Département de Mathématiques et Informatique

Module: Analyse 5 **Année scolaire: 2021/2022**

Série N°1
Transformées de Fourier

Date d'éffet : 12/09/2021

Exercice 1 : *Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes, et représenter f à l'aide d'une intégrale de Fourrier.*

1). $f(t) = e^{-a|t|}$. *ou* $a > 0$ *2).* $f(t) = \dfrac{t}{a^2+t^2}$.

3). $f(t) = \begin{cases} \sin t, & si \quad |t| \leq \pi \\ 0, & si \quad |t| > \pi \end{cases}$ *4).* $f(t) = \begin{cases} 1, & si \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & si \quad |t| = 1 \\ 0, & si \quad |t| > 1 \end{cases}$

5). $f(t) = \begin{cases} 1, & si \quad -1 \leq t \leq 0 \\ -1, & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & si \quad |t| \geq 1 \end{cases}$ *6).* $f(t) = \begin{cases} 1+t, & si \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t, & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & si \quad |t| \geq 1 \end{cases}$

Exercice 2 *1. Trouver la transformée de Fourier de* $f(x) = \begin{cases} 1 & si \ |x| \leq a \\ 0 & si \ |x| > a \end{cases}$

2. Représenter les graphes de f et de sa transformée pour $a = 3$.

Exercice 3 *Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes*

1. $f(x) = e^{-x^2}$
2. $f(x) = xe^{-4x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$
4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$

Exercice 4 *1. Utiliser les résultats de l'exercice 2 pour évaluer* $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx$

Exercice 5 : *Représenter les fonctions suivantes par une intégrale de Fourier*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & pour \ 0 < |x| < a; \\ 0, & pour \ |x| > a. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & pour \ 0 < |x| < a; \\ 0, & pour \ |x| > a. \end{cases}$$

$$h(t) = e^{-|x|} + e^{-2x^2}, \qquad J(x) = \begin{cases} x^2, & pour \ 0 < x < a; \\ -x^2, & pour \ -a < x < 0; \\ 0, & pour \ |x| > a. \end{cases}$$

Exercice 6 *1. En utilisant la transformée de Fourier montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\pi\omega}{\omega}\sin\omega t\, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & pour\ 0 < t < \pi; \\ 0, & pour\ t > \pi. \end{cases}$$

2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{1+\omega^2}\, d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-t}$$

Exercice 7 *Soit* $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \le x < 1 \\ 0 & si\ \ x \ge 1 \end{cases}$

1. *Trouver la transformée de Fourier de f en sinus*
2. *Trouver la transformée de Fourier de f en cosinus*
3. *Donner la représentation graphique de f et de ses transformées.*
4. *Utiliser les résultats précédents pour montrer que :*

a) $\int_0^{+\infty}(\frac{1-\cos x}{x})^2 dx = \frac{\pi}{2}$ *b)* $\int_0^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})^2 dx = \frac{\pi}{2}$

Exercice 8 *Soit* $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & si\ \ |x| < 1 \\ 0 & si\ \ |x| \ge 1 \end{cases}$

1. *Trouver la transformée de Fourier de f .*
2. *Evaluer l'intégrale suivante :* $\int_0^{+\infty}(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3})\cos(\frac{x}{2})dx$

Exercice 9 *Soit* $f(x) = \exp(-mx),\ m > 0$

1. *Trouver la transformée de Fourier en cosinus de f.*
2. *Montrer que* $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(pv)}{v^2+\beta^2}dv = \frac{\pi}{2\beta}\exp(-p\beta), \quad p > 0, \beta > 0.$
3. *Par application de l'identité de Parseval, évaluer* $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Exercice 10 *1. Trouver la transformée de Fourier en sinus de* $\exp(-x),\ x \ge 0$

2. *Montrer que* $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(mx)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}\exp(-m), \quad m > 0.$
3. *Par application de l'identité de Parseval, évaluer* $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$

Exercice 11 *1. La convolution de deux fonctions f et g est définie par*

$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\ du$ *(sous réserve de convergence)*

a) Montrer que $f * g = g * f$

b) Montrer que $F(\ f * g) = F(g)F(f)$

2. *Résoudre l'équation intégrale suivante :* $y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)r(x-u)du$

oé g et r sont des fonctions données.

Exercice 12 *1. Résoudre les équations intégrales suivantes*

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(s)}{(x-s)^2+a^2}ds = \frac{1}{x^2+b^2}, 0 < a < b$;

3. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} y(t)\cos(xt)dt = \frac{1}{x^2+1}$

Exercice 13 *En utilisant la transformée de Fourrier, trouver une solution de l'equation intégro-différentielle:*

$$y\,(u) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-a|u|}du = e^{-a|t|}$$

Exercice 14 *: Soit $\alpha > 0$; et la fonction f définie par $f(t) = e^{-\alpha t^2}$*

1. *On pose $F(s) = \mathcal{F}\left[f\right](s)$, montrer que F est solution d'une équation différentielle du 1^{ere} ordre.*
2. *Trouver F.*

Exercice 15 *Résoudre, en utilisant la transformée de Fourier, l'équation différentielle*
$y''(t) + 2t\ y'(t) + 2y(t) = 0\ ,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Exercice 16 1. *Calculer la transformée de Fourier en cosinus de $f(t) = (1+t)\exp(-t)$*

2. *Résoudre pour $t \geq 0$, le systéme d'équations différentielles suivant :*

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) + 2y(t) = 0 \\ y''(t) + x''(t) - x(t) = -\exp(-t) \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Indication : Utiliser la transformée de Fourier en cosinus.

Exercice 17 *Résoudre l'équation de la chaleur suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

f, f', f'' étant des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.
Indication : Utiliser la transformée de Fourier de $u(x,t)$ par rapport é x.

Exercice 18 *Résoudre l'EDP suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 4\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 & t > 0, x \in [0,\pi] \\ u(x,0) = \sin(x) & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -2\sin x & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Indication : Utiliser la transformée de Fourier en cosinus de $u(x,t)$ par rapport à t.