Département de Mathématiques et Informatique

Module: Analyse 3 **Année scolaire: 2019/2020**

Corrigé de la série n**7**
Transformations de Fourier et de Laplace

I-Transformations de Fourier

Exercise 1 *Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes*

1. $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, *2.* $f(t) = \frac{t}{a^2+t^0}$, *3.* $f(t) = \begin{cases} \sin t, & si \ |t| \leq \pi \\ 0, & si \ |t| > \pi \end{cases}$

Solution.
1. $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.
La transformïée de Fourier de f est donnée par

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\lambda)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\lambda)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a-i\lambda} + \frac{1}{a+i\lambda} \right], \end{aligned}$$

donc

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+\lambda^2}.$$

2. $f(t) = \frac{t}{a^2+t^0}$.
On remarque que

$$f(t) = tG(t),$$

où

$$G(t) = \frac{1}{a^2+t^0} = \mathcal{F}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a|t|} \right].$$

En utilisant la propriété de dérivation on a

$$F(\lambda) = \mathcal{F}\left[tG\right](\lambda) = i\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}\left[G\right](\lambda)$$

et en utilisant la propriété de dualité on trouve

$$\mathcal{F}\left[G\right](\lambda) = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}e^{-a|t|}\right]\right](\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}e^{-a|\lambda|}.$$

Donc

$$F(\lambda) = \frac{i\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{-a|\lambda|} = \frac{i\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{c} -ae^{-a\lambda},\ \text{si } \lambda > 0 \\ ae^{a\lambda},\ \text{si } \lambda < 0 \end{array}\right.$$

d'où

$$F(\lambda) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-a|\lambda|}sgn(\lambda)$$

où sgn est la fonction signe définie par

$$sgn(\lambda) = \left\{\begin{array}{c} 1,\ \text{si } \lambda > 0 \\ -1,\ \text{si } \lambda < 0 \end{array}\right. .$$

3. $f(t) = \left\{\begin{array}{ll} \sin t, & \text{si } |t| \leq \pi \\ 0, & \text{si } |t| > \pi \end{array}\right.$.

On remarque que la fonction f est impaire, on a alors

$$F(\lambda) = -iF_s(\lambda)$$

où F_s dï¿½signe la transformï¿½e de Fourier sinus. On a

$$F(\lambda) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)\ dt = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(\lambda t)\ dt.$$

Pour calculer cette intégrale, on va utiliser la relation trigonométrique suivante

$$\cos(t-\lambda t) - \cos(t+\lambda t) = 2\sin t\sin\lambda t$$

et on aura pour $\lambda \neq^{+}_{-} 1$,

$$F(\lambda) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1-\lambda)\pi}{1-\lambda} - \frac{\sin(1+\lambda)\pi}{1+\lambda}\right],$$

d'où

$$F(\lambda) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}.$$

■

Exercise 2 *Représenter les fonctions suivantes par une intégrale de Fourier*

1. $f(t) = \begin{cases} 1, & si\ 0 < |t| < a \\ 0, & si \quad\quad |t| > a \end{cases}$, *2.* $g(t) = \begin{cases} t, & si\ |t| < a \\ 0, & si\ |t| > a \end{cases}$, *3.* $h(x) = e^{-|x|} + e^{-ax^2}$.

Solution.

1. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < |t| < a \\ 0, & \text{si } \quad\quad |t| > a \end{cases}$.

Pour $\lambda \neq 0$, on a

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-i\lambda t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}$$

donc la représentation de f par une intégrale de Fourier est

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

2. $g(t) = \begin{cases} t, & \text{si } |t| < a \\ 0, & \text{si } |t| > a \end{cases}$.

On remarque que

$$g = tf.$$

Par la propriété de dérivation, on déduit la transformée de Fourier de g

$$G(\lambda) = iF'(\lambda) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\lambda \cos(\lambda a) - \sin(\lambda a)}{\lambda^2}.$$

D'où

$$g(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\lambda \cos(\lambda a) - \sin(\lambda a)}{\lambda^2} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

3. $h(x) = e^{-|x|} + e^{-ax^2}$.

Pour cet exemple, on utilise l'exercice 1 (1) pour $a = 1$, et l'exercice 4 pour $\alpha = a$ et on trouve

$$h(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1 + \lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \right] e^{i\lambda x} d\lambda.$$

■

Exercise 3 *En utilisant la transformée de Fourier montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \pi w}{w} \sin xt \; dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & pour \; 0 < t < \pi \\ 0, & pour \qquad t > \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi w}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-t}$$

Solution.
1/ Montrons que pour tout $t > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \pi w}{w} \sin xt \; dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{pour } 0 < t < \pi \\ 0, & \text{pour} \qquad t > \pi \end{cases}$$

En effet, posons

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\eta}{2}, & \text{pour} \quad |t| < \pi \\ 0, & \text{pour} \quad |t| \;\; > \pi \end{cases}$$

La transformée de Fourier sinus de f est

$$\begin{aligned} F_s(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin wt \; dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\pi} \frac{\eta}{2} \sin wt \; dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos w\pi}{w} \right). \end{aligned}$$

En utilisant la transformée inverse de Fourier sinus, on trouve

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(w) \sin wt \; dw = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \pi w}{w} \sin xt \; dw.$$

2/ Mmaintenant, on montre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi w}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-t}.$$

On pose

$$g(t) = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}.$$

Comme g est une fonction paire sur $\mathbb{R}$ et d'après l'exercice 1 (exemple 1, pour $a = 1$), la transformée de Fourier cosinus de g est donnée par

$$\mathcal{F}_c [g] (w) = \mathcal{F} [g] (w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + w^2} .$$

Donc pour tout $t > 0$

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_c(g)(w) \cos wt \, dw = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1 + w^2} \, dw..$$

■

Exercise 4 *Soit* $\alpha > 0$ *et* f *une fonction définie par* $f(t) = \exp(-\alpha t^2)$.

1. Montrer que la transformée de Fourier F *de* f *est solution d'une équation différentielle.du* 1^{ere} *ordre.*

2. Trouver F. *Sachant que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Solution.

1. On montre que F est solution d'une équation différentielle.du 1^{ere} ordre.

En effet, il est clair que

$$f'(t) = -2\alpha t f(t)$$

donc

$$\mathcal{F}[f'](\lambda) = -2\alpha \mathcal{F}[tf](\lambda)$$

et en utilisant les propriétés de dérrivation suivantes

$$\mathcal{F}[f'](\lambda) = i\lambda F(\lambda) \text{ et } \mathcal{F} [tf] = iF'(\lambda)$$

on obtient l'équation differentielle.du 1^{ere} ordre

$$\lambda F(\lambda) = -2\alpha F'(\lambda).$$

2. Maintenant on calcule F.

Comme F est solution de l'équation différentielle.du 1^{ere} ordre suivante

$$\frac{F'}{F}. = \frac{-\lambda}{2\alpha}$$

on a donc

$$F(\lambda) = c \exp\left(\frac{-\lambda^2}{4\alpha}\right), \ c \in \mathbb{R}.$$

Il reste à trouver la valeur de c.

$$c = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it.0}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t^2)dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

Par conséquent

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp \frac{-\lambda^2}{4\alpha}.$$

■

II-Transformations de Laplace

Exercise 5 *Déterminer la transformée d Laplace des fonctions définies par :*

1. $f_1(t) = \begin{cases} 1, & \textit{pour } 0 < t < T \\ 0, & \textit{pour } \quad t > T \end{cases}$, *2.* $f_2(t) = \begin{cases} t, & \textit{pour } 0 < t < T \\ 0, & \textit{pour } \quad t > T \end{cases}$.

Solution.

1. $f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 < t < T \\ 0, & \text{pour } \quad t > T \end{cases}$.

La transformée de Laplace de f_1 est

$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^T e^{-pt}dt = \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

2. $f_2(t) = \begin{cases} t, & \text{pour } 0 < t < T \\ 0, & \text{pour } \quad t > T \end{cases}$.

D'abord, on remarque que

$$f_2(t) = tf_1(t).$$

En utilisant la propriété de dérivation, La transformée de Laplace de f_2 est

$$F_2(p) = \mathcal{L}[tf_1](p) = -\frac{\partial}{\partial p} F_1(p).$$

Donc

$$F_2(p) = \frac{1 - e^{-pT}(1 + pT)}{p^2}.$$

■

Exercise 6 *Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = (x^2 - 1)^2$, *2.* $g(x) = \sin 2x - 3\cos 2x$, *3.* $h(x) = e^{-c}\cos 3x$, *4.* $k(x) = e^{-2x}\left(x^3 + 1\right)$.

Solution.
1. $f(x) = (x^2-1)^2 =, x^4 - 2x^2 + 1.$

On a par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}, \left[x^4\right] - 2\mathcal{L}\left[x^2\right] + \mathcal{L}[1]$$

avec

$$\mathcal{L}[1](p) = \int_0^{+\infty} 1.e^{-px}dx = \frac{1}{p}.$$

et par la propriété de dérivation généralisée on a

$$\mathcal{L}[x^n](p) = \mathcal{L}[x^n.1](p) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n}\mathcal{L}[1](p)$$

où $\frac{\partial^n}{\partial p^n}\mathcal{L}[1]$ désigne la dérivée n^{eme} de $\mathcal{L}[1]$ qui est égale à

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n}\mathcal{L}[1](p) = \frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[\frac{1}{p}\right] = \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}}$$

c'est à dire que

$$\mathcal{L}[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Donc

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}, \left[x^4\right] - 2\mathcal{L}\left[x^2\right] + \mathcal{L}[1] = \frac{4!}{p^5} - 2\frac{2!}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{24}{p^5} - \frac{4}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

2. $g(x) = \sin 2x - 3\cos 2x.$

D'abord, on calcule $\mathcal{L}[\sin 2x]$ et $\mathcal{L}[\cos 2x]$. :

$$\mathcal{L}[\sin 2x] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}\left[e^{2x}\right] - \mathcal{L}\left[e^{-2x}\right]\right]$$

et

$$\mathcal{L}[\cos 2x] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left[e^{2ix}\right] + \mathcal{L}\left[e^{-2ix}\right]\right]$$

La propriété de modulation donne

$$\mathcal{L}\left[e^{2ix}\right](p) = \mathcal{L}\left[e^{2ix}.1\right](p) = \mathcal{L}[1](p-2i) = \frac{1}{p-2i}$$

et

$$\mathcal{L}\left[e^{-2ix}\right](p)=\mathcal{L}\left[e^{-2ix}.1\right](p)=\mathcal{L}\left[1\right](p+2i)=\frac{1}{p+2i}$$

et on obtient

$$\mathcal{L}\left[\sin 2x\right](p)=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-2i}-\frac{1}{p+2i}\right]=\frac{2}{p^2+4}$$

et

$$\mathcal{L}\left[\cos 2x\right](p)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-2i}+\frac{1}{p+2i}\right]=\frac{p}{p^2+4}$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}\left[g\right](p)=\mathcal{L}\left[\sin 2x\right](p)-3\mathcal{L}\left[\cos 2x\right](p)=\frac{2}{p^2+4}-3\frac{p}{p^2+4}=\frac{2-3p}{p^2+4}.$$

3. $h(x)=e^{-c}\cos 3x.$

La propriété de modulation donne

$$\mathcal{L}\left[h\right](p)=\mathcal{L}\left[\cos 3x\right](p+1).$$

Et avec le fait que

$$\mathcal{L}\left[\cos 3x\right](p)=\frac{p}{p^2+9}$$

on trouve

$$\mathcal{L}\left[h\right](p)=\frac{P+1}{(p+1)^2+9}=\frac{P+1}{p^2+2p+10}.$$

4. $k(x)=e^{-2x}\left(x^3+1\right).$

Ttoujours par la modulation

$$\mathcal{L}\left[k\right](p)=\mathcal{L}\left[x^3+1\right](p+2)$$

avec

$$\mathcal{L}\left[x^3\right](p)+\mathcal{L}\left[1\right](p)=\frac{3!}{p^4}+\frac{1}{p}$$

on a alors

$$\mathcal{L}\left[k\right](p)=\frac{6}{(p+2)^4}+\frac{1}{p+2}.$$

■

Remarque.

Soient $a,b\in\mathbb{R}$. De la même manière que les exemples précédents, on peut vérifier les resultats suivants :

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\right](p)=\tfrac{1}{p-a}\qquad \mathcal{L}\left[e^{ax}x^n\right](p)=\tfrac{n!}{(p-a)^{n+1}},n\in\mathbb{N}\qquad \mathcal{L}\left[\cos ax\right](p)=\tfrac{p}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\sin ax\right](p)=\tfrac{a}{p^2+a^2}\qquad \mathcal{L}\left[\cosh ax\right](p)=\tfrac{p}{p^2-a^2}\qquad \mathcal{L}\left[\sinh ax\right](p)=\tfrac{a}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{ax}\cos bx\right](p)=\tfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}\qquad \mathcal{L}\left[e^{ax}\sin bx\right](p)=\tfrac{b}{(p-a)^2+b^2}\qquad \mathcal{L}\left[e^{ax}\sinh bx\right](p)=\tfrac{a}{(p-a)^2+b^2}$$

Exercise 7 *Trouver les originaux des fractions rationnelles suivantes :*

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2-3} \qquad F_2(p) = \frac{1}{(p+a)^2} \qquad F_3(p) = \frac{p^2}{(p-1)(p-3)}$$
$$F_4(p) = \frac{p+1}{p^2+p+2} \quad F_5(p) = \frac{p-5}{p^2+8p+15} \quad F_6(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

Solution.
1. $F_1(p) = \frac{1}{p^2-3}$.
La décomposition de F_1 en éléments simples est

$$F_1(p) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{1}{p-\sqrt{3}} - \frac{1}{p+\sqrt{3}}\right].$$

Comme

$$\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}$$

donc

$$\frac{1}{p-\sqrt{3}} = \mathcal{L}[1]\left(p-\sqrt{3}\right) = \mathcal{L}\left[e^{\sqrt{3}x}.1\right](p)$$

et de même

$$\frac{1}{p+\sqrt{3}} = \mathcal{L}[1]\left(p+\sqrt{3}\right) = \mathcal{L}\left[e^{-\sqrt{3}x}\right](p)$$

et on a

$$F_1(p) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathcal{L}\left[e^{\sqrt{3}x} - e^{-\sqrt{3}x}\right](p) = \mathcal{L}\left[\frac{\sinh\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}}\right].$$

Donc la fonction originale de F_1 est

$$f_1(x) = \frac{\sinh\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}}.$$

On peut faire une autre méthode en utilisant la remarque précédente pour $a = \sqrt{3}$, on peut écrire

$$F_1(p) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{p^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}\left[\sinh\left(\sqrt{3}x\right)\right](p).$$

2. $F_2(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$.

On sait que

$$\mathcal{L}[x](p) = \frac{1}{p^2}.$$

Donc

$$F_2(p) = \mathcal{L}[x](p+a) = \mathcal{L}\left[e^{-ax}x\right]$$

et on déduit l'originale

$$f_2(x) = e^{-ax}x.$$

3. $F_3(p) = \frac{p^2}{(p-1)(p-3)}$
On décompose

$$F_3(p) = 1 + \frac{\frac{-1}{2}}{p-1} + \frac{\frac{9}{2}}{p-3}$$

Sachant que l'originale de 1 est la pulsion de Dirac notée δ .
On a

$$f_3(x) = \delta(x) - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{9}{2}e^{3x}.$$

4. $F_4(p) = \frac{p+1}{p^2+p+2}$.
On peut écrire

$$F_4(p) = \frac{p+1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \left[\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\right] + \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\frac{\sqrt{\frac{7}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\right].$$

Comme

$$\mathcal{L}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{7}{4}}x\right)\right](p) = \frac{p}{p^2+\frac{7}{4}} \text{ et } \mathcal{L}\left[\sin\left(\sqrt{\frac{7}{4}}x\right)\right](p) = \frac{\sqrt{\frac{7}{4}}}{p^2+\frac{7}{4}}$$

on a

$$\begin{aligned} F_4(p) &= \mathcal{L}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{7}{4}}x\right)\right]\left(p+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}\left[\sin\left(\sqrt{\frac{7}{4}}x\right)\right]\left(p+\frac{1}{2}\right) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\sqrt{\frac{7}{4}}x\right)\right](p) + \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}\left[e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\sqrt{\frac{7}{4}}x\right)\right](p) \end{aligned}$$

Donc l'originale est

$$f_4(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{7}{4}}x\right) + \frac{\sqrt{7}}{7}\sin\left(\sqrt{\frac{7}{4}}x\right)\right]$$

5. $F_5(p) = \frac{p-5}{p^2+8p+15}$.
On remarque que F_5 s'écrit commr

$$F_5(p) = \frac{p-5}{(p+4)^2-1} = \left[\frac{p+4}{(p+4)^2-1}\right] - 9\left[\frac{1}{(p+4)^2-1}\right].$$

Comme

$$\mathcal{L}[\cosh(x)](p) = \frac{p}{p^2-1} \text{ et } \mathcal{L}[\sinh(x)](p) = \frac{1}{p^2-1}$$

on a

$$\begin{aligned} F_5(p) &= \mathcal{L}[\cosh(x)](p+4) - 9\mathcal{L}[\sinh(x)](p+4) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-4x}\cosh(x)\right](p) - 9\mathcal{L}\left[e^{-4x}\sinh(x)\right](p). \end{aligned}$$

D"où

$$f_5(x) = e^{-4x}(\cosh(x) - 9\sinh(x)).$$

6. $F_6(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$.
On remarque que

$$F_6(p) = \frac{-1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{p^2+1}\right]$$

et

$$\frac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}[\sin t].(p)$$

En utilisant la propriété de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial p}\mathcal{L}[f](p) = -\mathcal{L}[t.f](p)$$

on trouve

$$F_6(p) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[t.\sin t](p).$$

Donc

$$f_6(t) = \frac{t}{2}\sin t.$$

■

Exercise 8 (Proprété de translation) *Trouver les originaux de :*

$$F_1(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}, \quad F_2(p) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{3}\right)p}}{p^2+p+1}, \quad F_3(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1} + \frac{e^{-\left(\frac{1}{3}\right)p}}{(p+a)^2},$$

$$F_4(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1}e^{-p} - \frac{p-5}{p^2+8p+15}e^{-2p} + \frac{p}{(p^2+1)^2}e^{-3p}.$$

Solution.

On rappèlle que la transformée de Laplace de la fonction retardée

$$f(t-a)H(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & \text{pour } t > a \\ 0, & \text{pour } \quad t < a \end{cases}$$

est

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)H(t-a)\right](p) = e^{-ap}\mathcal{L}\left[f\right](p).$$

1. $F_1(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$.

Comme

$$\frac{1}{p-1} = \mathcal{L}\left[e^t\right](p)$$

on a

$$F_1(p) = e^{-2p}\mathcal{L}\left[e^t\right](p) = \mathcal{L}\left[e^{t-2}H(t-2)\right](p)$$

d'où

$$f_1(t) = e^{t-2}H(t-2) = \begin{cases} e^{t-2}, & \text{pour } \quad t > 2 \\ 0, & \text{pour } \quad t < 2 \end{cases}$$

2. $F_2(p) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{3}\right)p}}{p^2+p+1}$.

D'abord, on cherche la fonction f originale de $\frac{1}{p^2+p+1}$ puis on déduit f_2 l'originale de F_2.

En effet, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2+p+1} &= \sqrt{\frac{4}{3}}\left[\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right] = \sqrt{\frac{4}{3}}\mathcal{L}\left[\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)\right]\left(p+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}\left[e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)\right](p) \end{aligned}$$

cela signifie que l'originale f de $\frac{1}{p^2+p+1}$ est

$$f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$$

et on déduit que l'originale de F_2 est

$$f_2(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{3}\right)}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\left(t-\frac{1}{3}\right)\right)H\left(t-\frac{1}{3}\right).$$

3. $F_3(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1} + \frac{e^{-\left(\frac{1}{3}\right)p}}{(p+a)^2}$.

On a vu que

$$\frac{1}{p-1} = \mathcal{L}\left[e^t\right](p) \text{ et } \frac{1}{(p+a)^2} = \mathcal{L}\left[e^{-at}t\right] \ (p)$$

donc

$$f_3(t) = e^{t-2}H(t-2) + e^{-a\left(t-\frac{1}{3}\right)}\left(t-\frac{1}{3}\right)H\left(t-\frac{1}{3}\right).$$

4. $F_4(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1}e^{-p} - \frac{p-5}{p^2+8p+15}e^{-2p} + \frac{p}{(p^2+1)^2}e^{-3p}$.

D'abord, on va déterminer les originaux $\frac{p+1}{p^2+p+1}$, $\frac{p-5}{p^2+8p+15}$ et $\frac{p}{(p^2+1)^2}$.

D'après l'exercice 7,

$$\frac{p-5}{p^2+8p+15} = \mathcal{L}[f_5](p) \text{ et } \frac{p}{(p^2+1)^2} = \mathcal{L}[f_6](p)$$

où

$$f_5(t) = e^{-4t}(\cosh(t) - 9\sinh(t)) \quad \text{et} \quad f_6(t) = \frac{t}{2}\sin t.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{p+1}{p^2+p+1} &= \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \mathcal{L}\left[e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

donc l'originale f de $\frac{p+1}{p^2+p+1}$ est

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Par conséquent, la fonction originale de F_4 est

$$f_4(t) = f(t-1)H(t-1) - f_5(t-2)H(t-2) + f_6(t-3)H(t-3).$$

■

Exercise 9 (Propreté de l'intégration) *Trouver les images (transformée de Laplace) des fonctions :*

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x} \quad f_2(x) = \frac{\sinh x}{x} \quad f_3(x) = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \quad f_4(x) = \frac{1-\cos(\omega x)}{x}$$

Solution.

Rappelons que

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}\left[f\right](\lambda)\, d\lambda.$$

1. $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right](p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}\left[\sin x\right](\lambda)\, d\lambda = \int_p^{+\infty} \frac{\infty}{\lambda^2+1} d\lambda \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan p = \arctan \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

2. $f_2(x) = \frac{\sinh x}{x}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{\sinh x}{x}\right](p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}\left[\sinh x\right](\lambda)\, d\lambda = \int_p^{+\infty} \frac{\infty}{\lambda^2-1} d\lambda \\
&= \ln \sqrt{\frac{p+1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

3. $f_3(x) = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right](p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}\left[e^{-ax}-e^{-bx}\right](\lambda)\, d\lambda = \int_p^{+\infty} \left[\frac{1}{\lambda+a} - \frac{1}{\lambda+b}\right] d\lambda \\
&= \ln \frac{p+b}{p+a}.
\end{aligned}$$

4. $f_4(x) = \frac{1-\cos(\omega x)}{x}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos(\omega x)}{x}\right](p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}\left[1-\cos(\omega x)\right](\lambda)\, d\lambda = \int_p^{+\infty} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\right] d\lambda \\
&= \ln \frac{\sqrt{p^2+\omega^2}}{p}.
\end{aligned}$$

■

Exercise 10 (Produit de convolution) *En utilisant la transformée de Laplace trouver la fonction inconnue f telle que:*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\cos(x-t)\ dt &= f'(x) \qquad \textit{avec } f(0)=1,\\ \int_0^x (x-t)^2 f(t)\ dt &= 2\left[f(x)-x\right].\end{aligned}$$

Solution.
On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions f, g notée $f*g$ est une fonction définie comme suit

$$(f*g)(x) == \int_0^x f(t)g(x-t)\ dt$$

et ayant les propriétés suivantes

$$f*g = g*f \ \ \text{(commutativité)}$$

et

$$\mathcal{L}\left[f*g\right](p) = \mathcal{L}\left[f\right](p) . \mathcal{L}\left[g\right](p) . \tag{*}$$

1. Resolvons l'équation

$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)\ dt = f'(x) \tag{1}$$

avec

$$f(0)=1.$$

Posons $g(t)=\cos t$.
L'équation (1) est équivalente à l'équation suivante

$$(f*g)(x) = f'(x). \tag{2}$$

En composant les deux membres de l'éqution (2) par la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ et en appliquant la propriété $(*)$ on obtient

$$\mathcal{L}\left[f\right](p) . \mathcal{L}\left[g\right](p) = \mathcal{L}\left[f*g\right](p) = \mathcal{L}\left[f'\right](p) .$$

La propriété de dérivation suivante

$$\mathcal{L}\left[f'\right](p) = p\mathcal{L}\left[f\right](p) - f(0)$$

entraîne

$$\mathcal{L}\left[f\right](p) . \mathcal{L}\left[g\right](p) = p\mathcal{L}\left[f\right](p) - f(0)$$

avec

$$\mathcal{L}\left[\cos x\right](p) = \frac{p}{p^2+1} \text{ et } f(0) = 1.$$

Donc

$$\mathcal{L}\left[f\right](p) = \frac{p^2+1}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}.$$

Par conséquent, la solution f est l'originale de la fraction rationnelle $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}$ qui est

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

2. Maintenant, on va resoudre l'équation

$$\int_0^x (x-t)^2 f(t)\ dt = 2\left[f(x) - x\right]..$$

Posons $g(x) = x^2$.

On a

$$(g * f)(x) = \int_0^x (x-t)^2 f(t)\ dt = 2\left[f(x) - x\right]$$

donc

$$\mathcal{L}\left[g\right](p) . \mathcal{L}\left[f\right](p) = \mathcal{L}\left[g * f\right](p) = 2\left[\mathcal{L}\left[f\right](p) - \mathcal{L}\left[x\right](p)\right] = 2\left[\mathcal{L}\left[f\right](p) - \frac{1}{p^2}\right].$$

et avec

$$\mathcal{L}\left[g\right](p) = \mathcal{L}\left[x^2\right](p) = \frac{2}{p^3}$$

on trouve

$$\mathcal{L}\left[f\right](p) = \frac{p}{p^3-1}.$$

Donc la solution f est l'originale de la fraction rationnelle

$$F(p) = \frac{p}{p^3 - 1}.$$

La Décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + p + 1)(p - 1)} = \frac{1/3}{p - 1} - \frac{1}{3}\left(\frac{p - 1}{p^2 + p + 1}\right)$$

Donc

$$f = \frac{1}{3} f_1 - \frac{1}{3} f_2$$

où f_1 est l'originale de $\frac{1}{p-3}$ qui vaut

$$f_1(x) = e^{3x}.$$

Il reste à déterminer l''originale f_2 de

$$\frac{p - 1}{p^2 + p + 1}.$$

.

En fait

$$\begin{aligned}
\frac{p-1}{p^2+p+1} &= \frac{p + \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}/2}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \mathcal{L}\left[\cos\sqrt{\frac{3}{4}}x\right]\left(p + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{3}\mathcal{L}\left[\sin\sqrt{\frac{3}{4}}x\right]\left(p + \frac{1}{2}\right) \\
&= \mathcal{L}\left[e^{-\frac{1}{2}x}\cos\sqrt{\frac{3}{4}}x\right](p) - \sqrt{3}\mathcal{L}\left[e^{-\frac{1}{2}x}\sin\sqrt{\frac{3}{4}}x\right](p)
\end{aligned}$$

Donc

$$f_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\sqrt{\frac{3}{4}}x - \sqrt{3}\sin\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)$$

et ainsi on a

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\sqrt{\frac{3}{4}}x - \sqrt{3}\sin\sqrt{\frac{3}{4}}x\right).$$

■

Exercise 11 *En utilisant le produit de convolution trouver les originaux de:*

1. $F_1(p) = \frac{1}{(p+4)^4}$, *2.* $F_2(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}$, *3.* $F_3(p) = \frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\Omega^2)}$, $\omega^2 + \Omega^2 \neq 0$.

Solution.

1. $F_1(p) = \frac{1}{(p+4)^4}$.

On ecrit F_1 comme produit

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{1}{(p+4)}.\frac{1}{(p+4)^3} \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-4x}\right](p).\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}x^2e^{-4x}\right](p) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-4x} * \frac{1}{2}x^2e^{-4x}\right](p) \end{aligned}$$

donc l'originale de F_1 est

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{-4x} * \left(\frac{1}{2}x^2e^{-4x}\right) = \int_0^x e^{-4(x-t)}\left(\frac{1}{2}t^2e^{-4t}\right)\, dt \\ &= \frac{1}{2}e^{-4x}\int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{6}e^{-4x}. \end{aligned}$$

2. $F_2(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}$.
On a

$$\begin{aligned} F_2(p) &= \frac{1}{(p+1)}.\frac{1}{(p^2+1)} \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-4x}\right](p).\mathcal{L}[\sin x](p) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-4x} * \sin x\right](p) \end{aligned}$$

donc l'originale de F_2 est

$$\begin{aligned} f_2(x) &= e^{-4x} * \sin x = \int_0^x e^{-4(x-t)}\sin t\, dt \\ &= e^{-4x}\int_0^x e^{4t}\sin t\, dt = \frac{1 + e^{4x}(4\sin x - \cos x)}{17}. \end{aligned}$$

3. $F_3(p) = \frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\Omega^2)}$.
On peut supposer que $\Omega \neq 0$ et on écrit

$$\begin{aligned} F_3(p) &= \frac{p}{(p^2+\omega^2)}.\frac{1}{(p^2+\Omega^2)} \\ &= \mathcal{L}[\cos(\omega x)](p).\mathcal{L}\left[\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega x)\right](p) \\ &= \frac{1}{\Omega}\mathcal{L}[\cos(\omega x) * \sin(\Omega x)](p) \end{aligned}$$

d'où
$$f_3(x) = \frac{1}{\Omega}\cos(\omega x) * \sin(\Omega x) = \frac{1}{\Omega}\int_0^x \cos(\omega(x-t)).\sin(\Omega t)\ dt.$$
En utilisant la relation trigonométrique
$$\cos a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$
on a
$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{1}{2\Omega}\int_0^x \left[\sin(\omega x - (\omega-\Omega)t) - \sin(\omega x - (\omega+\Omega)t)\right]\ dt \\ &= \frac{\cos(\Omega x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \Omega^2}. \end{aligned}$$

■

Exercise 12 *Trouver la solution des équations différentielles :*

$$\begin{array}{ll} 1. \quad y'' - y = \sin 2x, & y(0) = 1 \ \textit{et}\ y'(0) = -1 \\ 2.\ y'' + 2y' + y = e^{-x}, & y(0) = 1 \ \textit{et}\ y'(0) = 0 \\ 3.\ xy'' + 2y' + xy = 0, & y(0) = 1 \ \textit{et}\ y'(0) = 0 \\ 4.\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = x + 5y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x - 3y \end{array} \right. & \textit{tel que} \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{array} \right. . \end{array}$$

Solution.
1. On cherche la fonction $y(x)$ solution de l'équation différentielle
$$y'' - y = \sin 2x, \tag{1}$$
avec les conditions initiales
$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1.$$
On compose les deux membre de l'équation (1) par la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ on trouve
$$\mathcal{L}\left[y''\right](p) - \mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[\sin 2x](p) = \frac{2}{p^2+4}. \tag{*}$$
On pose $Y = \mathcal{L}[y]$.

En utilisant la propriété de dérivation
$$\mathcal{L}\left[y''\right](p) = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0)$$
et les conditions
$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1$$

l'équation $(*)$ devient

$$p^2 Y(p) - p + 1 - \mathcal{Y}(p) = \frac{2}{p^2+4}$$

et cela donne

$$Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p^2-1)(p^2+4)}.$$

La solution y de l'équation différentielle (1) est l'originale de la fraction rationnelle $Y(p)$.
On peut écrire

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p+1} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2+4}\right) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-x} + \frac{2}{5}\left(\sinh x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right)\right](p). \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation différentielle (1) est

$$y(x) = e^{-x} + \frac{2}{5}\sinh x - \frac{1}{5}\sin(2x).$$

2. On cherche la fonction $y(x)$ solution de l'équation différentielle (2) suivante

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \tag{2}$$

Posons $Y = \mathcal{L}[y]$. On a

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-x}] = \frac{1}{p+1} \tag{**}$$

avec

$$\mathcal{L}[y''](p) = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - p$$

et

$$\mathcal{L}[y'](p) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Donc l'équation $(**)$ devient

$$\left(p^2 Y(p) - p\right) + 2\left(pY(p) - 1\right) + \mathcal{Y} = \frac{1}{p+1}$$

et cela donne

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{p+2}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} \\ &= \mathcal{L}[e^{-x}](p) + \mathcal{L}[xe^{-x}](p) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[x^2 e^{-x}](p). \end{aligned}$$

D'où

$$y(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

3. On considère le problème suivant

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \tag{3}$$

IOn cherche la solution non nulle de l'équation (3) .

On a

$$\mathcal{L}\left[xy''\right] + 2\mathcal{L}\left[y'\right] + \mathcal{L}\left[xy\right] = \mathcal{L}\left[0\right] = 0. \tag{***}$$

En utilisant la propriété de dérivation suivante

$$\mathcal{L}\left[xf\right](p) = -\frac{\partial}{\partial p}\mathcal{L}\left[f\right](p)$$

l'équation $(***)$ devient

$$-\frac{\partial}{\partial p}\mathcal{L}\left[y''\right] + \mathcal{L}\left[y'\right] - \frac{\partial}{\partial p}\mathcal{L}\left[y\right] = 0$$

et cela entraîne

$$-\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2 Y(p) - p\right) + 2\left(pY(p) - 1\right) - \frac{\partial}{\partial p}\mathcal{Y}(p) = 0$$

et on obtient une équation du premier ordre suivant

$$\frac{\partial}{\partial p}Y(p) = \frac{-1}{p^2+1}.$$

Donc

$$-\mathcal{L}\left[xy\right](p) = \frac{\partial}{\partial p}Y(p) = \frac{-1}{p^2+1} = -\mathcal{L}\left[\sin x\right]$$

d'où la solution

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

4. Maintenant on va considérer le système d'équations différentielles suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = x + 5y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x - 3y \end{array}\right. \quad \text{tel que} \left\{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{array}\right. . \tag{S}$$

Posons

$$X(p) = \mathcal{L}\left[x\right](p) \text{ et } Y(p) = \mathcal{L}\left[y\right](p).$$

Pour résoudre ce système on compose d'abord les deux membres de chacune de ces équations par $\mathcal{L}$ et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} pX(p) - 1 = pX(p) - x(0) = \mathcal{L}\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] = X + 5Y \\ pY(p) - 2 = pY(p) - y(0) = \mathcal{L}\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right] = X - 3Y \end{array} \right. .$$

D'où le système algébrique

$$\left\{ \begin{array}{c} (p-1)X(p) - 5Y = 1 \\ -X + (p+3)Y = 2 \end{array} \right.$$

qui a comme solution

$$\left\{ \begin{array}{l} X(p) = \frac{p+13}{p^2+2p-8} \\ Y(p) = \frac{2p-1}{p^2+2p-8} \end{array} \right. .$$

Maintenant, on cherche les originaux x et y des fractions rationnelles X et Y.

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} X(p) = \frac{p+13}{p^2+2p-8} = \frac{p+1}{(p+1)^2-9} + 4.\frac{3}{(p+1)^2-9} \\ Y(p) = \frac{2p-1}{p^2+2p-8} = 2.\frac{p+1}{(p+1)^2-9} - \frac{3}{(p+1)^2-9} \end{array} \right. .$$

Donc la solution du système d'équations différentielles (S) est

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{-t}\left(\cosh(3t) + 4\sinh(3t)\right) \\ y(t) = e^{-t}\left(2\cosh(3t) - \sinh(3t)\right). \end{array} \right.$$

■