Module: Analyse 6 **Année scolaire: 2021/2022**

Série n01
fonctions Complexes

Date d'éffet:23/01/2022 **Durée: 04 séances**

Exercice 1 : *Déterminer les parties reélles et imaginaires des fonctions complexes suivantes:*

$$z \mapsto 2z^2 - 3iz, \quad z \mapsto z + \frac{1}{z}, \quad z \mapsto \frac{1-z}{1+z}, \quad z \mapsto \bar{z} - iz^2,$$
$$z \mapsto \frac{\bar{z}}{z}, \qquad z \mapsto z^{\frac{1}{2}}, \qquad z \mapsto z^2 e^{2z}.$$

Exercice 2 : *Trouver les images des axes réel et imaginaire par les transformations:*

$$\text{1- } w = \frac{z+1}{z-1}, \quad \text{2- } w = 1 + \frac{1}{z}.$$

Exercice 3 : *Soit S un carré du plan de la variable z de sommets $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$, déterminer le domaine du plan de la variable w transformé de S par a)* $w = z^2$, *b)* $w = \frac{1}{z} + 1$.

Exercice 4 : *Mettre e^z sous la forme $u + iv$ et calculer $|e^z|$ dans chacun des cas*

$$3 + 4i, \quad 2i\pi(1+i), \quad 2 + 3\pi i, \quad 11\pi i/2.$$

Exercice 5 : *Déterminer la partie réelle et imaginaire des quantités suivantes*

$$e^{-\pi z}, \quad \exp(z^2), \quad e^{1/z}, \quad \exp(z^3)$$

Exercice 6 : *Etablir que*

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad \left|e^{iz}\right| = e^{-Im(z)}$$
$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| \, e^{|z|}$$

Exercice 7 : *Déterminer toutes les valeurs de z telles que*

$$\text{1- } e^z \text{ est un réel} \quad \text{2- } |e^{-z}| < 1.$$

Exercice 8 : *Résoudre dans le plan complexe les équations*

$$e^z = 1, \quad e^z = 4 + 3i, \quad e^z = 0, \quad e^z = -2.$$

Exercice 9 :*Mettre sous la forme $u + iv$ les nombres suivants*

$$\sin 2\pi i, \ \cos(-2 - i), \ \sinh(3 + 4i), \ \cosh(3 + 4i), \ \sin \pi i, \ \cos(\frac{1}{2}\pi - \pi i).$$

Exercice 10 : *Montrer que*

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \\ \sinh z &= = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \\ \cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \\ \sinh(z_1 + z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \end{aligned}$$
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \qquad \cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z.$$

Exercice 11 *Montrer que:*

$$\begin{array}{llll} \cos z = \cos z_0 & \leftrightarrow & z = z_0 + 2k\pi \quad ou \quad z = -z_0 + 2k\pi & ; k \in \mathbb{Z} \\ \sin z = \sin z_0 & \leftrightarrow & z = z_0 + 2k\pi \quad ou \quad z = \pi - z_0 + 2k\pi & ; k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

pour tout $z, z_0 \in \mathbb{C}$, *et que*

$$\begin{array}{lll} \cos z = 0 & \leftrightarrow & z \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ \sin z = 0 & \leftrightarrow & z \equiv 0 \quad [\pi]. \end{array}$$

Exercice 12 *: Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes:*

$$\sin z = 100, \quad \cosh z = 0, \quad \sinh z = 0, \quad \cosh z = -1$$

Exercice 13 *: Montrer que toutes les racines des équations* $\sin z = a$ *,* $\cos z = a$ *oé* $-1 \leq a \leq 1$, *sont réelles.*

Exercice 14 *Montrer que pour tout* $z = x + iy$

$$|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y, \quad |\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$$

que peut-on en conclure.

Exercice 15 *: Déterminer tout les points* z *de* $\mathbb{C}$ *qui vérifie :* $|\cos z| \leq 1$

Exercice 16 *Déterminer les valeurs de* $\ln z$ *dans chacun des cas, où* $\ln$ *désigne la détermination principale du logarithme:*

$$z = -11, \quad z = 4 + 4i, \quad z = 4 - 4i, \quad z = 1 \pm i, \quad z = ei.$$

Exercice 17 *: Déterminer toutes les valeurs de* $\ln z$ *dans les cas suivant*

$$z = e, \quad z = 1, \quad z = -7, \quad z = e^i, \quad z = 4 + 3i.$$

est montrer que l'ensemble des valeurs de $\ln(i^2)$ *est différent de l'ensemble des valeurs de* $2\ln i$.

Exercice 18 *: Résoudre les équations suivantes:*

$$\ln z = -\pi i/2, \; \ln z = 4 - 3i, \; \ln z = e - \pi i.$$

Exercice 19 *: Trouver la valeur principale de*

$$(1 + i)^{1-i}, \; (1 - i)^{1+i}, \; (i)^{i/2}, \; (-1)^{2-i}, \; (3 + 4i)^{1/3}.$$