Département de Mathématiques et Informatique

Module: Analyse 5 **Année scolaire: 2021/2022**

Série n°2

Transformées de Laplace

Exercice 1 *:*

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions définies par:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & \textit{pour } 0 < t < T; \\ 0, & \textit{pour } t > T. \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} t, & \textit{pour } 0 < t < T; \\ 0, & \textit{pour } t > T. \end{cases}$$

Exercice 2 *:*

Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$\left(x^2-1\right)^2; \qquad \sin 2x - 3\cos 2x; \qquad e^{-x}\cos 3x : \qquad e^{-2x}\left(x^3+1\right).$$

$$\begin{array}{lclclc} e^{\alpha t}\sin(\omega t) & ; & e^{\alpha t}sh(\omega t) & ; & t^2e^{-t} & ; \\ 2\cos(2t-1)+3\sin(5t) & ; & \dfrac{\cos t - 1}{t} & ; & \dfrac{\sin t}{t} & ; \\ 4e^{-3t}+5+6e^{-3t}\sin(t+2) & ; & \dfrac{sht}{t} & ; & (sht)^2 & . \end{array}$$

Exercice 3 *:*

Calculer en utilsant les transformées de Laplace les intégrales

suivantes :

$$\int_0^{+\infty} t^2\sin t e^{-2t}dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t}dt \quad ;$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-2t}\cos t dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{t}dt \quad .$$

Exercice 4 *:*

Trouver les originaux des fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{1}{p^2-3}, \quad \frac{1}{(p+a)^2}, \quad \frac{p^2}{(p-1)(p-3)}, \quad \frac{p+1}{p^2+p+2}, \quad \frac{p-5}{p^2+8p+15}, \quad \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

Exercice 5 *:*

Trouver les originaux de:

$$\frac{e^{-2p}}{p-1}; \quad \frac{e^{-(1/3)p}}{p^2+p+1}; \quad \frac{e^{-2p}}{p-1} + \frac{e^{-(1/3)p}}{(p+a)^2},$$

$$\frac{p+1}{p^2+p+2}e^{-p} - \frac{p-5}{p^2+8p+15}e^{-2p} + \frac{p}{(p^2+1)^2}e^{-3p}$$

Trouver les images (transformée de Laplace) des fonctions

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\sinh x}{x}, \quad \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}, \quad \frac{1-\cos\omega x}{x}.$$

Exercice 6 *:*
En utilisant la transformée de Laplace trouver la fonction inconnue f telle que:

$$\int_0^x f(t)cos(x-t)\,dt = f'(x) \quad avec f(0)=1,$$
$$\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt = 2\left[f(x)-x\right].$$

Exercice 7 *Résoudre é l'aide de la trasfomrmée de Laplace, les équations intégrales et intégro-différentielles suivantes :*

$$\int_0^x e^{x-t}y(t)dt = e^x \quad ; \quad y(x) - \int_0^x y(t)\cos(x-t)dt = e^x \quad ;$$
$$2y(x) - \int_0^x y(t)y(x-t)dt = \sin x \quad ; \quad \begin{cases} y''(x) - \displaystyle\int_0^x e^{2(x-t)}y'(t)dt = e^{2x} \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases} .$$

Exercice 8 *:*
En utilisant le produit de convolution trouver les originaux de:

$$\frac{1}{(p+4)^4} \quad \frac{1}{(p+1)(p^2+1)} \quad \frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\Omega^2)}$$

Exercice 9 *:*
Trouver la solution des équations différentielles

- $\diamond$ $y''-y=\sin 2x$ $\qquad y(0)=1$ *et* $y'(0)=-1$
- $\diamond$ $y''+2y'+y=e^{-x}$ $\qquad y(0)=1$ *et* $y'(0)=0$
- $\diamond$ $xy''+y'+xy=0$ $\qquad y(0)=1$ *et* $y'=0$
- $\diamond$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x+5y, & telle\ que \\ \dfrac{dy}{dt} = x-3y, & . \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=1; \\ y(0)=2. \end{cases}$

Exercice 10 *Résoudre é l'aide de la trasfomrmée de Laplace, pour $t \geq 0$, les équations et les systémes d'équations différentielles :*

$$\begin{cases} y''(t)-y'(t)-6y(t)=2 \\ y(0)=1, y'(0)=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y''(t)-3y'(t)+2y(t)=e^{-t} \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases} ;$$
$$\begin{cases} 2x'(t)+y'(t)=x(t)-1 \\ 7x'(t)+4y'(t)=-3y(t) \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x''(t)+y(t)=1 \\ y''(t)+4x(t)=0 \\ x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0 \end{cases} .$$