 0, \operatorname{Im}(z^2) = 2t - 2t^2 \text{ et } \operatorname{Im}(z^2) = 0 \text{ avec } t \in [0, 1].$$

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Im}(z^2) dz &= \int_{[z_1 z_2]} \operatorname{Im}(z^2) dz + \int_{[z_2 z_3]} \operatorname{Im}(z^2) dz + \int_{[z_3 z_1]} \operatorname{Im}(z^2) dz \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 (2t - 2t^2)(i - 1) dt + \int_0^1 0(-idt) \\ &= \left[(i - 1) \left(t^2 - \frac{2}{3} t^3 \right) \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} i. \end{aligned}$$

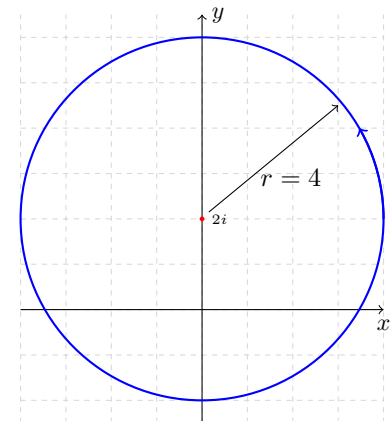


g) Le cercle $|z - 2i| = 4$ est paramétré par

$$z(t) = 2i + 4e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_C \left(\frac{5}{z - 2i} - \frac{6}{(z - 2i)^2} \right) dz &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left(\frac{5}{4e^{it}} - \frac{6}{(4e^{it})^2} \right) 4ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(5i - \frac{3i}{2} e^{-it} \right) dt \\ &= \left[5it + \frac{3}{2} e^{-it} \right]_0^{2\pi} = 10i\pi. \end{aligned}$$



Exercice 3.4

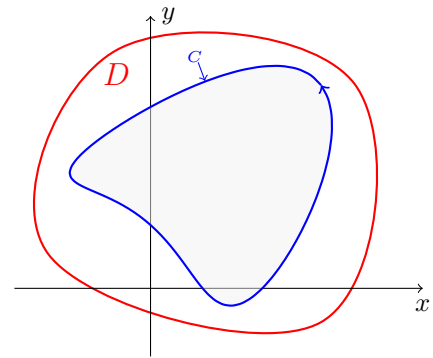
Calculer l'intégrale $\int_{|z|=R} f(z) dz$ dans chacun des cas suivants.

- a) $f(z) = e^{z^2}$, b) $f(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right)$, c) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$,
d) $f(z) = \operatorname{Im} z$, e) $f(z) = \frac{1}{|z|^2}$, f) $f(z) = \frac{1}{4z - 3}$.

Solution.

Nous rappelons que si f une fonction **holomorphe** dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée contenue ainsi que son intérieure dans D , alors

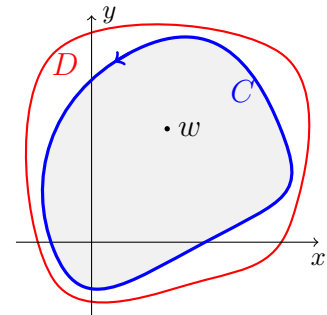
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$



Ce théorème fondamental est souvent appelé **théorème de Cauchy**.

Nous rappelons ainsi que si f une fonction **holomorphe** dans $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée **simple** contenue ainsi que son intérieure dans D , et si w est un point intérieur à C , alors

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - w} dz,$$



où la courbe C est décrite dans le sens direct.

De même la n -ième dérivée de f en w est donnée par

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les deux formules précédentes sont appelées **formules intégrales de Cauchy** et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C .

Nous rappelons aussi le **théorème de l'argument**, qui est une conséquence des formules intégrales de Cauchy.

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C . On a alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

où N et P désignent respectivement le nombre de zéros comptés avec multiplicité et le nombre de pôles comptés avec leur ordre, de f intérieurs à C .

Sachant que un point z_0 en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un **point singulier** ou une singularité de f . Si l'on peut trouver un entier positif n tel que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0,$$

alors z_0 est appelé un **pôle d'ordre** n . Si $n = 1$, z_0 est appelé un **pôle simple**.

a) La fonction $f(z) = e^{z^2}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et le cercle $|z| = R$ est une courbe fermée, alors $\int_{|z|=R} f(z) dz = 0$ pour tout $R > 0$.

b) On a $f(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{4}z\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}z\right)} = -4 \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{4}z\right)\right)'}{\cos\left(\frac{1}{4}z\right)}$. On applique le théorème de l'argument pour la fonction $g(z) = \cos\left(\frac{1}{4}z\right)$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Il n'a donc aucune singularité mais il a des zéros en $z_k = 2(1 + 2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\int_{|z|=R} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right) dz = -4 \int_{|z|=R} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = (-4) 2\pi i N = -8\pi i N,$$

où N est le nombre des z_k intérieurs à $|z| = R$. Il est facile de vérifier que $N = \left\lfloor \frac{R}{2\pi} \right\rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Donc

$$\int_{|z|=R} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right) dz = \begin{cases} -8\pi i \left\lfloor \frac{R}{2\pi} \right\rfloor & \text{si } \frac{R}{2\pi} \notin \mathbb{N} \\ \text{n'est pas définie} & \text{si } \frac{R}{2\pi} \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

c) On a $f(z) = \frac{1}{z}$. Le cercle $|z| = R$ est paramétré par

$$z(t) = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

L'intégrale donnée vaut

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{z} dz = \int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{1}{Re^{-it}} Rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{i2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{i2t} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i4\pi} - 1}{2} = 0.$$

d) On a $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ donc $f(z) = \operatorname{Im} z = R \sin t$. L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_{|z|=R} \operatorname{Im} z dz &= \int_{t=0}^{t=2\pi} R \sin(t) R i e^{it} dt = R^2 \int_0^{2\pi} (i \sin t \cos t - \sin^2 t) dt \\ &= R^2 \left[\frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}i \cos(2t) \right]_0^{2\pi} = -\pi R^2. \end{aligned}$$

e) Si $z(t) = Re^{it}$ on a $f(z) = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{R^2}$. L'intégrale donnée vaut

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{|z|^2} dz = \int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{1}{R^2} R i e^{it} dt = \frac{1}{R} \int_{t=0}^{t=2\pi} i e^{it} dt = \frac{1}{R} [e^{it}]_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi} - 1}{R} = 0.$$

f) On a $f(z) = \frac{1}{4z-3} = \frac{1}{4(z-\frac{3}{4})}$. Si $R = \frac{3}{4}$ l'intégrale donnée n'est pas définie.

Si $R < \frac{3}{4}$, la fonction $f(z) = \frac{1}{4z-3}$ est holomorphe sur $|z| = R$ et dans son intérieure. Donc d'après le théorème de Cauchy $\int_{|z|=R} \frac{1}{4z-3} dz = 0$.

Si $R > \frac{3}{4}$, l'application de la formule de Cauchy pour $w = \frac{3}{4}$ donne

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{4z-3} dz = \int_{|z|=R} \frac{1}{4(z-\frac{3}{4})} dz = \frac{1}{4} 2\pi i = \frac{\pi}{2} i.$$

Exercice 3.5

Évaluer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

a) $\int_C \operatorname{Log}(1-z) dz$ où C est le parallélogramme de sommets $-1-i$, $-i$, $1+i$ et i .

b) $\int_C \coth\left(\frac{1}{2}z\right) dz$ où C est le cercle $\left|z - \frac{\pi}{2}i\right| = 1$

c) $\int_C \frac{\sin z}{z+2iz} dz$ où C est le cercle $|z-4-2i| = \frac{11}{2}$.

d) $\int_C \frac{1}{z-3i} dz$ où C est le cercle $|z| = \pi$.

e) $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 2 \text{ ou } |z|^- = 1\}$.

f) $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 1 \text{ ou } |z|^- = 3\}$.

g) $\int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4-16} dz$ où C est le carré de sommets $-i$, 1 , i et -1 .

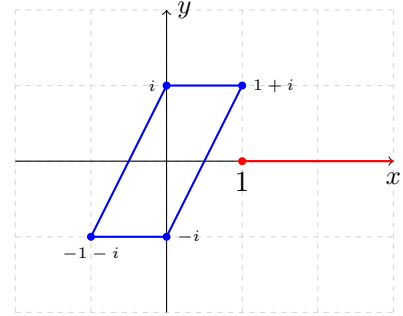
h) $\int_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz$ où C est le cercle $|z-2| = 4$.

Solution.

Pour résoudre cet exercice, voir le rappel de l'exercice 3.4.

a) La fonction $z \mapsto \operatorname{Log} z$ est holomorphe sur tout domaine D qui n'intersecte pas la demi-droite réelle $y = 0$ avec $x \leq 0$, c'est-à-dire $D \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-) = \phi$. Donc la fonction $z \mapsto \operatorname{Log}(1 - z)$ est holomorphe sur tout domaine D qui n'intersecte pas la demi-droite $y = 0$ avec $x \geq 1$.

On remarque que le parallélogramme C de sommets $-1 - i$, $-i$, $1 + i$ et i n'intersecte pas la demi-droite $y = 0$ avec $x \geq 1$, alors la fonction $z \mapsto \operatorname{Log}(1 - z)$ est holomorphe sur C et à l'intérieur de C . Donc d'après le théorème de Cauchy (voir le rappel de l'exercice 3.4) on a $\int_C \operatorname{Log}(1 - z) dz = 0$. Ce résultat peut aussi être établi directement à partir de la définition de l'intégrale



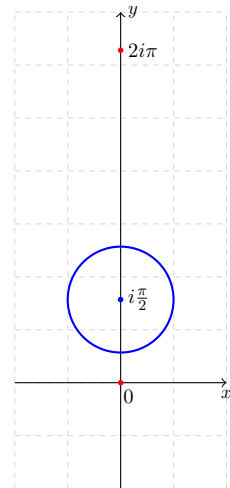
b) On a

$$\coth\left(\frac{1}{2}z\right) = \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

qui est holomorphe sur tout domaine qui ne contient aucun des points $z_k = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On remarque que le disque $|z - \frac{\pi}{2}i| \leq 1$ ne contient aucun des points $z_k = 2ik\pi$. Alors d'après le théorème de Cauchy on a

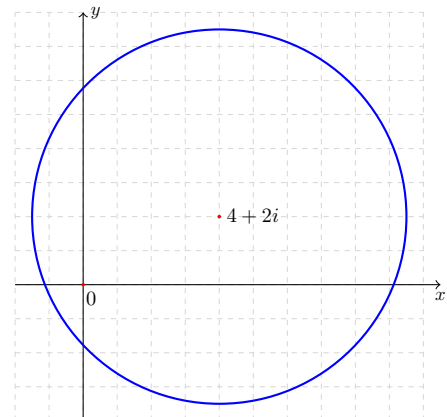
$$\int_C \coth\left(\frac{1}{2}z\right) dz = 0.$$



c) Le dénominateur de $\frac{\sin z}{z + 2iz}$ s'annule en $z_0 = 0$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z - 4 - 2i| = \frac{11}{2}$.

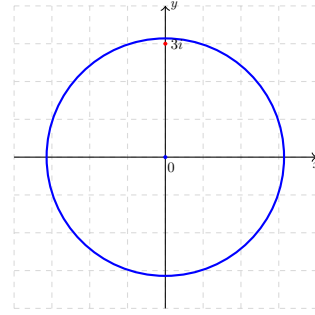
Donc d'après la formule intégrale de Cauchy (voir le rappel de l'exercice 3.4) on a

$$\int_C \frac{\sin z}{z + 2iz} dz = 2i\pi \frac{\sin 0}{1 + 2i} = 0.$$



d) On a $z_0 = 3i$ est à l'intérieur du cercle $|z| = \pi$. Donc d'après la formule intégrale de Cauchy

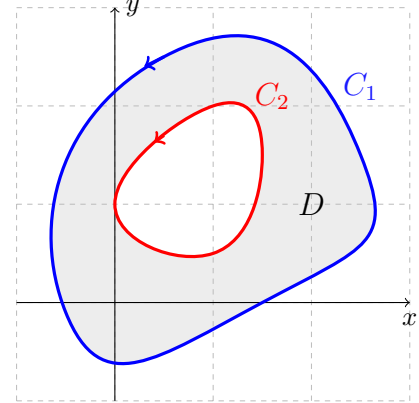
$$\int_C \frac{1}{z - 3i} dz = 2i\pi \times 1 = 2i\pi.$$



e) On rappelle que si f une fonction **holomorphe** dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées simples C_1 et C_2 et sur ces courbes, alors

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

où C_1 et C_2 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.

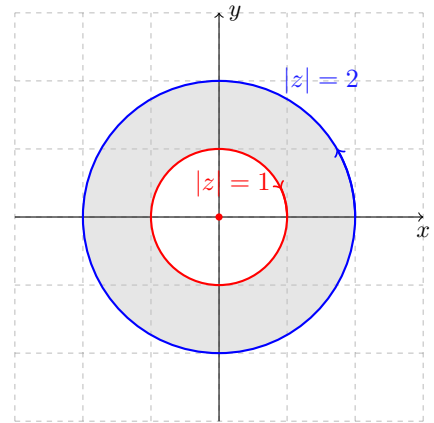


La fonction $z \mapsto \frac{e^z}{z}$ est holomorphe dans le domaine limité par les cercles $|z|^+ = 2$ ou $|z|^+ = 1$ et sur ces cercles. Alors d'après le résultat précédent on a

$$\int_{|z|^+=2} \frac{e^z}{z} dz = \int_{|z|^+=1} \frac{e^z}{z} dz \quad \text{ou bien} \quad \int_{|z|^+=2} \frac{e^z}{z} dz + \int_{|z|^-=1} \frac{e^z}{z} dz = 0,$$

ou encore

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz = 0.$$



f) On procède avec une méthode légèrement différente de la précédente en e). On a $z_0 = 0$ est à l'intérieur des cercles $|z| = 1$ et $|z| = 3$. Donc d'après la formule intégrale de Cauchy

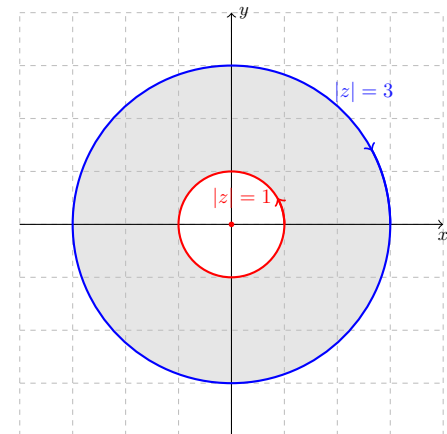
$$\int_{|z|^+=1} \frac{\cos z}{z} dz = 2i\pi \times \cos 0 = 2i\pi$$

et $\int_{|z|^+=3} \frac{\cos z}{z} dz = 2i\pi \times \cos 0 = 2i\pi$. Alors

$$\int_{|z|^+=1} \frac{\cos z}{z} dz - \int_{|z|^+=3} \frac{\cos z}{z} dz = 2i\pi - 2i\pi = 0.$$

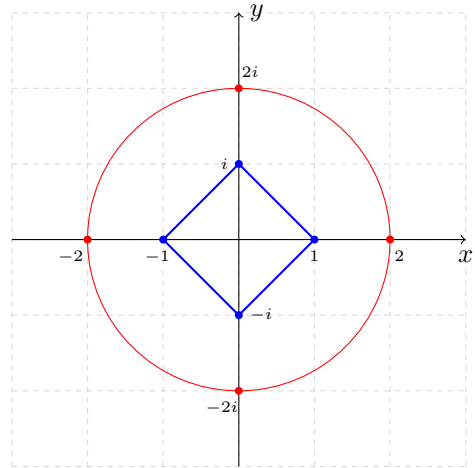
D'où

$$\int_{|z|^+=1} \frac{\cos z}{z} dz + \int_{|z|^-=3} \frac{\cos z}{z} dz = 0 \quad \text{ou} \quad \int_C \frac{\cos z}{z} dz = 0.$$



g) La fonction $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}$ a des singularités en $z_k = (1 + 2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$, qui sont à l'extérieur de C . Les quatre racines de $z^4 - 16 = 0$ sont sur le cercle $|z| = 2$, qui sont aussi à l'extérieur de C . La fonction $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4 - 16}$ est alors holomorphe sur C et à l'intérieur de C . Donc d'après le théorème de Cauchy on a

$$\int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4 - 16} dz = 0.$$

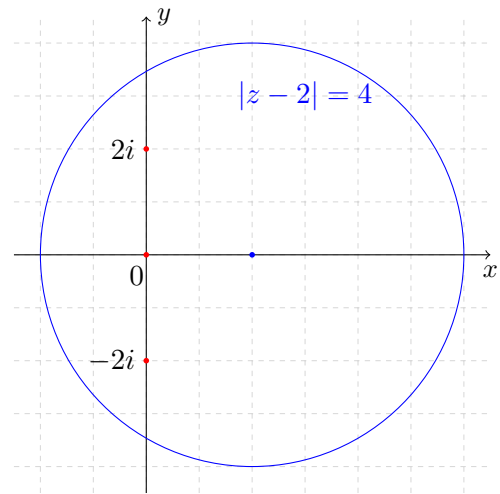


h) La fonction $\frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2}$ se décompose en fractions simples comme

$$\frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} = \frac{1}{z - 2i} + \frac{1}{z + 2i} + \frac{1}{z^2}.$$

Les points $z_0 = 0, z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i$ sont à l'intérieur de C , alors d'après les formules intégrales de Cauchy

$$\int_C \frac{1}{z - 2i} dz = 2i\pi, \quad \int_C \frac{1}{z + 2i} dz = 2i\pi \quad \text{et} \quad \int_C \frac{1}{z^2} dz = 0.$$



D'où

$$\int_C \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} dz = \int_C \frac{1}{z - 2i} dz + \int_C \frac{1}{z + 2i} dz + \int_C \frac{1}{z^2} dz = 4i\pi.$$

Exercice 3.6

Calculer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

- $\int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz$ où C est l'ellipse de l'équation $4x^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- $\int_C \frac{z}{z^2 + 4z + 3} dz$ où C est le cercle $|z + 1| = 2$.
- $\int_C \frac{z + 2}{z - 2} dz$ où C est le cercle $|z - 1| = 2$.
- $\int_C \frac{\operatorname{Ch}(z^2 - \pi i)}{z - \pi i} dz$ où C est le carré de sommets $2, 2 + 4i, -2 + 4i$ et -2 .
- $\int_C \frac{\operatorname{tg} z}{z - i} dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1 + 2i$ et $-1 + 2i$.
- $\int_C \frac{\operatorname{Log}(z + 1)}{z^2 + 1} dz$ où C est le cercle $|z - i| = \frac{7}{5}$.

Solution.

a) La fonction $\frac{1}{z^2 + 4}$ se décompose en fractions simples comme

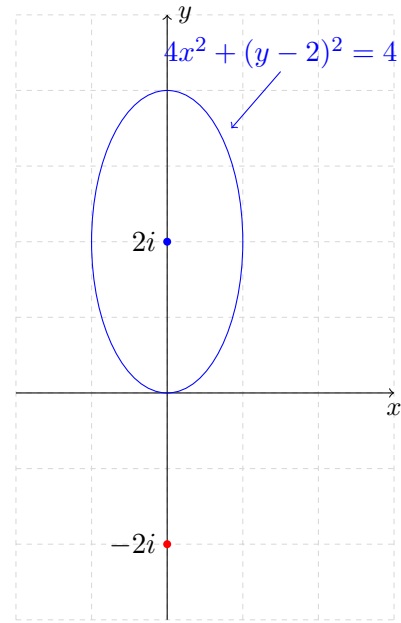
$$\frac{1}{z^2 + 4} = \frac{\frac{i}{4}}{z + 2i} - \frac{\frac{i}{4}}{z - 2i}.$$

Le point $z_1 = 2i$ est à l'intérieur de l'ellipse C mais $z_2 = -2i$ est à l'extérieur de C , alors d'après la formule intégrale et le théorème de Cauchy

$$\int_C \frac{\frac{i}{4}}{z - 2i} dz = 2i\pi \frac{i}{4} = \frac{-\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_C \frac{\frac{i}{4}}{z + 2i} dz = 0.$$

D'où

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz = \int_C \frac{\frac{i}{4}}{z + 2i} dz - \int_C \frac{\frac{i}{4}}{z - 2i} dz = 0 - \frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



b) La fonction $\frac{z}{z^2 + 4z + 3}$ se décompose en fractions simples comme

$$\frac{z}{z^2 + 4z + 3} = \frac{3}{2(z + 3)} - \frac{1}{2(z + 1)}.$$

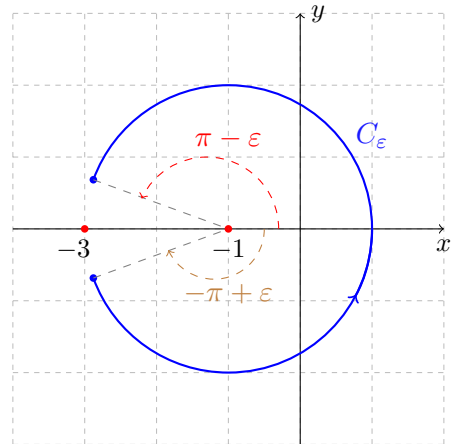
Le point $z_1 = -1$ est à l'intérieur du cercle C , alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\int_C \frac{1}{2(z + 1)} dz = 2i\pi \frac{1}{2} = i\pi.$$

Cependant, $z_2 = -3$ est sur le cercle C , et donc $\int_C \frac{3}{2(z+3)} dz$ est une intégrale impropre. On pourrait essayer de donner un sens à cette intégrale en considérant l'arc C_ε partant de $-\pi + \varepsilon$ vers $\pi - \varepsilon$, et en prenant une limite lorsque ε tend vers 0. L'arc C_ε est paramétré par

$$z(t) = -1 + 2e^{it}, \quad -\pi + \varepsilon \leq t \leq \pi - \varepsilon.$$

On a $dz = 2ie^{it} dt$ et



$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} \frac{3}{2(z + 3)} dz &= \int_{-\pi + \varepsilon}^{\pi - \varepsilon} \frac{3}{2(-1 + 2e^{it} + 3)} 2ie^{it} dt = \left[\frac{3}{2} \operatorname{Log}(1 + e^{it}) \right]_{-\pi + \varepsilon}^{\pi - \varepsilon} \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{Log}(1 + e^{i(\pi - \varepsilon)}) - \frac{3}{2} \operatorname{Log}(1 + e^{i(-\pi + \varepsilon)}) \\ &= \frac{3}{2} i \operatorname{Arg}(1 + e^{i(\pi - \varepsilon)}) - \frac{3}{2} i \operatorname{Arg}(1 + e^{i(-\pi + \varepsilon)}) \quad \text{car } |1 + e^{i(\pi - \varepsilon)}| = |1 + e^{i(-\pi + \varepsilon)}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}i \operatorname{Arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) - \frac{3}{2}i \operatorname{Arctg} \left(\frac{-\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \\
&= 3i \operatorname{Arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \\
&= 3i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad \text{car } \frac{\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right).
\end{aligned}$$

Alors

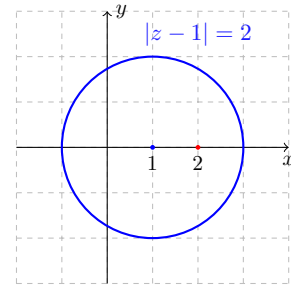
$$\int_C \frac{3}{2(z+3)} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{3}{2(z+3)} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{3}{2}i\pi.$$

D'où

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 4z + 3} dz = \int_C \frac{3}{2(z+3)} dz - \int_C \frac{1}{2(z+1)} dz = \frac{3}{2}i\pi - i\pi = i\frac{\pi}{2}.$$

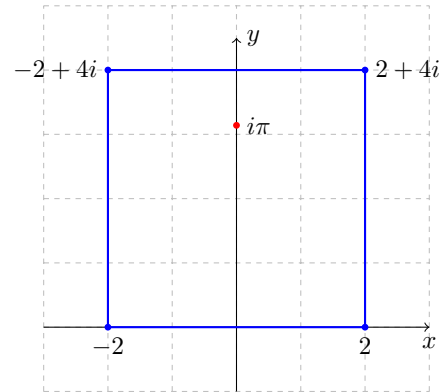
c) Le point $z_0 = 2$ est à l'intérieur du cercle $|z - 1| = 2$,
alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\int_C \frac{z+2}{z-2} dz = 2i\pi \left[z+2 \right]_{z=2} = 2i\pi \times 4 = 8i\pi.$$



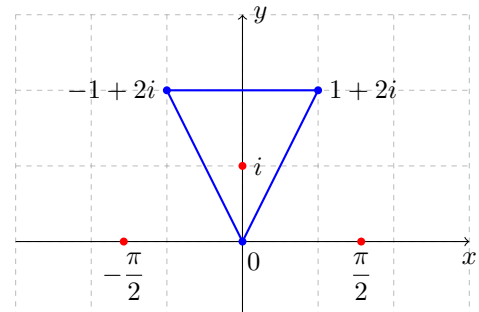
d) Le point $z_0 = \pi i$ est à l'intérieur du carré de sommets $2, 2+4i, -2+4i$ et -2 , alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\operatorname{Ch}(z^2 - \pi i)}{z - \pi i} dz &= 2i\pi \left[\operatorname{Ch}(z^2 - \pi i) \right]_{z=\pi i} \\
&= 2i\pi \times \operatorname{Ch}(-\pi^2 - \pi i) \\
&= 2i\pi \operatorname{Ch}(\pi^2).
\end{aligned}$$



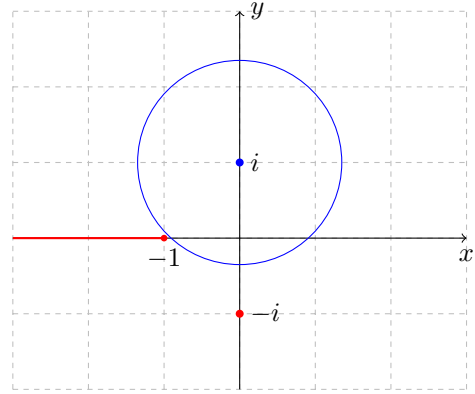
e) Les points singuliers $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont à l'extérieur du triangle C de sommets $0, 1+2i$ et $-1+2i$. Cependant, le point $z_0 = i$ est à l'intérieur du triangle C , alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\operatorname{tg} z}{z-i} dz &= 2i\pi \left[\operatorname{tg} z \right]_{z=i} = 2i\pi \times \operatorname{tg} i \\
&= 2i\pi \times i \operatorname{th} 1 = -2\pi \operatorname{th} 1.
\end{aligned}$$



f) La fonction $z \mapsto \operatorname{Log}(z+1)$ est holomorphe sur tout domaine D qui n'intersecte pas la demi-droite $y=0$ avec $x \leq -1$.

On remarque que le cercle $C : |z - i| = \frac{7}{5}$ n'intersecte pas la demi-droite $y = 0$ avec $x \leq -1$, alors la fonction $z \mapsto \text{Log}(z + 1)$ est holomorphe sur C et à l'intérieur de C . Les racines de $z^2 + 1 = 0$ sont $z_1 = -i$ et $z_2 = i$. Seule $z_2 = i$ qui est à l'intérieur du cercle C , alors d'après la formule intégrale de Cauchy



$$\begin{aligned} \int_C \frac{\text{Log}(z+1)}{z^2+1} dz &= \int_C \frac{\frac{\text{Log}(z+1)}{z+i}}{z-i} dz = 2i\pi \left[\frac{\text{Log}(z+1)}{z+i} \right]_{z=i} = 2i\pi \times \frac{\text{Log}(1+i)}{2i} \\ &= \pi \left(\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \ln 2 + i \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Résidus et applications

4.1 Exercices

Exercice 4.1

Déterminer les singularités des fonctions suivantes en précisant leurs nature.

$$\textbf{a)} \ f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \textbf{b)} \ f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \textbf{c)} \ f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Exercice 4.2

Donner la série de Laurent de la fonction f au point z_0 ainsi que $\text{Res}(f, z_0)$ dans chacun des cas suivants :

$$\textbf{a)} \ f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, z_0 = 0, \quad \textbf{b)} \ f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}, z_0 = 1 \quad \textbf{c)} \ f(z) = z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right), z_0 = 0.$$

Exercice 4.3

Calculer le résidu des fonctions suivantes relativement à leurs pôles :

$$\begin{aligned} \textbf{a)} \ f(z) &= \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}, & \textbf{b)} \ f(z) &= \frac{z^2}{(z-3)^3}, & \textbf{c)} \ f(z) &= \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{3}z^2}, \\ \textbf{d)} \ f(z) &= \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)}. \end{aligned}$$

Exercice 4.4

En appliquant le théorème des résidus calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4} \frac{dz}{(z^2 - 1)^2 (z - 3)^2}, & \text{b)} \int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz, n \in \mathbb{N}^*, & \text{c)} \int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \\ \text{d)} \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}, & \text{e)} \int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2 (z^2 + 1)}, & \text{f)} \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz. \end{array}$$

Exercice 4.5

Calculer les intégrales suivantes ($-1 < a < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$).

$$\text{a)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta, \quad \text{b)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta, \quad \text{c)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \theta)^n}{5 + 4 \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

Exercice 4.6

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, & \text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}, & \text{c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2ix - 1 - a^2)^3}, a > 0, \\ \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx, & \text{e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx, & \text{f)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx, a > 0. \end{array}$$

Exercice 4.7

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 5} dx, & \text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^2} dx, & \text{c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx, \\ \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx, & \text{e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin(2x)}{x^2 + 2x + 2} dx, & \text{f)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx, a > 0. \end{array}$$

Exercice 4.8

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx, a > 0 & \text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx, a > 0, b > 0, \\ \text{c)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \right) \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \operatorname{Re} b > 0. & \text{d)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \end{array}$$

4.2 Solutions

Exercice 4.1

Déterminer les singularités des fonctions suivantes en précisant leurs nature.

$$\text{a) } f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{b) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \text{c) } f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Solution.

On rappelle qu'un point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un **point singulier** ou une **singularité** de f .

On rappelle aussi qu'un point $z = z_0$ est appelé **singularité isolée**, ou point singulier isolé de f , si l'on peut déterminer $\delta > 0$ tel que le disque $|z - z_0| \leq \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0 . Si l'on ne peut trouver une telle valeur δ , on dit que z_0 est une **singularité non isolée**.

Il existe des types variés de singularités.

- **Singularités apparentes** : Le point singulier z_0 est appelé singularité **apparente** de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
- **Pôles** : Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, alors z_0 est appelé un **pôle d'ordre n** . Si $n = 1$, z_0 est appelé un **pôle simple**.
- **Points de branchement** : Soit z_0 un point singulier isolé de f . Le point z_0 est un **point de branchement** lorsque l'image par f d'au moins d'une courbe fermée entourant z_0 est une courbe non fermée.
- **Singularités essentielles** : Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée **singularité essentielle**.

Séries de Laurent

Une série des puissances de la forme

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \cdots \end{aligned} \quad (4.1)$$

s'appelle **série de Laurent** centrée au point $z_0 \in \mathbb{C}$.

La série des puissances négatives $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ s'appelle la **partie principale**.

La série des puissances positives $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ s'appelle la **partie régulière ou analytique**.

Classification des singularités

Il est possible de classer les singularités **isolées** d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent.

- **Pôles** : Si f à la forme (4.1) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = z_0$ est appelé un **pôle d'ordre n** .

- **Singularités apparentes** : Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = z_0$ mais si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, alors $z = z_0$ est appelée une **singularité apparente**. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = z_0$ comme étant égal à $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

- **Singularités essentielles** : Si $z = z_0$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une **infinité de terme**.

a) La fonction $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ n'est pas définie pour $z_0 = 0$, donc ce point est une singularité de f . De même, puisque $z = 0$ est une singularité de $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sin z}{z}$, $z_1 = \infty$ est une singularité de $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

La série de Laurent de f centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \frac{1}{7!z^6} + \frac{1}{9!z^8} - \cdots.$$

Le point $z_0 = 0$ est une singularité essentielle car la partie principale de la série de Laurent possède une infinité de terme.

Le point $z_1 = \infty$ est une singularité apparente car $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

b) La fonction $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ possède une singularité apparente en $z_0 = 0$ car

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Le point $z_1 = \infty$ est une singularité essentielle car la série de Laurent de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ centrée au point $z_0 = 0$,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{4!z^3} + \dots$$

possède une infinité de terme dans sa partie principale.

c) La série de Laurent de f centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \frac{1}{5!z^3} + \dots$$

Cette série possède une infinité de terme dans sa partie principale. Donc $z_0 = 0$ est une singularité essentielle.

Le point $z_1 = \infty$ est un pôle double car la série de Laurent de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ centrée au point $z_0 = 0$,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \dots$$

possède deux termes dans sa partie principale.

Exercice 4.2

Donner la série de Laurent de la fonction f au point z_0 ainsi que $\text{Res}(f, z_0)$ dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, z_0 = 0, \quad \text{b) } f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}, z_0 = 1 \quad \text{c) } f(z) = z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right), z_0 = 0.$$

Solution.

Pour un rappel sur les singularités et les séries de Laurent voir l'exercice précédent 4.1.

Concernant le résidu d'une fonction f en un point z_0 , on rappelle que si f une fonction holomorphe et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C , **excepté** au point $z = z_0$ centre de C . Alors f possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$, donné par

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = & a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \\ & + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Dans le cas particulier $n = -1$ on a $\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$.

Le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de z_0 s'appelle le **résidu** de f au point z_0 et se note

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

- Si $z = z_0$ est un **pôle simple** le calcul du résidu est particulièrement simple

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

- Si $z = z_0$ est un pôle simple et $f(z)$ se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0 \text{ et } Q'(z_0) \neq 0,$$

alors nous avons

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (4.4)$$

- Dans le cas où $z = z_0$ est un **pôle d'ordre** $m \geq 2$, le résidu a_{-1} est donné par la formule

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

a) La série de Laurent de $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots,$$

qui converge pour toute valeur de $z \neq 0$. Le point $z_0 = 0$ est un pôle simple et le résidu en $z_0 = 0$ est $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = 1$.

b) Posons $u = \frac{1-z}{2}$. La série de Laurent de $f(z) = \frac{2z}{z^2-1}$ centrée au point $z_0 = 1$ est

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z}{z^2-1} = \frac{2(1-2u)}{(1-2u)^2-1} = \left(1 - \frac{1}{2u}\right) \frac{1}{1-u} = \left(1 - \frac{1}{2u}\right) \sum_{n \geq 0} u^n \\ &= \sum_{n \geq 0} u^n - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} u^{n-1} = \sum_{n \geq 0} u^n - \frac{1}{2u} - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} u^n = -\frac{1}{2u} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} u^n \\ &= \frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n. \end{aligned}$$

Cette série converge pour toute valeur de z dans $0 < |z-1| < 2$. Le point $z_0 = 1$ est un pôle simple et $\text{Res}(f, 1) = a_{-1} = 1$.

c) La série de Laurent de $f(z) = z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ centrée au point $z_0 = 0$ est

$$\begin{aligned} f(z) &= z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^6}{(2n)! z^{2n}} \\ &= z^6 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8! z^2} - \frac{1}{10! z^4} + \dots, \end{aligned}$$

qui converge pour toute valeur de $z \neq 0$. Comme cette série possède une infinité de terme dans sa partie principale, alors le point $z_0 = 0$ est une singularité essentielle et le résidu en $z_0 = 0$ est $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = 0$.

Exercice 4.3

Calculer le résidu des fonctions suivantes relativement à leurs pôles :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}, & \text{b) } f(z) &= \frac{z^2}{(z-3)^3}, & \text{c) } f(z) &= \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{3} z^2}, \\ \text{d) } f(z) &= \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)}. \end{aligned}$$

Solution.

Pour un rappel sur le calcul des résidus voir l'exercice précédent 4.2.

a) La fonction $f(z)$ possède un pôle double en $z_0 = -1$ et un pôle simple en $z_1 = 2$.

Le résidu en $z_0 = -1$ est

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left((z+1)^2 \cdot \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} \right) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z-3}{(z-2)^2} e^z = \frac{-4}{9e}.$$

Le résidu en $z_1 = 2$ est

$$\text{Res}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} \left((z-2) \cdot \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} \right) = \frac{e^2}{(2+1)^2} = \frac{e^2}{9}.$$

b) La fonction $f(z)$ possède un pôle triple en $z_0 = 3$ dont le résidu est

$$\text{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-3)^3 \cdot \frac{z^2}{(z-3)^3} \right) = 1.$$

c) La fonction $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2(z - \frac{\pi}{3})}$ possède un pôle simple en $z_0 = \frac{\pi}{3}$ dont le résidu est

$$\text{Res}\left(f, \frac{\pi}{3}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\left(z - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\sin z^2}{z^2(z - \frac{\pi}{3})} \right) = \frac{9}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{9}.$$

d) Comme $1 - \cos(2z) = 2 \sin^2 z$ alors la fonction $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)}$ possède des pôles doubles en $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. La singularité en $z_0 = 0$ est apparente car $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)} = \frac{1}{4}$.

Le résidu en $z_k = k\pi$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, k\pi) &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z - k\pi)^2 (e^z - 1 - z)}{2 \sin^2 z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \left(\frac{(2(z - k\pi)(e^z - 1 - z) + (z - k\pi)^2 (e^z - 1)) \sin z - 2(z - k\pi)^2 (e^z - 1 - z) \cos z}{2 \sin^3 z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \left(\frac{(z - k\pi)^2 (e^z - 1)}{2 \sin^2 z} + \frac{\sin z - (z - k\pi) \cos z}{\sin^2 z} (e^z - 1 - z) \frac{(z - k\pi)}{\sin z} \right). \end{aligned}$$

En posant $z - k\pi = u$ ou $z = u + k\pi$, cette limite peut être écrite sous la forme

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u^2 (e^{u+k\pi} - 1)}{2 \sin^2 u} + \frac{\sin u - u \cos u}{\sin^2 u} (e^{u+k\pi} - 1 - u - k\pi) \frac{u}{\sin u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 (e^{u+k\pi} - 1)}{2 \sin^2 u} = \frac{e^{k\pi} - 1}{2}.$$

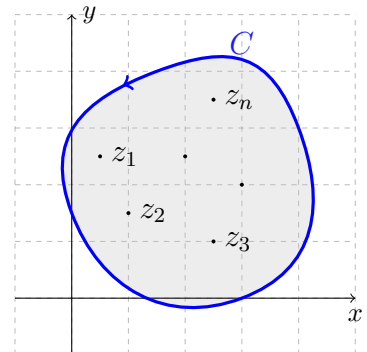
Exercice 4.4

En appliquant le théorème des résidus calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_{|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4} \frac{dz}{(z^2 - 1)^2 (z - 3)^2}, & \text{b)} \quad & \int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz, n \in \mathbb{N}^*, & \text{c)} \quad & \int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \\ \text{d)} \quad & \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}, & \text{e)} \quad & \int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2 (z^2 + 1)}, & \text{f)} \quad & \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz. \end{aligned}$$

Solution.

On rappelle que si f une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en un nombre fini de singularités $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ intérieures à C . Alors le **théorème des résidus** établit que l'intégrale de f le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de f en les singularités contenues dans C , i.e.



$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

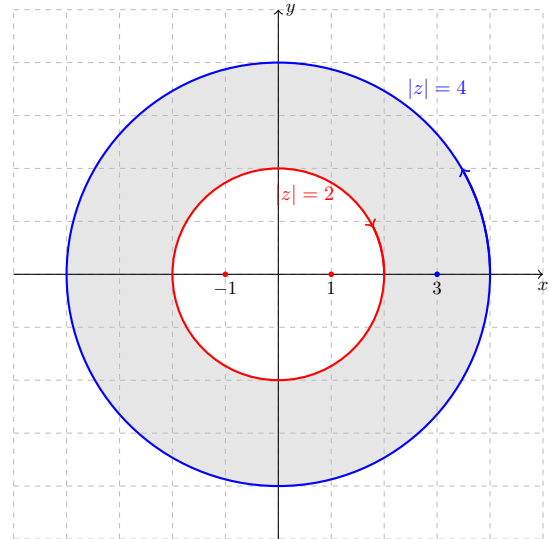
a) La fonction à intégrer $\frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ possède trois pôles doubles en $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = 3$ [racines de $(z^2-1)^2(z-3)^2$]. Le seul pôle intérieur à $|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4$ est $z_3 = 3$.

Le résidu en $z_3 = 3$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 3) &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} \left((z-3)^2 \cdot \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{-4z}{(z^2-1)^3} = -\frac{3}{128}. \end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\int_{|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = 2\pi i \text{Res}(f, 3) = -\frac{3\pi i}{64}.$$



b) La fonction à intégrer $\frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$ possède deux pôles simples en $z_1 = -i\pi$ et $z_2 = i\pi$ [racines de $z^2 + \pi^2$].

Le résidu en $z_1 = -i\pi$ est

$$\text{Res}(f, -i\pi) = \lim_{z \rightarrow -i\pi} \left((z + i\pi) \cdot \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} \right) = \lim_{z \rightarrow -i\pi} \frac{e^z}{z - i\pi} = \frac{e^{-i\pi}}{-i\pi - i\pi} = \frac{1}{2i\pi}.$$

Le résidu en $z_2 = i\pi$ est

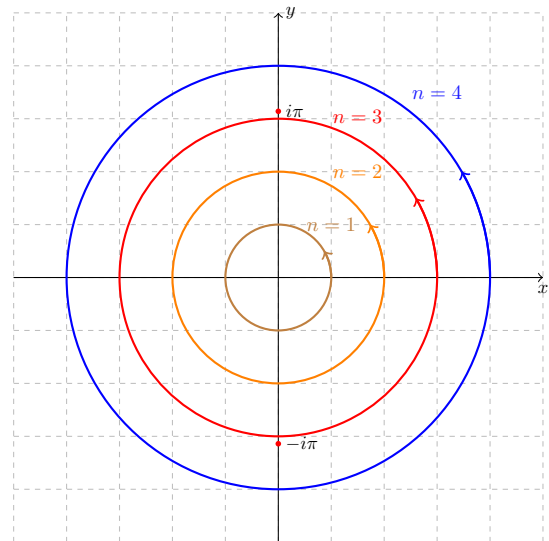
$$\text{Res}(f, i\pi) = \lim_{z \rightarrow i\pi} \left((z - i\pi) \cdot \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^z}{z + i\pi} = \frac{e^{i\pi}}{i\pi + i\pi} = \frac{-1}{2i\pi}.$$

On distingue deux cas :

- Le premier cas $n = 1, 2$ ou 3 . Dans ce cas, aucun pôle n'est à l'intérieur du cercle $|z| = n$ et donc par le théorème de Cauchy

$$\int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz = 0.$$

- Le deuxième cas $n \geq 4$. Dans ce cas, les deux pôles $z_1 = -i\pi$ et $z_2 = i\pi$ sont à l'intérieur du cercle $|z| = n$ et donc par le théorème des résidus



$$\int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, -i\pi) + \text{Res}(f, i\pi)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i\pi} + \frac{-1}{2i\pi} \right) = 0.$$

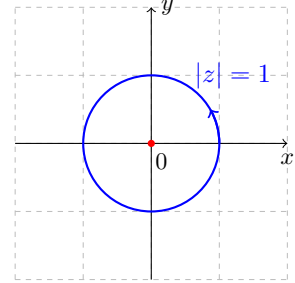
c) La fonction à intégrer $z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ possède une singularité essentielle en $z_0 = 0$. En effet, sa série de Laurent centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^2}{(2n+1)! z^{2n+1}} = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \frac{1}{7!z^5} + \frac{1}{9!z^7} - \dots,$$

qui converge pour toute valeur de $z \neq 0$. Comme cette série possède une infinité de terme dans sa partie principale, alors le point $z_0 = 0$ est une singularité essentielle et $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Le point $z_0 = 0$ est à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ et donc par le théorème des résidus

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}.$$



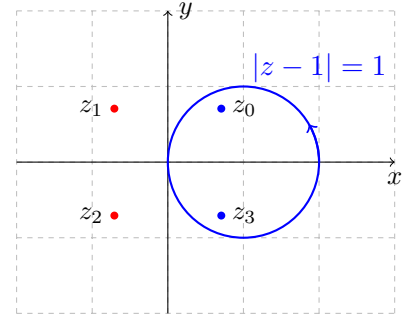
d) La fonction $\frac{1}{z^4 + 1}$ possède quatre pôles simples en $z_k = e^{i\frac{(1+2k)\pi}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$ [racines de $z^4 + 1$]. Les pôles à l'intérieur du cercle $|z - 1| = 1$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

D'après la formule (4.4) du rappel de l'exercice 4.2, les résidus en z_0 et z_3 sont respectivement,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i \quad \text{et} \quad \text{Res}(f, z_3) = \frac{1}{4z_3^3} = \frac{e^{-i\frac{21\pi}{4}}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}i.$$

On a alors par le théorème des résidus

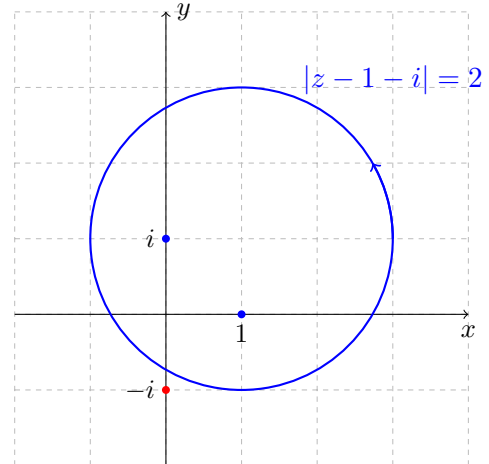
$$\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_3)) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$



e) La fonction à intégrer $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ possède un pôle double $z_1 = 1$ et deux pôles simples $z_2 = i, z_3 = -i$. Les pôles à l'intérieur du cercle $|z - 1 - i| = 2$ sont $z_1 = 1$ et $z_2 = i$.

Le résidu en $z_1 = 1$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left((z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Le résidu en $z_2 = i$ est

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left((z - i) \cdot \frac{1}{(z - 1)^2 (z^2 + 1)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z - 1)^2 (z + i)} = \frac{1}{4}.$$

D'après le théorème des résidus on a

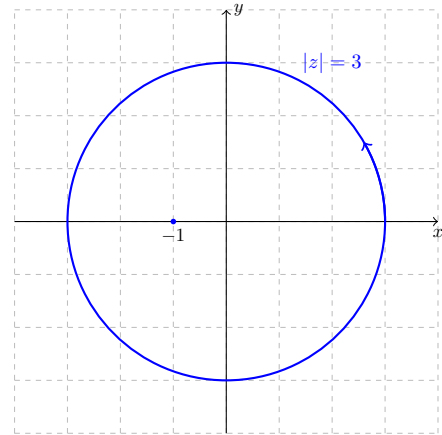
$$\int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2 (z^2+1)} = 2\pi i (\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, i)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{i\pi}{2}.$$

f) La fonction $\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ possède un pôle d'ordre quatre en $z_0 = -1$, qui est à l'intérieur du cercle $|z| = 3$. Le résidu en $z_0 = -1$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left((z+1)^4 \cdot \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{8e^{2z}}{6} = \frac{4}{3e^2}. \end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = 2\pi i \text{Res}(f, -1) = \frac{8\pi}{3e^2} i.$$



Exercice 4.5

Calculer les intégrales suivantes ($-1 < a < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$).

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta, \quad \text{b) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta, \quad \text{c) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \theta)^n}{5 + 4 \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

Solution.

a) Pour calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta$ on va appliquer la méthode qui consiste à poser $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $dz = iz d\theta$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2}{13 + 12 \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{-i(z^2 + 1)^2}{4z^2(6z^2 + 13z + 6)} dz$$

Les singularités de $f(z) = \frac{-i(z^2 + 1)^2}{4z^2(6z^2 + 13z + 6)}$ sont un pôle double $z_1 = 0$ et deux pôles simples $z_2 = -\frac{2}{3}, z_3 = -\frac{3}{2}$. Les pôles à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ sont $z_1 = 0$ et $z_2 = -\frac{2}{3}$.

Le résidu en $z_1 = 0$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \cdot \frac{-i(z^2 + 1)^2}{4z^2(6z^2 + 13z + 6)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-i(12z^5 + 39z^4 + 24z^3 + 26z^2 + 12z - 13)}{4(6z^2 + 13z + 6)^2} = \frac{13}{144}i. \end{aligned}$$

Le résidu en $z_2 = -\frac{2}{3}$ est

$$\text{Res}\left(f, -\frac{2}{3}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{-i(z^2 + 1)^2}{4z^2 \frac{d}{dz}(6z^2 + 13z + 6)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{-i(z^2 + 1)^2}{4z^2(12z + 13)} = -\frac{169}{720}i.$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\int_{|z|=1} \frac{-i(z^2 + 1)^2}{4z^2(6z^2 + 13z + 6)} dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f, 0) + \text{Res}\left(f, -\frac{2}{3}\right) \right) = 2\pi i \left(\frac{13}{144}i - \frac{169}{720}i \right) = \frac{13}{45}\pi.$$

D'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta = \frac{13}{45}\pi.$$

b) Si $a = 0$ l'intégrale vaut $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) d\theta = \left[\frac{-1}{n} \cos(n\theta) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

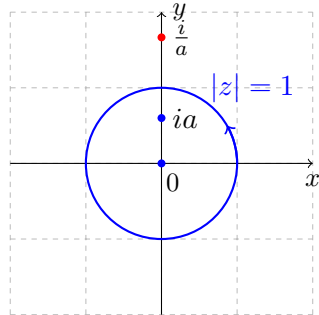
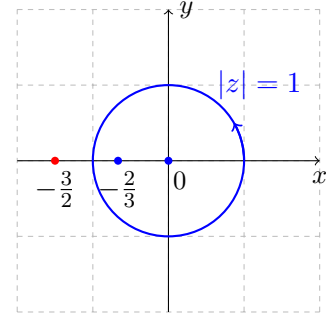
Supposons $a \neq 0$. Posons $z = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi]$. On a $z^n = e^{in\theta}$ et $z^{-n} = e^{-in\theta}$. D'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}$, $dz = izd\theta$ et alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^n - z^{-n}}{2i}}{1 - 2a \frac{z - z^{-1}}{2i} + a^2} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})} dz.$$

Les singularités de $f(z) = \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})}$ sont un pôle $z_1 = 0$ qui est d'ordre n et deux pôles simples $z_2 = ia, z_3 = \frac{i}{a}$. Comme $-1 < a < 1$, on a que les pôles $z_1 = 0$ et $z_2 = ia$ qui sont à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Le résidu en $z_2 = ia$ est

$$\text{Res}(f, ia) = \lim_{z \rightarrow ia} \left((z - ia) \cdot \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})} \right) = \lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia(z - \frac{i}{a})} \right) = \frac{1 - i^{2n}a^{2n}}{2i^n a^n (1 - a^2)}.$$



Pour le calcul du résidu en $z_1 = 0$ on remarque que

$$f(z) = \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})} = \frac{1}{2z^n ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})} - \frac{z^n}{2ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})}.$$

Alors $\text{Res}(f, 0) = \text{Res}\left(\frac{1}{2z^n ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})}, 0\right)$ car $\text{Res}\left(\frac{z^n}{2ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})}, 0\right) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(z^n \cdot \frac{1}{2z^n ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{2ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)! 2(a^2 - 1)} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{ia - z} - \frac{1}{\frac{i}{a} - z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)! 2(a^2 - 1)} \left(\frac{(n-1)!}{(ia - z)^n} - \frac{(n-1)!}{(\frac{i}{a} - z)^n} \right) \\ &= \frac{1}{2(a^2 - 1)} \left(\frac{1}{(ia)^n} - \frac{1}{(\frac{i}{a})^n} \right) = \frac{a^{2n} - 1}{2a^n(1 - a^2)i^n}. \end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia(z - ia)(z - \frac{i}{a})} dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, ia)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{a^{2n} - 1}{2a^n(1 - a^2)i^n} + \frac{1 - i^{2n}a^{2n}}{2i^n a^n(1 - a^2)} \right) \\ &= -i(i^n - i^{-n}) \pi \frac{a^n}{1 - a^2} = 2\pi \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \frac{a^n}{1 - a^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta = 2\pi \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \frac{a^n}{1 - a^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m \\ 2\pi (-1)^m \frac{a^{2m+1}}{1 - a^2} & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}.$$

c) Soit $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. On a $z^n = e^{in\theta}$ et $z^{-n} = e^{-in\theta}$. D'où $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$,

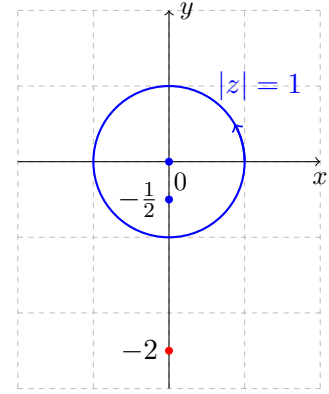
$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$, $dz = izd\theta$ et alors

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2\cos \theta)^n}{5 + 4\cos \theta} \cos(n\theta) d\theta &= \int_{|z|=1} \frac{(1 + z + z^{-1})^n}{5 + 2z + 2z^{-1}} \cdot \frac{z^n + z^{-n}}{2} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-i(z^2 + z + 1)^n (z^{2n} + 1)}{4z^{2n}(z + 2)(z + \frac{1}{2})} dz. \end{aligned}$$

La fonction $f(z) = \frac{-i(z^2+z+1)^n(z^{2n}+1)}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})}$ possède un pôle $z_1 = 0$ d'ordre $2n$ et deux pôles simples $z_2 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = -2$. Les pôles à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ sont $z_1 = 0$ et $z_2 = -\frac{1}{2}$.

Le résidu en $z_2 = -\frac{1}{2}$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{-i(z^2+z+1)^n(z^{2n}+1)}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{-i(z^2+z+1)^n(z^{2n}+1)}{4z^{2n}(z+2)} \right) = \frac{-i}{6} \left(3^n + \frac{3^n}{4^n} \right). \end{aligned}$$



Pour le calcul du résidu en $z_1 = 0$ on remarque que

$$f(z) = \frac{-i(z^2+z+1)^n(z^{2n}+1)}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})} = \frac{-i(z^2+z+1)^n}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})} + \frac{-i(z^2+z+1)^n}{4(z+2)(z+\frac{1}{2})}.$$

Alors $\text{Res}(f, 0) = \text{Res}\left(\frac{-i(z^2+z+1)^n}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})}, 0\right)$ car $\text{Res}\left(\frac{-i(z^2+z+1)^n}{4(z+2)(z+\frac{1}{2})}, 0\right) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(z^{2n} \cdot \frac{-i(z^2+z+1)^n}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{-i(z^2+z+1)^n}{4(z+2)(z+\frac{1}{2})} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{\frac{i}{6}(z^2+z+1)^n}{z+2} - \frac{\frac{i}{6}(z^2+z+1)^n}{z+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Calculons $\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{(z^2+z+1)^n}{z+2} \right)$ et $\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{(z^2+z+1)^n}{z+\frac{1}{2}} \right)$.

On a

$$\frac{(z^2+z+1)^n}{z+2} = \frac{((z+2)^2-3(z+2)+3)^n}{z+2} = (z+2)^{2n-1} + P_{2n-2}(z+2) + \frac{3^n}{z+2},$$

où $P_{2n-2}(z+2)$ est un polynôme de $z+2$ d'ordre $2n-2$ dont $\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} P_{2n-2} = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{(z^2+z+1)^n}{z+2} \right) &= \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} ((z+2)^{2n-1}) + 0 + \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{3^n}{z+2} \right) \\ &= (2n-1)! + 3^n \frac{(-1)^{2n-1} (2n-1)!}{(z+2)^{2n}} \\ &= (2n-1)! \left(1 - \frac{3^n}{(z+2)^{2n}} \right). \end{aligned}$$

De même on a

$$\frac{(z^2+z+1)^n}{z+\frac{1}{2}} = \frac{\left((z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right)^n}{z+\frac{1}{2}} = \left(z+\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + Q_{2n-2}\left(z+\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{z+\frac{1}{2}},$$

où $Q_{2n-2}(z + \frac{1}{2})$ est un polynôme de $z + \frac{1}{2}$ d'ordre $2n - 2$ dont $\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}Q_{2n-2} = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\left(\frac{(z^2 + z + 1)^n}{z + \frac{1}{2}}\right) &= \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\left(\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) + 0 + \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{z + \frac{1}{2}}\right) \\ &= (2n-1)! + \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)!}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n}} \\ &= (2n-1)! \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n}}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{i}{6}}{(2n-1)!} \left((2n-1)! \left(1 - \frac{3^n}{(z+2)^{2n}}\right) - (2n-1)! \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n}}\right) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i}{6} \left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n}} - \frac{3^n}{(z+2)^{2n}} \right) = \frac{i}{6} \left(3^n - \frac{3^n}{4^n} \right).\end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{-i(z^2 + z + 1)^n(z^{2n} + 1)}{4z^{2n}(z+2)\left(z + \frac{1}{2}\right)} dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -\frac{1}{2})) \\ &= 2\pi i \left(\frac{i}{6} \left(3^n - \frac{3^n}{4^n} \right) - \frac{i}{6} \left(3^n + \frac{3^n}{4^n} \right) \right) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \theta)^n}{5 + 4 \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Exercice 4.6

Calculer les intégrales suivantes :

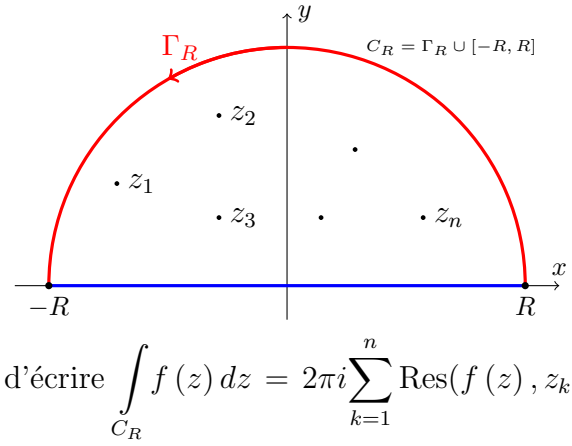
$$\begin{array}{lll}\text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, & \text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}, & \text{c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2ix - 1 - a^2)^3}, a > 0, \\ \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx, & \text{e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx, & \text{f)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx, a > 0.\end{array}$$

Solution.

Les intégrales de cet exercice sont de type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ où $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec P et Q sont des polynômes tels que $\deg Q \geq 2 + \deg P$, et aucun des zéros de Q n'étant réel.

Pour calculer ces intégrales on considère $\int_{C_R} f(z) dz$,

où C_R désigne le contour fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct. Avec R est pris suffisamment grand pour que C_R contienne tous les zéros z_k de Q tels que



$\text{Im } z_k > 0$. Alors le théorème des résidus permet d'écrire $\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k)$,

i.e.

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

Notons que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$. Ed effet, comme $\deg Q \geq 2 + \deg P$ il exist $M > 0$ telle que pour $z = R e^{i\theta}$ avec R suffisamment grand on a

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{R^2}.$$

Alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |f(z)| |dz| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{M}{R^2} R d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi M}{R} = 0.$$

Par conséquent, lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

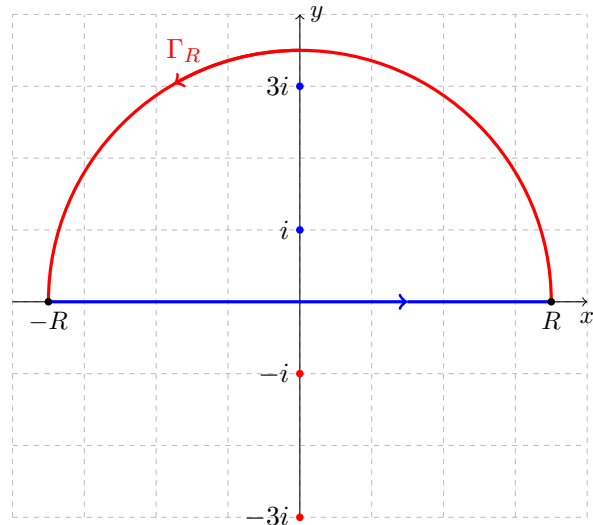
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

a) On considère $\int_{C_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz, R > 0$, où

C_R désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Puisque $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$ pour $z_1 = i, z_2 = 3i, z_3 = -i, z_4 = -3i$. Ces valeurs de z sont les pôles simples de $f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}$.

Seuls les pôles $z_1 = i$ et $z_2 = 3i$ sont à l'intérieur de C_R . Les résidus en ces pôles sont



$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2 - z + 2}{\frac{d}{dz}(z^4 + 10z^2 + 9)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i,$$

$$\operatorname{Res}(f, 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{z^2 - z + 2}{\frac{d}{dz}(z^4 + 10z^2 + 9)} \right) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right) = \frac{1}{16} - \frac{7}{48}i.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 3i)) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i + \frac{1}{16} - \frac{7}{48}i \right) = \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz = \frac{5\pi}{12}. \quad (4.5)$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (4.5) quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(Re^{i\theta})^2 - Re^{i\theta} + 2}{(Re^{i\theta})^4 + 10(Re^{i\theta})^2 + 9} Re^{i\theta} d\theta = 0,$$

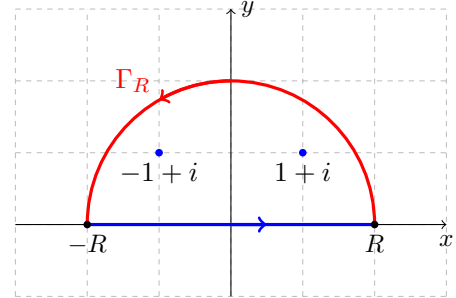
on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}.$$

b) Les pôles de $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz - 2}$ sont $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1 + i$. Ces pôles sont simples et situés à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

Le résidu en $z_1 = -1 + i$ est

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1 + i) &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \left(\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^2 - 2iz - 2)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \left(\frac{1}{2z - 2i} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Le résidu en $z_2 = 1 + i$ est

$$\operatorname{Res}(f, 1 + i) = \lim_{z \rightarrow 1+i} \left(\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^2 - 2iz - 2)} \right) = \lim_{z \rightarrow 1+i} \left(\frac{1}{2z - 2i} \right) = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\int_{C_R} \frac{1}{z^2 - 2iz - 2} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, -1 + i) + \operatorname{Res}(f, 1 + i)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{1}{x^2 - 2ix - 2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2 - 2iz - 2} dz = 0.$$

En prenant la limite de ces expressions quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

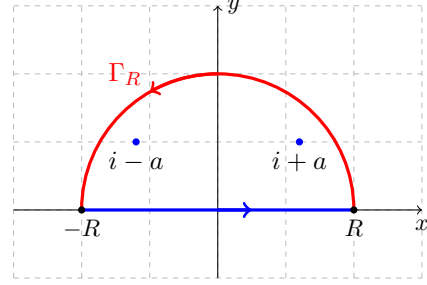
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2 - 2iz - 2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^2 - 2iRe^{i\theta} - 2} Rie^{i\theta} d\theta = 0,$$

nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2ix - 2} dx = 0.$$

c) La fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3}$ possède deux pôles triples en $z_1 = i - a$, $z_2 = i + a$. Les deux pôles sont à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

Le résidu en $z_1 = i - a$ est



$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i - a) &= \lim_{z \rightarrow i-a} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - (i - a))^3 \cdot \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i-a} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z - (i + a))^3} \right) = \lim_{z \rightarrow i-a} \frac{6}{(z - (i + a))^5} = -\frac{3}{16a^5}. \end{aligned}$$

Le résidu en $z_1 = i + a$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i + a) &= \lim_{z \rightarrow i+a} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - (i + a))^3 \cdot \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i+a} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z - (i - a))^3} \right) = \lim_{z \rightarrow i+a} \frac{6}{(z - (i - a))^5} = \frac{3}{16a^5}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i - a) + \text{Res}(f, i + a)) = 0.$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} dz = 0.$$

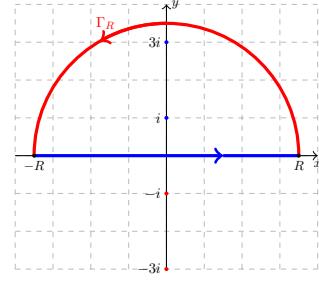
En prenant la limite de ces expressions quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1}{((Re^{i\theta})^3 - 2iRe^{i\theta} - 1 - a^2)^3} Rie^{i\theta} d\theta = 0,$$

nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2ix - 1 - a^2)^3} = 0.$$

d) La fonction $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ possède quatre pôles simples en $z_1 = i, z_2 = 3i, z_3 = -i, z_4 = -3i$. Seuls les pôles $z_1 = i$ et $z_2 = 3i$ sont à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.



Les résidus en ces pôles sont

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left((z - i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2}{(z+i)(z^2+9)} \right) = \frac{1}{16}i,$$

$$\text{Res}(f, 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left((z - 3i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} \right) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3i)} \right) = -\frac{3}{16}i.$$

D'où

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 3i)) = 2\pi i \left(\frac{1}{16}i - \frac{3}{16}i \right) = \frac{\pi}{4}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} dz = \frac{\pi}{4}. \quad (4.6)$$

Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(Re^{i\theta})^2}{((Re^{i\theta})^2+1)((Re^{i\theta})^2+9)} Re^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient

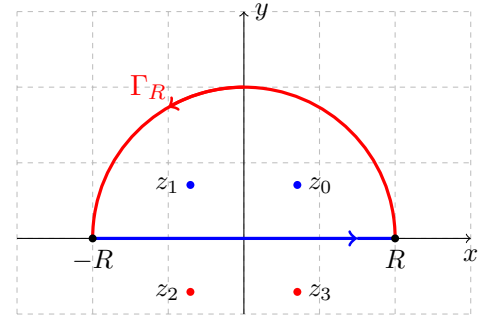
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{4}.$$

e) La fonction $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ possède quatre pôles simples en $z_k = e^{i\frac{(1+2k)\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$. Les pôles à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Les résidus en ces pôles sont

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2+1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2+1}{4z^3} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i,$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2+1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2+1}{4z^3} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i.$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}i \right) = \sqrt{2}\pi$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz = \sqrt{2}\pi.$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(R e^{i\theta})^2 + 1}{(R e^{i\theta})^4 + 1} R i e^{i\theta} d\theta = 0,$$

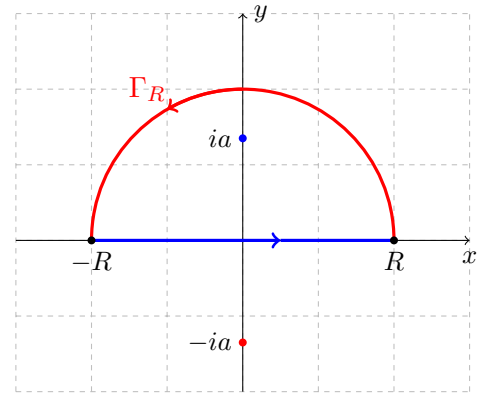
nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \sqrt{2}\pi.$$

f) La fonction $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3}$ possède deux pôles triples en $z_1 = -ia$ et $z_2 = ia$. Seul le pôle $z_2 = ia$ qui est à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

Le résidus en ce pôle est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - ia)^3 \cdot \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^2}{(z + ia)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z^2 - 4iaz - a^2}{(z + ia)^5} = -\frac{i}{16a^3}. \end{aligned}$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} dz = 2\pi i \text{Res}(f, ia) = 2\pi i \left(-\frac{i}{16a^3} \right) = \frac{\pi}{8a^3}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} dz = \frac{\pi}{8a^3}.$$

Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(R e^{i\theta})^2}{((R e^{i\theta})^2 + a^2)^3} R i e^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{\pi}{8a^3}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3}$ est paire, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{\pi}{16a^3}.$$

Exercice 4.7

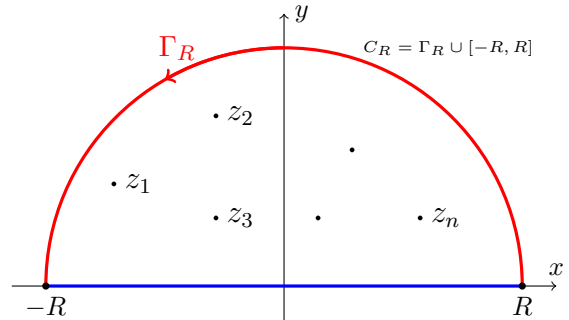
Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} dx, & \text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^2} dx, & \text{c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx, \\ \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx, & \text{e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin(2x)}{x^2+2x+2} dx, & \text{f)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx, a > 0. \end{array}$$

Solution.

Les intégrales de cet exercice reviennent à calculer les intégrales de type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$ avec $\alpha > 0$, où P et Q sont des polynômes avec $\deg Q \geq 1 + \deg P$, et aucun des zéros de Q n'étant réel.

Pour calculer cet intégrale, comme dans l'exercice précédent 4.6, on considère $\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz$, où C_R désigne le contour fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct. Avec R est pris suffisamment grand pour



que C_R contient tous les zéros z_k de Q tels que $\text{Im } z_k > 0$. D'après le théorème des résidus on obtient

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z), z_k).$$

Montrons que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0$. Comme $\deg Q \geq 1 + \deg P$, il exist $M > 0$ telle que

pour $z = R e^{i\theta}$ avec R suffisamment grand on a $\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{i\alpha R e^{i\theta}} \frac{P(R e^{i\theta})}{Q(R e^{i\theta})} R i e^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} e^{i\alpha R \cos \theta} \frac{P(R e^{i\theta})}{Q(R e^{i\theta})} R i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| e^{-\alpha R \sin \theta} e^{i\alpha R \cos \theta} \frac{P(R e^{i\theta})}{Q(R e^{i\theta})} R i e^{i\theta} \right| d\theta = \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} \left| \frac{P(R e^{i\theta})}{Q(R e^{i\theta})} \right| R d\theta \\ &\leq M \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

De plus, par l'étude de la fonction $\theta \mapsto \frac{2}{\pi}\theta - \sin \theta$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on voit que $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} \theta} d\theta = \left[\frac{-\pi}{2\alpha R} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}),$$

qui tend vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$ car $\alpha > 0$ ce qui démontre le résultat annoncé

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Par suite, lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

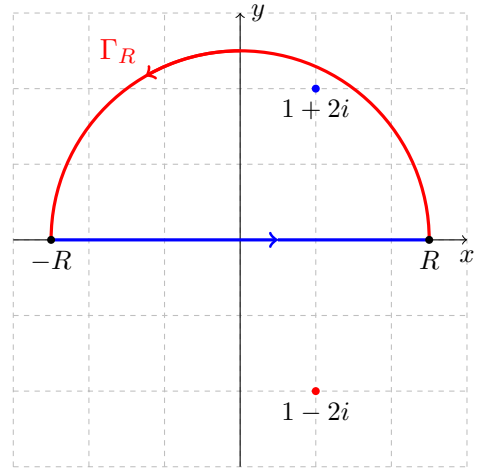
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z), z_k).$$

a) On considère $\int_{C_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5} dz$, $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

La fonction $f(z) = \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5}$ possède deux pôles simples en $z_1 = 1+2i$ et $z_2 = 1-2i$. Seul le pôle $z_1 = 1+2i$ qui est à l'intérieur du contour C_R .

Le résidus en ce pôle est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1+2i) &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{(z+1)e^{3iz}}{\frac{d}{dz}(z^2-2z+5)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{(z+1)e^{3iz}}{2z-2} = \frac{1-i}{2} e^{-6+3i}. \end{aligned}$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1+2i) = \pi(1+i)e^{-6+3i}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2-2x+5} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5} dz = -\pi e^{-6}(\sin 3 - \cos 3) + i\pi e^{-6}(\sin 3 + \cos 3).$$

Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(Re^{i\theta}+1)e^{3iR\cos\theta-3R\sin\theta}}{(Re^{i\theta})^2-2Re^{i\theta}+5} Rie^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient

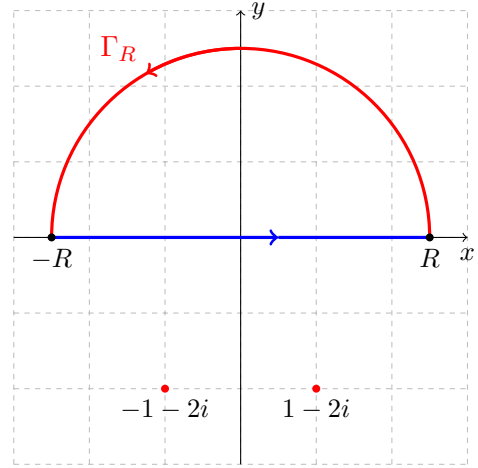
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2-2x+5} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2-2x+5} dx = \pi(1+i)e^{-6+3i}.$$

Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} dx = \overline{\pi(1+i)e^{-6+3i}} = \pi(1-i)e^{-6-3i}.$$

b) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4iz - 5)^2}$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède deux pôles doubles en $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$. Mais aucun de ces pôles n'est situé à l'intérieur du contour C_R . Alors

$$\int_{C_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2 - 2z + 5} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4iz - 5)^2} dz = 0.$$



Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^2} dx = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4iz - 5)^2} dz = 0,$$

c) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4}$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède quatre pôles simples en $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -i$ et $z_4 = -2i$. Seuls les pôles $z_1 = i$ et $z_2 = 2i$ sont à l'intérieur du contour C_R .

Les résidus en ces pôles sont

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 e^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^4 + 5z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 e^{iz}}{4z^3 + 10z} = -\frac{1}{6e},$$

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 e^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^4 + 5z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 e^{iz}}{4z^3 + 10z} = \frac{2}{3e^2}.$$

D'où

$$\int_{C_R} \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{6e} + \frac{2}{3e^2} \right).$$

i.e.

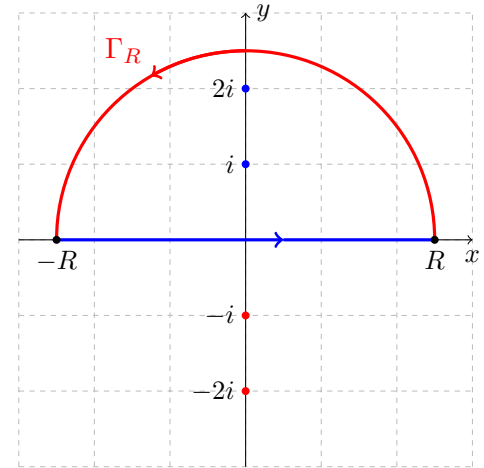
$$\int_{-R}^R \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{6e} + \frac{2}{3e^2} \right).$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} dz = 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = 2\pi i \left(-\frac{1}{6e} + \frac{2}{3e^2} \right) = \frac{4-e}{3e^2} \pi i.$$

Par conséquent,

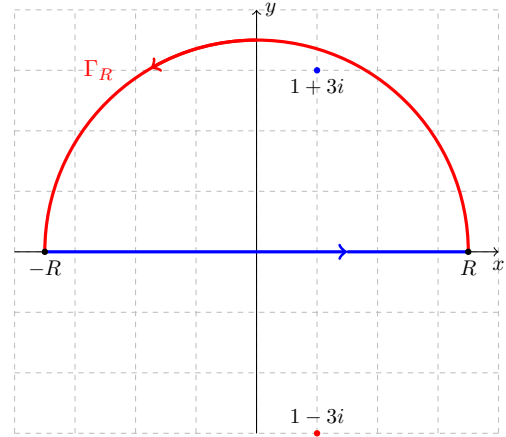
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \right) = \frac{4-e}{3e^2} \pi.$$



d) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède deux pôles simples en $z_1 = 1 + 3i$ et $z_2 = 1 - 3i$. Seul le pôle $z_1 = 1 + 3i$ qui est à l'intérieur du contour C_R .

Le résidu en ce pôle est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1 + 3i) &= \lim_{z \rightarrow 1+3i} \frac{ze^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^2 - 2z + 10)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+3i} \frac{ze^{iz}}{2z - 2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\right) e^{-3+i}. \end{aligned}$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1 + 3i) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\right) e^{-3+i} = \frac{\pi}{e^3} \left(\frac{1}{3} + i\right) e^i.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10} dz = \frac{\pi}{e^3} \left(\frac{1}{3} + i\right) e^i.$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10} dz = 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{\pi}{e^3} \left(\frac{1}{3} + i\right) e^i.$$

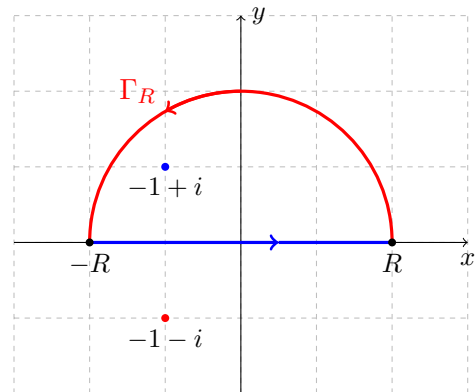
Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx \right) = \frac{\pi}{e^3} \left(\frac{1}{3} \cos 1 - \sin 1\right).$$

e) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2 + 2z + 2}$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède deux pôles simples en $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = -1 - i$. Seul le pôle $z_1 = -1 + i$ qui est à l'intérieur du contour C_R .

Le résidu en ce pôle est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1 + i) &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{(z+1)e^{2iz}}{\frac{d}{dz}(z^2 + 2z + 2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{(z+1)e^{2iz}}{2z + 2} = \frac{1}{2} e^{-2-2i}. \end{aligned}$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2 + 2z + 2} dz = 2\pi i \text{Res}(f, -1 + i) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{-2-2i} = \pi i e^{-2-2i}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{(x+1)e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2} dz = \pi i e^{-2-2i}.$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2} dz = 0$, on

obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx = \pi i e^{-2-2i} = \pi e^{-2} (\sin 2 + i \cos 2).$$

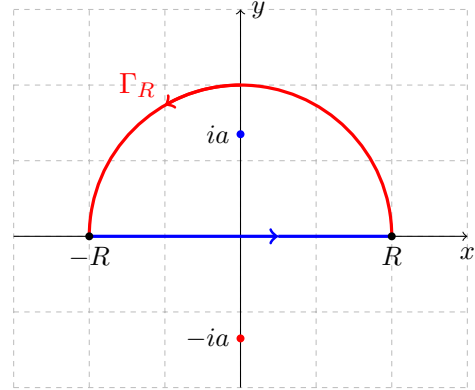
Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin(2x)}{x^2+2x+2} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx \right) = \pi e^{-2} \cos 2.$$

f) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$, $a > 0$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède deux pôles simples en $z_1 = ia$ et $z_2 = -ia$. Seul le pôle $z_1 = ia$ qui est à l'intérieur du contour C_R .

Le résidu en ce pôle est

$$\operatorname{Res}(f, ia) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^2+a^2)} = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{2z} = -i \frac{e^{-a}}{2a}.$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) = 2\pi i \cdot \left(-i \frac{e^{-a}}{2a} \right) = \frac{\pi}{ae^a}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = \frac{\pi}{ae^a}.$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx \right) = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Exercice 4.8

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx, a > 0 \quad \text{b)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx, a > 0, b > 0, \\ \text{c)} \quad & \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \right) \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \operatorname{Re} b > 0. \quad \text{d)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \end{aligned}$$

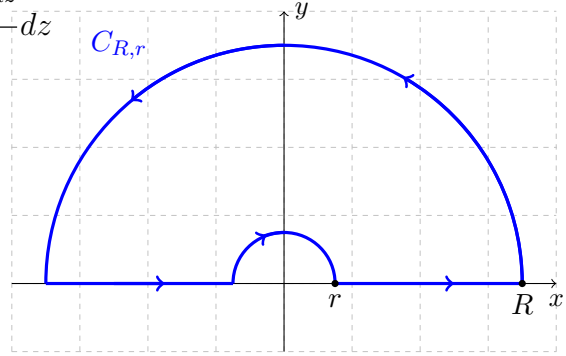
Solution.

Les intégrales de cet exercice reviennent à calculer les intégrales de type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$, $\alpha > 0$, où $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas des racines réelles et $\deg Q \geq \deg P$.

Pour calculer cet intégrale, on considère $\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$

où $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre,

$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons R et r . Donc, d'après le théorème des résidus on obtient



$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right). \end{aligned}$$

Notons que si on procède comme dans les rappels des exercices précédents, on vérifie que l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$.

Pour l'intégrale sur Γ_r on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} \frac{e^{i\alpha re^{it}}}{re^{it}} ire^{it} dt = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)}.$$

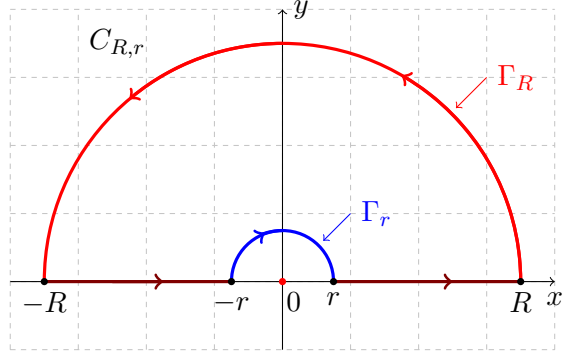
Donc si on fait tendre r vers zéro et R vers $+\infty$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)} + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right).$$

a) On considère $\int_{C_{R,r}} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz$ où $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre,

$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons R et r .

La seule singularité $z_0 = 0$ de $f(z) = \frac{1 - e^{iaz}}{z^2}$ étant à l'extérieur de $C_{R,r}$, on a donc



$$\int_{C_{R,r}} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz + \int_r^R \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \frac{2 - e^{iax} - e^{-iax}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = 0$$

ou encore

$$\int_r^R \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz. \quad (4.7)$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. La deuxième intégrale du second membre tend vers zéro car

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1 - e^{iaR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1 - e^{-aR(\sin \theta - i \cos \theta)}}{R e^{i\theta}} i d\theta = 0.$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans la première intégrale du deuxième membre de (4.7), on voit que sa limite est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz &= -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{1 - e^{iare^{i\theta}}}{r^2 e^{2i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{1 - e^{iare^{i\theta}}}{iare^{i\theta}} a d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - e^{iare^{i\theta}}}{iare^{i\theta}} a d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi a d\theta = \frac{\pi a}{2} \end{aligned}$$

par passage à la limite sous le symbole d'intégration.

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx = \frac{\pi a}{2}.$$

b) On considère $\int_{C_{R,r}} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz$ où $C_{R,r}$ est le contour de l'intégrale a) de cet exercice.

Comme dans l'intégrale a), la seule singularité $z_0 = 0$ de $f(z) = \frac{e^{2ibz} - e^{2iaz}}{z^2}$ étant à l'extérieur de $C_{R,r}$ et donc

$$\int_{C_{R,r}} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz = 0,$$

ou

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{2iax} - e^{2ibx}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz + \int_r^R \frac{e^{2iax} - e^{2ibx}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \frac{e^{2iax} + e^{-2iax} - (e^{2ibx} + e^{-2ibx})}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz = 0$$

ou encore

$$\int_r^R \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz.$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. La deuxième intégrale du second membre tend vers zéro car

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{2iaR(\cos\theta + i\sin\theta)} - e^{2ibR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2 e^{2i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{-2aR(\sin\theta - i\cos\theta)} - e^{-2bR(\sin\theta - i\cos\theta)}}{R e^{i\theta}} i d\theta = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans l'intégrale sur Γ_r , on voit que sa limite est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz &= -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{e^{2iare^{i\theta}} - e^{2ibre^{i\theta}}}{r^2 e^{2i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{e^{2iare^{i\theta}} - e^{2ibre^{i\theta}}}{r e^{i\theta}} i d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{2iare^{i\theta}} - e^{2ibre^{i\theta}}}{r e^{i\theta}} i d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (2ia - 2ib) i d\theta = \pi(b - a). \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx = \pi(b - a).$$

Autre méthode. En utilisant l'intégrale **a)**, on trouve

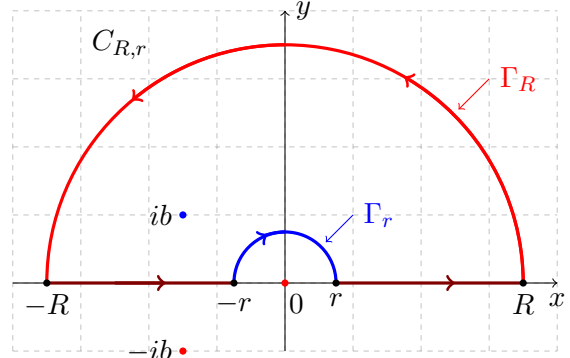
$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2bx) - (1 - \cos(2ax))}{x^2} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2bx)}{x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2ax)}{x^2} dx \\
 &= \frac{\pi(2b)}{2} - \frac{\pi(2a)}{2} = \pi(b - a).
 \end{aligned}$$

c) On considère $\int_{C_{R,r}} f(z) dz$ où $f(z) = \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z}$

et $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre.

Le pôle de $f(z)$ appartenant à l'intérieur de $C_{R,r}$ est $z_1 = ib$ car $\operatorname{Re} b > 0$. Le résidu en ce pôle est

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}(f, ib) &= \lim_{z \rightarrow ib} \frac{(z^2 - b^2) e^{iaz}}{z \frac{d}{dz}(z^2 + b^2)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow ib} \frac{(z^2 - b^2) e^{iaz}}{2z^2} = e^{-ab}.
 \end{aligned}$$



On a donc

$$\int_{C_{R,r}} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ib) = 2\pi i e^{-ab}.$$

ou

$$\int_{-R}^{-r} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right) \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_r^R \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right) \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz = 2\pi i e^{-ab}.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right) \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_{\Gamma_R} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz = 2\pi i e^{-ab}$$

ou encore

$$\int_r^R \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right) \frac{\sin(ax)}{x} dx = -\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz + \pi e^{-ab}.$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. L'intégrale sur Γ_R tend vers zéro car

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \left(\frac{R^2 e^{2i\theta} - b^2}{R^2 e^{2i\theta} + b^2}\right) \frac{e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \left(\frac{R^2 e^{2i\theta} - b^2}{R^2 e^{2i\theta} + b^2}\right) e^{-aR(\sin\theta - i\cos\theta)} i d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur cette limite, voir le rappel de l'exercice 4.7.

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans l'intégrale sur Γ_r , on voit que sa limite est

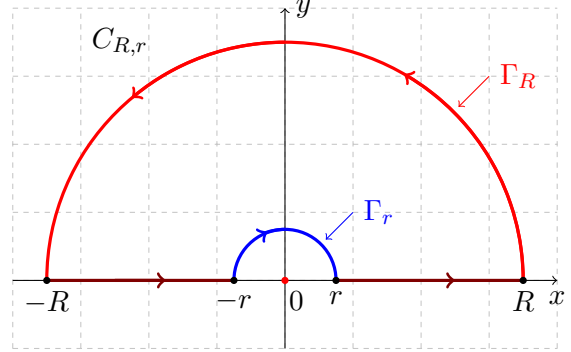
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \right) \frac{e^{iaz}}{z} dz &= -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \left(\frac{r^2 e^{2i\theta} - b^2}{r^2 e^{2i\theta} + b^2} \right) \frac{e^{iare^{i\theta}}}{re^{i\theta}} ir e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2 e^{2i\theta} - b^2}{r^2 e^{2i\theta} + b^2} \right) e^{iare^{i\theta}} i d\theta \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^2 e^{2i\theta} - b^2}{r^2 e^{2i\theta} + b^2} \right) e^{iare^{i\theta}} i d\theta = -\int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \right) \frac{\sin(ax)}{x} dx = \pi \left(e^{-ab} - \frac{1}{2} \right).$$

d) On considère $\int_{C_{R,r}} \frac{e^{iaz}}{z} dz$ où $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre,

$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$. La seule singularité $z_0 = 0$ de $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z}$ étant à l'extérieur de $C_{R,r}$, on a donc



$$\int_{C_{R,r}} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0$$

ou encore

$$\int_r^R \frac{\sin(ax)}{x^2} dx = -\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz. \quad (4.8)$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. L'intégrale sur Γ_R tend vers zéro car

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R e^{i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} e^{-aR(\sin\theta - i\cos\theta)} i d\theta = 0.$$

Pour plus de détails sur cette limite, voir le rappel de l'exercice 4.7.

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans l'intégrale sur Γ_r , on voit que sa limite est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz &= -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{iare^{i\theta}}}{re^{i\theta}} ir e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} e^{iare^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} e^{iare^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

par passage à la limite sous le symbole d'intégration.

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$
