ÉCOLE NATIONALE PRÉPARATOIRE AUX ETUDES D'INGÉNIERAIT - BADJI MOKHTAR

Classe : $3^{ième}$ Année Prépa, ST	**Année universitaire** : 2021-2022
Domaine : Mathématique et informatique	**Date** : 19/03/2022
Module : Analyse 6	**Durée** : 1 h 30

Examen Partiel

Exercice 1 (5 points) :

a) Calculer $\left(i^3\right)^i$, i^{3i} et $\left(i^i\right)^3$. Conclure.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\cos z = e^{iz} - 1$.

c) Déterminer toutes les valeurs de z telles que $|e^{iz}| < 1$.

Exercice 2 (5 points) :

On considère la fonction $f(z) = e^{z^2}$.

a) Écrire la fonction f sous forme $u(x,y) + iv(x,y)$.

b) En déduire les parties réelles et imaginaires de $f'(z) = 2ze^{z^2}$.

c) Trouver l'image du segment de droite joignant les points $z_0 = 0$ et $z_1 = \sqrt{\pi} + i\sqrt{\pi}$ par $f(z)$.

Exercice 3 (5 pts):

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Pour $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

a) On suppose qu'il existe des nombres réels a et b tels que l'on ait $v(x,y) = au(x,y) + b$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante.

b) Même question si on suppose que $v(x,y) = u^2(x,y)$.

Exercice 4 (5 points) :

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $u(x,y) = x^2 + 2x - ay^2 + e^{bx}\cos y$.

a) Déterminer les constantes a et b pour que u soit harmonique sur $\mathbb{C}$.

b) Pour les valeurs de a et b de la question **a)**, trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z.