Chapitre 1

Fonctions Complexes

1.1 Exercices

Exercice 1.1

Déterminer les parties réelles et imaginaires des fonctions complexes suivantes :

$$\textbf{a)}\ f(z) = 2z^2 - 3iz,\ \ \textbf{b)}\ f(z) = z + \frac{1}{z},\ \ \textbf{c)}\ f(z) = \frac{1-z}{1+z},\ \ \textbf{d)}\ f(z) = \overline{z} - iz^2,$$
$$\textbf{e)}\ f(z) = \frac{\overline{z}}{z},\ \ \textbf{f)}\ f(z) = z^{\frac{1}{2}},\ \ \textbf{g)}\ f(z) = z^2 e^{2z}.$$

Exercice 1.2

Trouver les images des axes réel et imaginaire par les transformations :

$$\textbf{a)}\ w = \frac{z+1}{z-1},\ \ \textbf{b)}\ w = 1 + \frac{1}{z}.$$

Exercice 1.3

Soit S un carré du plan de la variable z de sommets $A = (0,0)\,, B = (1,0)\,, C = (1,1)$ et $D = (0,1)$. Déterminer le domaine du plan de la variable w transformé de S par

$$\textbf{a)}\ w = z^2,\ \textbf{b)}\ w = 1 + \frac{1}{z}.$$

Exercice 1.4

Mettre e^z sous la forme $u + iv$ et calculer $|e^z|$ dans chacun des cas

$$\textbf{a)}\ z = 3 + 4i,\ \textbf{b)}\ z = 2i\pi(1+i),\ \textbf{c)}\ z = 2 + 3\pi i,\ \textbf{d)}\ z = \frac{11\pi}{2} i.$$

Exercice 1.5

Déterminer la partie réelle et imaginaire des quantités suivantes :

$$\textbf{a)}\ f(z) = e^{-\pi z},\ \textbf{b)}\ f(z) = e^{z^2},\ \textbf{c)}\ f(z) = e^{\frac{1}{z}},\ \textbf{d)}\ f(z) = e^{z^3}.$$

Exercice 1.6

Établir que

$$\textbf{a)}\ \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2},\ \textbf{b)}\ \overline{e^z} = e^{\overline{z}},\ \textbf{c)}\ \left|e^{iz}\right| = e^{-\operatorname{Im} z},\ \textbf{d)}\ |e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|\, e^{|z|}.$$

Exercice 1.7

Déterminer toutes les valeurs de z telles que

$$\textbf{a)}\ e^z \text{ est un réel } \textbf{b)}\ \left|e^{-z}\right| < 1.$$

Exercice 1.8

Résoudre dans le plan complexe les équations

$$\textbf{a)}\ e^z = 1,\ \textbf{b)}\ e^z = 4 + 3i,\ \textbf{c)}\ e^z = 0,\ \textbf{d)}\ e^z = -2.$$

Exercice 1.9

Mettre sous la forme $u + iv$ les nombres suivants

$$\textbf{a)}\ \sin(2\pi i)\,,\ \textbf{b)}\ \operatorname{Sh}(3 + 4i)\,,\ \textbf{c)}\ \operatorname{Ch}(3 + 4i)\,,\ \textbf{d)}\ \sin(\pi i)\,,\ \textbf{e)}\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi i\right).$$

Exercice 1.10

Montrer que

a) $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y,$

b) $\operatorname{Sh} z = \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y,$

c) $\operatorname{Ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Sh} z_2,$

d) $\operatorname{Sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Sh} z_2,$

e) $\operatorname{Ch}^2 z - \operatorname{Sh}^2 z = 1,$

f) $\operatorname{Ch}^2 z + \operatorname{Sh}^2 z = \operatorname{Ch}(2z)\,.$

Exercice 1.11

Montrer que pour tout $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\textbf{a)}\ \cos z = \cos z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi \text{ ou } z = -z_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\textbf{b)}\ \sin z = \sin z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - z_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\textbf{c)}\ \cos z = 0 \iff z \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\,,$$

$$\textbf{d)}\ \sin z = 0 \iff z \equiv 0\,[\pi]\,.$$

Exercice 1.12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\textbf{a)}\ \sin z = 100,\ \textbf{b)}\ \operatorname{Ch} z = 0,\ \textbf{c)}\ \operatorname{Sh} z = 0,\ \textbf{d)}\ \operatorname{Ch} z = -1.$$

Exercice 1.13

Montrer que toutes les racines des équations $\sin z = a$ et $\cos z = a$ où $-1 \leq a \leq 1$, sont réelles.

Exercice 1.14

Montrer que pour tout $z = x + iy$

$$\textbf{a)}\ |\operatorname{Sh} y| \leq |\cos z| \leq |\operatorname{Ch} y|, \qquad \textbf{b)}\ |\operatorname{Sh} y| \leq |\sin z| \leq |\operatorname{Ch} y|.$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 1.15

Déterminer tout les points z de $\mathbb{C}$ qui vérifie $|\cos z| \leq 1$.

Exercice 1.16

Déterminer les valeurs de $\operatorname{Log} z$ dans chacun des cas, où Log désigne la détermination principale du logarithme :

$$\textbf{a)}\ z = -11,\ \textbf{b)}\ z = 4 + 4i,\ \textbf{c)}\ z = 4 - 4i,\ \textbf{d)}\ z = 1 \pm i,\ \textbf{e)}\ z = ei.$$

Exercice 1.17

Déterminer toutes les valeurs de $\operatorname{Log} z$ dans les cas suivants :

$$\textbf{a)}\ z = e,\ \textbf{b)}\ z = 1,\ \textbf{c)}\ z = -7,\ \textbf{d)}\ z = e^{i},\ \textbf{e)}\ z = 4 + 3i.$$

Puis montrer que l'ensemble des valeurs de $\operatorname{Log}(i^2)$ est différent de l'ensemble des valeurs de $2\operatorname{Log}(i)$.

Exercice 1.18

Résoudre les équations suivantes :

$$\textbf{a)}\ \operatorname{Log} z = -i\frac{\pi}{2},\ \textbf{b)}\ \operatorname{Log} z = 4 - 3i,\ \textbf{c)}\ \operatorname{Log} z = e - \pi i.$$

Exercice 1.19

Trouver la valeur principale de

$$\textbf{a)}\ (1+i)^{1-i},\ \textbf{b)}\ (1-i)^{1+i},\ \textbf{c)}\ i^{\frac{i}{2}},\ \textbf{d)}\ (-1)^{2-i},\ \textbf{e)}\ (3+4i)^{\frac{1}{3}}.$$

1.2 Solutions

Exercice 1.1

Déterminer les parties réelles et imaginaires des fonctions complexes suivantes :

a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$, **b)** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, **c)** $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$, **d)** $f(z) = \overline{z} - iz^2$,
e) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$, **f)** $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, **g)** $f(z) = z^2 e^{2z}$.

Solution.

a) On a $z = x + iy$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= 2(x+iy)^2 - 3i(x+iy) = 2x^2 + 4ixy - 2y^2 - 3ix + 3y \\ &= 2x^2 - 2y^2 + 3y + i(4xy - 3x). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Re}(f(z)) = 2x^2 - 2y^2 + 3y$ et $\mathrm{Im}(f(z)) = 4xy - 3x$.

b) $f(z) = z + \dfrac{1}{z} = x + iy + \dfrac{1}{x+iy}$.
Pour écrire un quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique $u + iv$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur.

$$f(z) = x + iy + \frac{x - iy}{(x+iy)(x-iy)} = x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

c) $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z} = \dfrac{1-x-iy}{1+x+iy} = \dfrac{(1-x-iy)(1+x-iy)}{(1+x+iy)(1+x-iy)} = \dfrac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2} + i\dfrac{-2y}{(1+x)^2+y^2}$.

d) $f(z) = \overline{z} - iz^2 = x - iy - i(x+iy)^2 = x - iy - i(x^2 - y^2 + 2ixy) = x + 2xy + i(y^2 - x^2 - y)$.

e) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{\overline{z}\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}^2}{|z|^2} = \dfrac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\dfrac{(-2xy)}{x^2+y^2}$.

f) En écrivant z sous forme polaire $z = re^{i(\theta+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$, alors

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}} = \left(re^{i(\theta+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)} = \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right) + i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right).$$

g) $$\begin{aligned} f(z) &= z^2e^{2z} = (x+iy)^2 e^{2(x+iy)} = (x^2 - y^2 + 2ixy)\, e^{2x}(\cos(2y) + i\sin(2y)) \\ &= ((x^2-y^2)\cos(2y) - 2xy\sin(2y))\, e^{2x} + i\,((x^2-y^2)\sin(2y) + 2xy\cos(2y))\, e^{2x}. \end{aligned}$$

Exercice 1.2

Trouver les images des axes réel et imaginaire par les transformations :

$$\textbf{a) } w = \frac{z+1}{z-1}, \quad \textbf{b) } w = 1 + \frac{1}{z}.$$

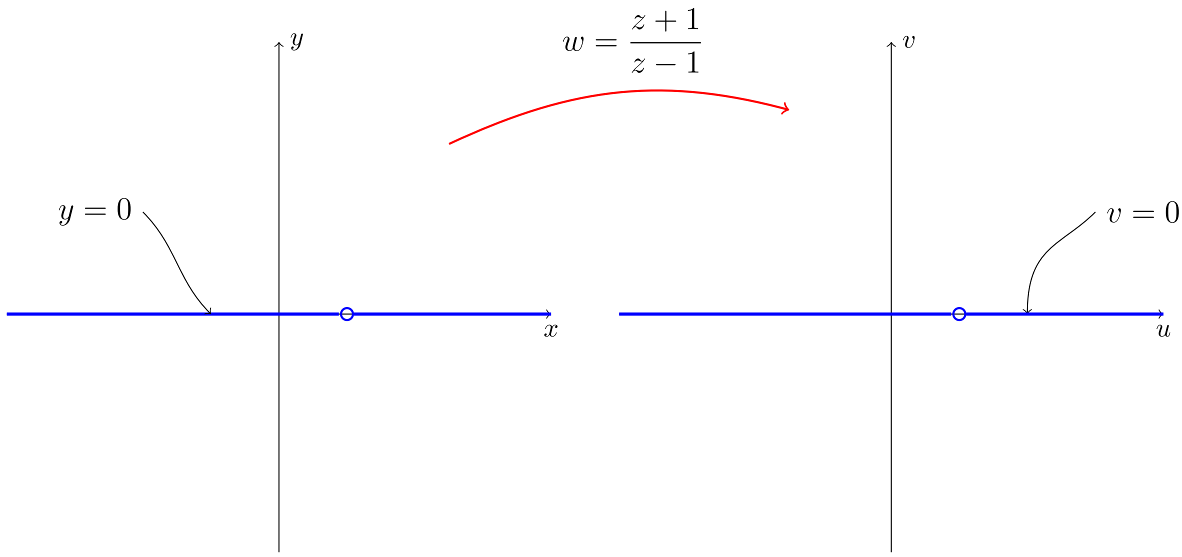
Solution.

a)

- L'équation paramétrique de l'axe des réels est $y = 0$ ou $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, alors

$$w = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}.$$

En tenant compte de $w = u + iv$, les équations paramétriques de la courbe image sont $u = \dfrac{x+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $v = 0$. Lorsque x varie en $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ on obtient dans le plan de la variable w, l'axe des réels $v = 0$ à l'exception du point $(1, 0)$ car pour tout $u \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ il existe $x = \dfrac{u+1}{u-1}$ solution de $u = \dfrac{x+1}{x-1}$.

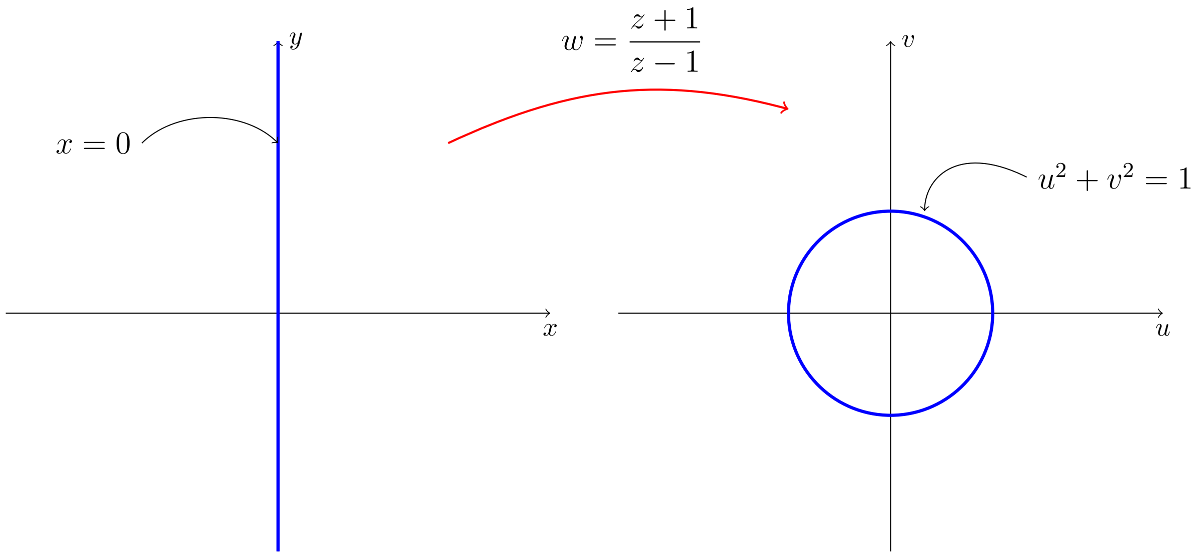


Plan de la variable $z = x + iy$ Plan de la variable $w = u + iv$

- L'équation paramétrique de l'axe des imaginaires est $x = 0$ ou $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, alors

$$w = \frac{z+1}{z-1} = \frac{iy+1}{iy-1} = \frac{y^2-1}{y^2+1} + i\frac{(-2y)}{y^2+1}, y \in \mathbb{R}.$$

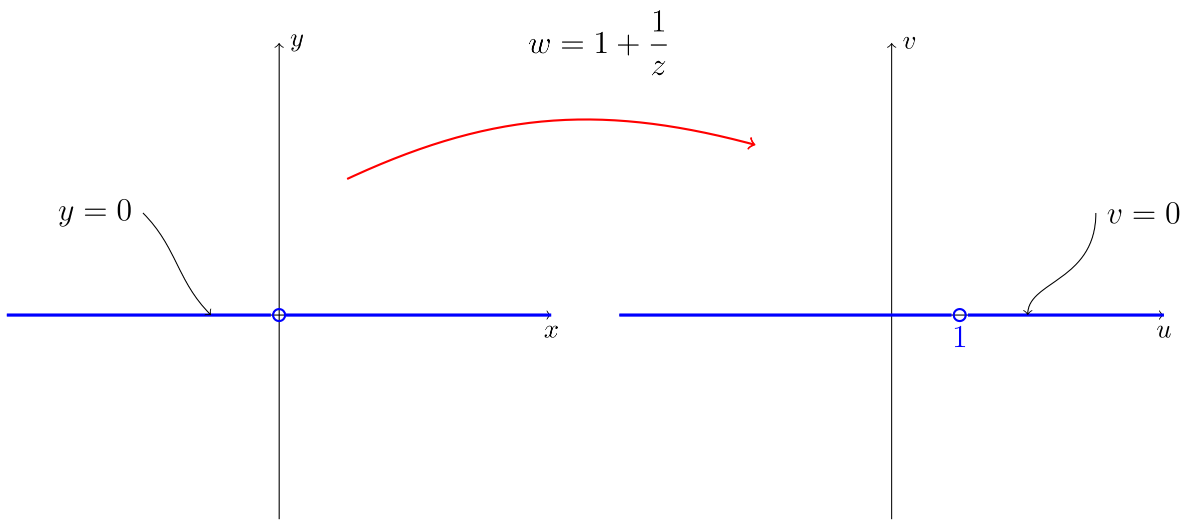
Les équations paramétriques de la courbe image sont $u = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $v = \dfrac{-2t}{t^2+1}, t \in \mathbb{R}$. En éliminant t entre ces deux équations, on trouve $u^2 + v^2 = 1$, qui est une équation d'un cercle de centre origine et de rayon 1.



Plan de la variable $z = x + iy$ Plan de la variable $w = u + iv$

b)

- Les points $z = x + iy$ dans l'axe des réels correspondent à $y = 0$ ou $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, alors
$w = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$. Lorsque x varie en $\mathbb{R}^*$ on obtient dans le plan de la variable w, l'ensemble $\{u, u \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\}$ car l'équation $1 + \frac{1}{x} = u$ admet une solution $x = \frac{1}{u-1}$ lorsque $u \neq 1$.

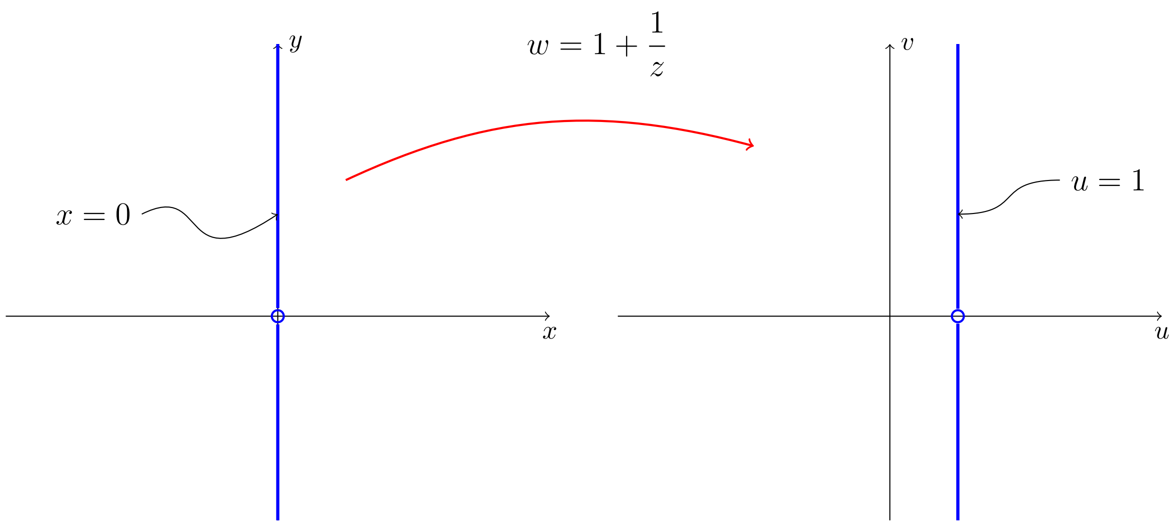


Plan de la variable $z = x + iy$ Plan de la variable $w = u + iv$

- L'axe des imaginaires correspond à $x = 0$ ou $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, alors

$$w = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{iy} = 1 - i\frac{1}{y}, y \in \mathbb{R}^*.$$

Lorsque y varie en $\mathbb{R}^*$ on obtient dans le plan de la variable w, la droite $u = 1$ exempté le point $(1,0)$ car pour tout $v \in \mathbb{R}$ l'équation $-\frac{1}{y} = v$ admet une solution $y = \frac{-1}{v}$ si $v \neq 0$.



Plan de la variable $z = x + iy$ Plan de la variable $w = u + iv$

Exercice 1.3

Soit S un carré du plan de la variable z de sommets $A = (0,0)\,, B = (1,0)\,, C = (1,1)$ et $D = (0,1)$. Déterminer le domaine du plan de la variable w transformé de S par

$$\textbf{a)}\ w = z^2,\ \textbf{b)}\ w = 1 + \frac{1}{z}.$$

Solution.

Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points

$$\{z \in \mathbb{C}\ \ /\ \ z = (1-t)\,z_0 + tz_1,\ \ t \in [0,1]\}\,.$$

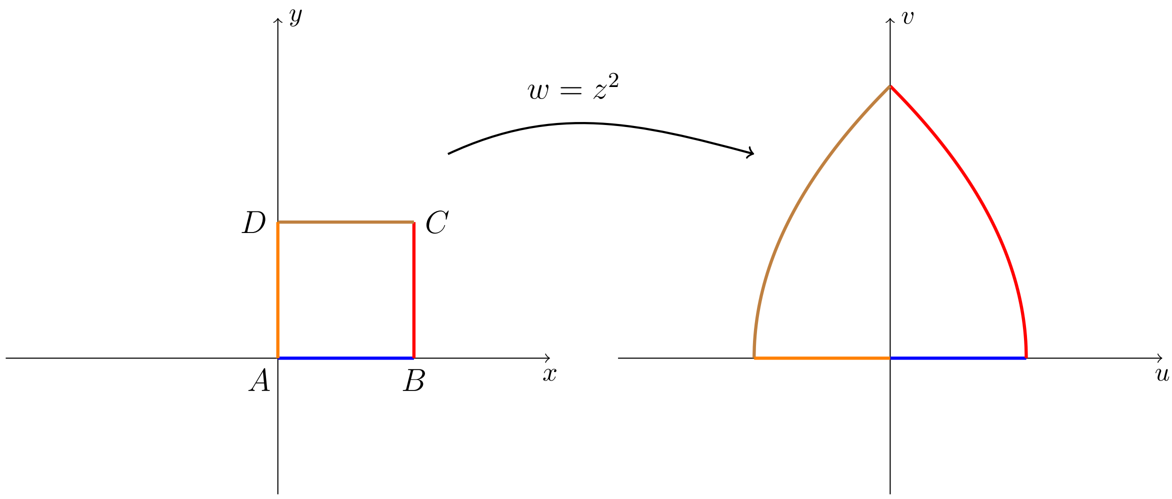
Les équations paramétriques des segments de droites $[AB]\,, [BC]\,, [CD]$ est $[DA]$ sont, respectivement, $z = t, z = 1 + it, z = 1 - t + i$ et $z = (1-t)\,i$ avec $t \in [0,1]\,.$

a) Les courbes transformées par $w = z^2$ de ces segments de droites ont pour équations, respectivement, $w = t^2, w = 1 - t^2 + 2it, w = t^2 - 2t + (2 - 2t)\,i$ et $w = -(1-t)^2$ avec $t \in [0,1]\,.$ En tenant compte de $w = u + iv$, les équations paramétriques des courbes images sont, respectivement,

$$\left\{u = t^2, v = 0\right\}, \left\{u = 1 - t^2, v = 2t\right\}, \left\{u = t^2 - 2t, v = 2 - 2t\right\}\ \text{ et }\ \left\{u = -(1-t)^2\,, v = 0\right\}$$

avec $t \in [0,1]$. En éliminant t entre u et v, on trouve, respectivement, les courbes

$$\{(u,0)\,, u \in [0,1]\}\,, \left\{u = 1 - \tfrac{1}{4}v^2, v \in [0,2]\right\}, \left\{u = \tfrac{1}{4}v^2 - 1, v \in [0,2]\right\} \text{ et } \{(u,0)\,, u \in [-1,0]\}\,.$$



Plan de la variable $z = x + iy$ Plan de la variable $w = u + iv$

b) Les courbes transformées par $w = 1 + \dfrac{1}{z}$ des segments de droites $[AB]\,, [BC]\,, [CD]$ est $[DA]$ ont pour équations, respectivement,

$$w = 1 + \frac{1}{t}, w = \frac{t^2+2}{t^2+1} - i\frac{t}{t^2+1}, w = \frac{(1-t)^2 + (1-t) + 1}{(1-t)^2+1} - i\frac{1}{(1-t)^2+1} \text{ et } w = 1 - i\frac{1}{(1-t)}$$

avec $t \in [0,1]$. En tenant compte de $w = u + iv$, les équations paramétriques des courbes images sont, respectivement,

$$\left\{u = 1 + \tfrac{1}{t}, v = 0\right\}, \left\{u = \tfrac{t^2+2}{t^2+1}, v = \tfrac{-t}{t^2+1}\right\}, \left\{u = \tfrac{(1-t)^2+(1-t)+1}{(1-t)^2+1}, v = \tfrac{-1}{(1-t)^2+1}\right\}$$

$$\text{et } \left\{u = 1, v = \tfrac{-1}{1-t}\right\} \text{ avec } t \in [0,1]\,.$$

- La courbe $\left\{u = 1 + \frac{1}{t}, v = 0\right\}$, $t \in [0,1]$ représente la demi droite $\{u \geq 2, v = 0\}$.
- En éliminant t entre u et v dans $\left\{u = \frac{t^2+2}{t^2+1}, v = \frac{-t}{t^2+1}\right\}$ on trouve

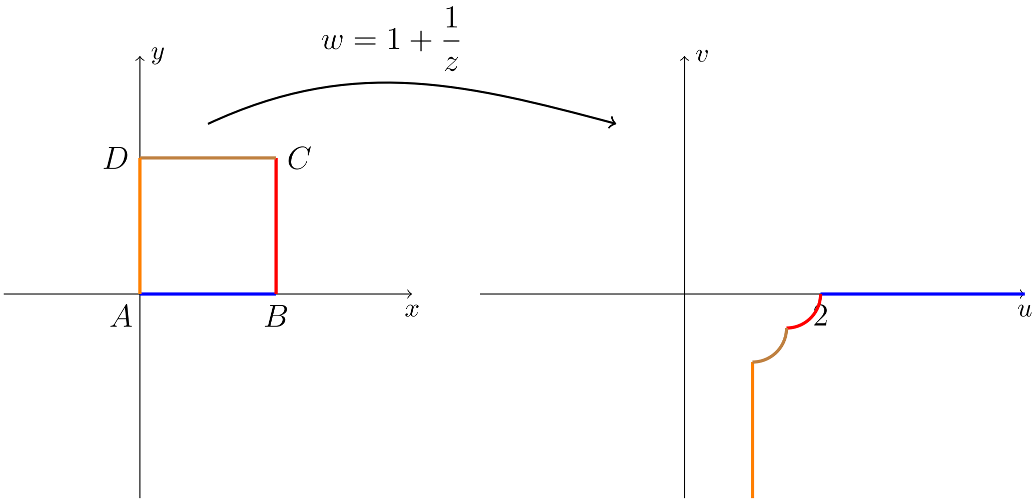
$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4} \text{ avec } u \in \left[\frac{3}{2}, 2\right],$$

  qui est un arc d'un cercle.
- En éliminant t entre u et v dans $\left\{u = \frac{(1-t)^2+(1-t)+1}{(1-t)^2+1}, v = \frac{-1}{(1-t)^2+1}\right\}$ on trouve

$$(u-1)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ avec } u \in \left[1, \frac{3}{2}\right],$$

  qui est aussi un arc d'un cercle.

- La courbe $\left\{u = 1, v = \frac{-1}{1-t}\right\}, t \in [0,1]$ représente la demi droite $\{u = 1, v \in]-\infty, -1]\}$.



Plan de la variable $z = x + iy$ Plan de la variable $w = u + iv$

Exercice 1.4

Mettre e^z sous la forme $u + iv$ et calculer $|e^z|$ dans chacun des cas

$$\textbf{a)}\ z = 3 + 4i,\ \textbf{b)}\ z = 2i\pi(1+i),\ \textbf{c)}\ z = 2 + 3\pi i,\ \textbf{d)}\ z = \frac{11\pi}{2}i.$$

Solution.

Par définition $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ où $z = x + iy$. Donc $|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x$.

a) $e^{3+4i} = e^3(\cos 4 + i \sin 4) = e^3 \cos 4 + ie^3 \sin 4$ et $|e^{3+4i}| = e^3$.

b) $e^{2i\pi(1+i)} = e^{-2\pi+2i\pi} = e^{-2\pi}(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) = e^{-2\pi}$ et $\left|e^{2i\pi(1+i)}\right| = e^{-2\pi}$.

c) $e^{2+3\pi i} = e^2(\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)) = -e^2$ et $|e^{2+3\pi i}| = e^2$.

d) $e^{\frac{11\pi}{2}i} = e^0\left(\cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)\right) = -i$ et $\left|e^{\frac{11\pi}{2}i}\right| = 1$.

Exercice 1.5

Déterminer la partie réelle et imaginaire des quantités suivantes :

$$\textbf{a)}\ f(z) = e^{-\pi z},\ \textbf{b)}\ f(z) = e^{z^2},\ \textbf{c)}\ f(z) = e^{\frac{1}{z}},\ \textbf{d)}\ f(z) = e^{z^3}.$$

Solution.

a) $$\begin{aligned} f(z) &= e^{-\pi z} = e^{-\pi(x+iy)} = e^{-\pi x}e^{-i\pi y} = e^{-\pi x}\left(\cos(\pi y) - i\sin(\pi y)\right) \\ &= e^{-\pi x}\cos(\pi y) - ie^{-\pi x}\sin(\pi y), \end{aligned}$$

b) $f(z) = e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+i2xy} = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$,

c) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+iy}} = e^{\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + ie^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$,

d) On a $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$. Alors

$$f(z) = e^{z^3} = e^{x^3-3xy^2}\cos\left(3x^2y - y^3\right) + ie^{x^3-3xy^2}\sin\left(3x^2y - y^3\right).$$

Exercice 1.6

Établir que

a) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$, **b)** $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, **c)** $\left|e^{iz}\right| = e^{-\operatorname{Im} z}$, **d)** $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|\, e^{|z|}$.

Solution.

a) Par définition $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ où $z = x + iy$. Donc si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)} = e^{x_1-x_2}\frac{(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 - i\sin y_2)}{(\cos y_2 + i\sin y_2)(\cos y_2 - i\sin y_2)} \\ &= e^{x_1-x_2}\frac{\cos y_1\cos y_2 + \sin y_1\sin y_2 + i(\cos y_2\sin y_1 - \cos y_1\sin y_2)}{\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2} \end{aligned}$$

Comme $\cos y_1\cos y_2 + \sin y_1\sin y_2 = \cos(y_1 - y_2)$, $\cos y_2\sin y_1 - \cos y_1\sin y_2 = \sin(y_1 - y_2)$ et $\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2 = 1$, alors

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{x_1-x_2}\left(\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)\right) = e^{x_1-x_2+i(y_1-y_2)} \\ &= e^{x_1+iy_1-(x_2+iy_2)} \\ &= e^{z_1-z_2}. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y) = e^x\left(\cos(-y) + i\sin(-y)\right) \\ &= e^{x+i(-y)} = e^{\overline{z}}. \end{aligned}$$

c) $|e^{iz}| = \left|e^{i(x+iy)}\right| = |e^{-y+ix}| = |e^{-y}(\cos x + i\sin x)| = e^{-y}\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = e^{-y} = e^{-\operatorname{Im} z}$.

d) Nous verrons plus tard que la fonction exponentielle complexe e^z est définie en étendant la série de Taylor de e^x à partir de valeurs réelles de x à des valeurs complexes :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Alors

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

En prenant la valeur absolue (module) de cette identité et en appliquant l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, nous obtenons

$$|e^z - 1| \leq |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + ... = e^{|z|} - 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^{|z|} - 1 &= |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^4}{4!} + ... \\ &\leq |z| + \frac{|z|^2}{1!} + \frac{|z|^3}{2!} + \frac{|z|^4}{3!} + ... \\ &= |z|\left(1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + ...\right) \\ &= |z|\, e^{|z|}. \end{aligned}$$

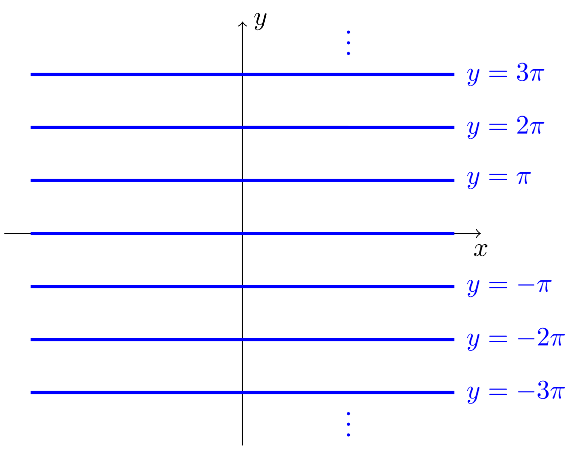
Exercice 1.7

Déterminer toutes les valeurs de z telles que

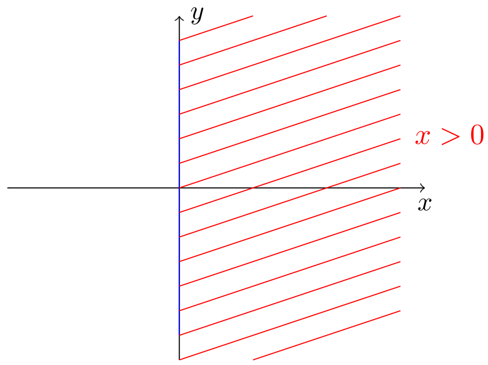
a) e^z est un réel **b)** $\left|e^{-z}\right| < 1$.

Solution.

a) Par définition $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ où $z = x + iy$. Donc la partie imaginaire de e^z s'annule si $e^x \sin y = 0$, ce qui est équivalent à $\sin y = 0$ car $e^x > 0$. D'où $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Alors e^z est un réel si et seulement si $z = x + ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, qui sont des droites $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, parallèles à l'axe des x.



b) On a $e^{-z} = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$. Donc $|e^{-z}| = e^{-x}$. Alors $|e^{-z}| < 1$ est équivalent à $e^{-x} < 1$ ou bien $x > 0$. D'où les valeurs de z vérifiant $|e^{-z}| < 1$ sont situés dans le demi-plan à droite de l'axe des y : $\{z = x + iy \ / \ x > 0\}$. Dans la figure ci-contre, c'est la partie hachurée.



Exercice 1.8

Résoudre dans le plan complexe les équations

$$\textbf{a)}\ e^z = 1,\ \ \textbf{b)}\ e^z = 4 + 3i,\ \ \textbf{c)}\ e^z = 0,\ \ \textbf{d)}\ e^z = -2.$$

Solution.

a) Si $e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y = 1$, alors on a les deux équations $e^x\cos y = 1$ et $e^x\sin y = 0$. Puisque $e^x > 0$, on aura $\sin y = 0$ ce qui implique que $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^x\cos(k\pi) = 1 \text{ ou bien } e^x = \frac{1}{\cos(k\pi)} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k.$$

Ceci est possible seulement si k est un nombre pair. Dans ce cas $x = 0$. Alors les racines de l'équation $e^z = 1$ sont $z_k = i(2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Autre méthode. Si $w = e^z$ on a $z = \operatorname{Log} w$. On obtient alors $z = \operatorname{Log} w$, et donc

$$z = \ln|1| + i\arg(1) = 0 + i(0 + 2k\pi) = i(2k)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) L'équation $e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y = 4 + 3i$ est équivalente à $e^x\cos y = 4$ et $e^x\sin y = 3$. En prenant le carré des deux dernières équations et en les additionnant, on obtient $e^{2x} = 4^2 + 3^2 = 25$ ou bien $e^x = 5$, ce qui donne $x = \ln 5$. Encore une fois en réarrangeant ces équations, on obtient $\operatorname{tg} y = \frac{3}{4}$, ce qui donne $y = \operatorname{Arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D'où les solutions sont $z = \ln 5 + i\left(\operatorname{Arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Autre méthode. $e^z = 4 + 3i$ implique

$$z = \operatorname{Log}(4+3i) = \ln|4+3i| + i\arg(4+3i) = \ln 5 + i\left(\operatorname{Arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

c) L'équation $e^z = 0$ n'admet pas de solutions car $e^x \cos y = 0$ et $e^x \sin y = 0$, ce qui implique que $\cos y = \sin y = 0$ et ceci n'est pas possible.

d) L'équation $e^z = -2$ implique $z = \operatorname{Log}(-2) = \ln|-2| + i \arg(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1.9

Mettre sous la forme $u + iv$ les nombres suivants

$$\textbf{a)}\ \sin(2\pi i),\ \textbf{b)}\ \operatorname{Sh}(3+4i),\ \textbf{c)}\ \operatorname{Ch}(3+4i),\ \textbf{d)}\ \sin(\pi i),\ \textbf{e)}\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi i\right).$$

Solution.

a) Par définition $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Alors $\sin(2\pi i) = \dfrac{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}{2i} = i\dfrac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2} = i \operatorname{Sh}(2\pi)$.

b) On a $\operatorname{Sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sh}(3+4i) &= \frac{e^{3+4i} - e^{-3-4i}}{2} = \frac{e^3 \cos 4 + ie^3 \sin 4 - e^{-3} \cos 4 + ie^{-3} \sin 4}{2} \\
&= \operatorname{Sh} 3 \cos 4 + i \operatorname{Ch} 3 \sin 4.
\end{aligned}$$

c) On a $\operatorname{Ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ch}(3+4i) &= \frac{e^{3+4i} + e^{-3-4i}}{2} = \frac{e^3 \cos 4 + ie^3 \sin 4 + e^{-3} \cos 4 - ie^{-3} \sin 4}{2} \\
&= \operatorname{Ch} 3 \cos 4 + i \operatorname{Sh} 3 \sin 4.
\end{aligned}$$

d) $\sin(\pi i) = \dfrac{e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}}{2i} = \dfrac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i} = i\dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = i \operatorname{Sh}(\pi)$.

e) Par définition $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi i\right) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}+\pi} + e^{-i\frac{\pi}{2}-\pi}}{2} = \frac{e^{\pi} \cos \frac{\pi}{2} + ie^{\pi} \sin \frac{\pi}{2} + e^{-\pi} \cos \frac{\pi}{2} - ie^{-\pi} \sin \frac{\pi}{2}}{2} \\
&= \frac{ie^{\pi} - ie^{-\pi}}{2} = i \operatorname{Sh} \pi.
\end{aligned}$$

Exercice 1.10

Montrer que

a) $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y$,

b) $\operatorname{Sh} z = \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y$,

c) $\operatorname{Ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Sh} z_2$,

d) $\operatorname{Sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Sh} z_2$,

e) $\operatorname{Ch}^2 z - \operatorname{Sh}^2 z = 1$,

f) $\operatorname{Ch}^2 z + \operatorname{Sh}^2 z = \operatorname{Ch}(2z)$.

Solution.

a) On a $\operatorname{Ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Ch} z &= \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x \cos y + ie^x \sin y + e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y}{2} \\ &= \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y.\end{aligned}$$

b) On a $\operatorname{Sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Sh} z &= \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x \cos y + ie^x \sin y - e^{-x} \cos y + ie^{-x} \sin y}{2} \\ &= \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y.\end{aligned}$$

c) On a $\operatorname{Ch}(z_1 + z_2) = \dfrac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{2}$. Comme $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Ch}(z_1 + z_2) &= \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{z-2}}{2} = \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{z-2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{z-2}}{4} \\ &= \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{z-2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{z-2}}{4} \\ &= \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right) \\ &= \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Sh} z_2.\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Sh}(z_1 + z_2) &= \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{z-2}}{2} = \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{z-2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{z-2}}{4} \\ &= \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{z-2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{z-2}}{4} \\ &= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= \operatorname{Sh} z_1 \operatorname{Ch} z_2 + \operatorname{Ch} z_1 \operatorname{Sh} z_2.$$

e) Si on prend $z_1 = -z_2 = z$ dans l'identité **c)** on trouve $\operatorname{Ch} 0 = \operatorname{Ch} z \operatorname{Ch}(-z) + \operatorname{Sh} z \operatorname{Sh}(-z)$. Comme $\operatorname{Ch} 0 = 1$, $\operatorname{Ch}(-z) = \operatorname{Ch} z$ et $\operatorname{Sh}(-z) = -\operatorname{Sh} z$ alors on obtient $\operatorname{Ch}^2 z - \operatorname{Sh}^2 z = 1$.

f) Si on prend $z_1 = z_2 = z$ dans l'identité **c)** on trouve $\operatorname{Ch}(2z) = \operatorname{Ch}^2 z + \operatorname{Sh}^2 z$.

Exercice 1.11

Montrer que pour tout $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

a) $\cos z = \cos z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi$ ou $z = -z_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

b) $\sin z = \sin z_0 \iff z = z_0 + 2k\pi$ ou $z = \pi - z_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

c) $\cos z = 0 \iff z \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$,

d) $\sin z = 0 \iff z \equiv 0\,[\pi]$.

Solution.

a) On a $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\cos z = \cos z_0 &\iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz_0} + e^{-iz_0}}{2} \\
&\iff e^{iz} - e^{iz_0} - e^{-iz_0} + e^{-iz} = 0 \\
&\iff e^{-iz}\left(e^{2iz} - e^{iz+iz_0} - e^{iz-iz_0} + 1\right) = 0 && \text{(en factorisant } e^{-iz}\text{)} \\
&\iff e^{-iz}\left(e^{iz-iz_0}e^{iz+iz_0} - e^{iz+iz_0} - e^{iz-iz_0} + 1\right) = 0 && \text{car } e^{2iz} = e^{iz-iz_0}e^{iz+iz_0} \\
&\iff e^{-iz}\left(e^{iz-iz_0} - 1\right)\left(e^{iz+iz_0} - 1\right) = 0
\end{aligned}$$

Puisque e^{-iz} ne s'annule pas alors soit $e^{iz-iz_0} = 1$ soit $e^{iz+iz_0} = 1$, ce qui donne

$$iz - iz_0 = \operatorname{Log} 1 = \ln|1| + i\arg(1) = i(2k\pi) \text{ ou } iz + iz_0 = i(2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

D'où $z = z_0 + 2k\pi$ ou $z = -z_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) On a $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Alors de même

$$\begin{aligned}
\sin z = \sin z_0 &\iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz_0} - e^{-iz_0}}{2i} \\
&\iff e^{iz} - e^{iz_0} + e^{-iz_0} - e^{-iz} = 0 \\
&\iff e^{-iz}\left(e^{2iz} - e^{iz+iz_0} + e^{iz-iz_0} - 1\right) = 0 \qquad \text{(en factorisant } e^{-iz}\text{)} \\
&\iff e^{-iz}\left(e^{iz-iz_0}e^{iz+iz_0} - e^{iz+iz_0} + e^{iz-iz_0} - 1\right) = 0 \qquad \text{car } e^{2iz} = e^{iz-iz_0}e^{iz+iz_0} \\
&\iff e^{-iz}\left(e^{iz-iz_0} - 1\right)\left(e^{iz+iz_0} + 1\right) = 0
\end{aligned}$$

Puisque e^{-iz} ne s'annule pas alors soit $e^{iz-iz_0} = 1$ soit $e^{iz+iz_0} = -1$, ce qui donne

$$iz - iz_0 = i\,(2k\pi) \text{ ou } iz + iz_0 = \operatorname{Log} 1 = \ln|-1| + i\arg(-1) = i\,(\pi + 2k\pi)\,,\ k \in \mathbb{Z}.$$

D'où

$$z = z_0 + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - z_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Si on prend $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ dans l'identité **a)** on trouve

$$\begin{aligned}
\cos z = 0 &\iff z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff z \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\,.
\end{aligned}$$

d) Si on prend $z_0 = 0$ dans l'identité **b)** on trouve

$$\begin{aligned}
\sin z = 0 &\iff z = 0 + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff z \equiv 0\,[\pi]\,.
\end{aligned}$$

Exercice 1.12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\textbf{a)}\ \sin z = 100,\ \textbf{b)}\ \operatorname{Ch} z = 0,\ \textbf{c)}\ \operatorname{Sh} z = 0,\ \textbf{d)}\ \operatorname{Ch} z = -1.$$

Solution.

a) Tout d'abord, nous séparons les parties réelles et imaginaires de la fonction $\sin z$. Nous avons

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} = \frac{(e^{-y}-e^{y})\cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y}+e^{y})\sin x}{2i}\\
&= i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x + \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x\\
&= \operatorname{Ch} y \sin x + i \operatorname{Sh} y \cos x.
\end{aligned}
$$

Alors $\sin z = 100$ entraîne $\operatorname{Ch} y \sin x = 100$ et $\operatorname{Sh} y \cos x = 0$. Donc d'après la deuxième équation soit $y = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans la première équation on obtient

$$y = 0 \text{ et } \sin x = 100$$

ou

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \operatorname{Ch} y = \frac{100}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = \frac{100}{(-1)^k}.$$

Le premier cas n'est pas possible car $|\sin x| \leq 1$. Dans le deuxième cas k soit pair car $\operatorname{Ch} y \geq 1$. D'où les racines cherchées sont

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i \operatorname{Argch}(100),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. D'après l'exercice précédent 1.11, si on prend $z_0 = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{Argch}(100)$, on trouve

$$z = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{Argch}(100) + 2k\pi \text{ ou } z = \pi - \frac{\pi}{2} - i \operatorname{Argch}(100) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

b) D'après l'exercice 1.10, $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y$. Donc l'équation $\operatorname{Ch} z = 0$ est équivalente à $\operatorname{Ch} x \cos y = 0$ et $\operatorname{Sh} x \sin y = 0$.

Si $\operatorname{Sh} x = 0$, *i.e.* $x = 0$, on aura

$$\cos y = 0 \implies y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\sin y = 0$ *i.e.* $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\operatorname{Ch} x \cos(k\pi) = 0$ ce qui n'est pas possible.

Alors, les racines de l'équation $\operatorname{Ch} z = 0$ sont

$$z_k = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. $\operatorname{Ch} z = 0 \iff \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \iff e^{2z} = -1$. Alors

$$2z = \operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = i(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

ou bien

$$z_k = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) D'après l'exercice 1.10, $\operatorname{Sh} z = \operatorname{Sh} x \cos y + i \operatorname{Ch} x \sin y$. Donc l'équation $\operatorname{Sh} z = 0$ est équivalente à $\operatorname{Sh} x \cos y = 0$ et $\operatorname{Ch} x \sin y = 0$.

Si $\operatorname{Sh} x = 0$, *i.e.* $x = 0$, on aura

$$\sin y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\cos y = 0$ *i.e.* $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient $\operatorname{Ch} x \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ ce qui n'est pas possible.
Alors, les racines de l'équation $\operatorname{Sh} z = 0$ sont

$$z_k = ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. $\operatorname{Sh} z = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Longleftrightarrow e^{2z} = 1$. Alors

$$2z = \operatorname{Log} 1 = \ln|1| + i \arg(1) = i(2k\pi), \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

ou bien

$$z_k = ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

d) On a $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y$. Donc l'équation $\operatorname{Ch} z = -1$ est équivalente à $\operatorname{Ch} x \cos y = -1$ et $\operatorname{Sh} x \sin y = 0$.

Si $\operatorname{Sh} x = 0$, *i.e.* $x = 0$, on aura

$$\cos y = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = \pi + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\sin y = 0$ *i.e.* $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\operatorname{Ch} x \cos(k\pi) = -1 \Longrightarrow \operatorname{Ch} x = \frac{-1}{\cos(k\pi)} = \frac{-1}{(-1)^k} = (-1)^{k+1}$$

ce qui donne $x = 0$ dans le cas k impair et aucun x si k pair.

Alors, les racines de l'équation $\operatorname{Ch} z = -1$ sont

$$z_k = i(\pi + 2k\pi) \;\text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Autre méthode. $\operatorname{Ch} z = -1 \Longleftrightarrow \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = -1 \Longleftrightarrow \dfrac{e^{-z}}{2}(e^z + 1)^2 = 0$. Alors $e^z = -1$ et donc

$$z = \operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 1.13

Montrer que toutes les racines des équations $\sin z = a$ et $\cos z = a$ où $-1 \leq a \leq 1$, sont réelles.

Solution.

L'équation $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = a$ est équivalente à $(e^{iz})^2 - 2iae^{iz} - 1 = 0$, qui est une équation quadratique en e^{iz}. En la résolvant on obtient

$$e^{iz} = \pm\sqrt{1-a^2} + ia.$$

Donc

$$iz = \operatorname{Log}\left(\pm\sqrt{1-a^2} + ia\right) = \ln\left|\pm\sqrt{1-a^2} + ia\right| + i\arg\left(\pm\sqrt{1-a^2} + ia\right).$$

Comme $a \in [-1, 1]$, alors $\ln\left|\pm\sqrt{1-a^2} + ia\right| = \ln 1 = 0$, donc

$$z = \arg\left(\pm\sqrt{1-a^2} + ia\right) \in \mathbb{R}.$$

De même l'équation $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = a$ est équivalente à $(e^{iz})^2 - 2ae^{iz} + 1 = 0$, ce qui donne

$$e^{iz} = a \pm i\sqrt{1-a^2}.$$

Comme précédemment $\ln\left|a \pm i\sqrt{1-a^2}\right| = \ln 1 = 0$ car $a \in [-1, 1]$, donc

$$z = \frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(a \pm i\sqrt{1-a^2}\right) = \arg\left(a \pm i\sqrt{1-a^2}\right) \in \mathbb{R}.$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 1.14

Montrer que pour tout $z = x + iy$

a) $|\operatorname{Sh} y| \leq |\cos z| \leq |\operatorname{Ch} y|$, **b)** $|\operatorname{Sh} y| \leq |\sin z| \leq |\operatorname{Ch} y|$.

Solution.

Nous pouvons calculer le module d'un nombre complexe w, soit par définition en identifiant ses parties réelles et imaginaires ou par la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$.

Nous allons utiliser la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$ ici.

a) On a

$$|\cos z|^2 = \cos z\overline{\cos z} = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2}\right) = \frac{e^{i(z-\overline{z})} + e^{i(z+\overline{z})} + e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4}.$$

Puisque $z - \overline{z} = 2iy$ et $z + \overline{z} = 2x$, on aura

$$|\cos z|^2 = \frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Ch}(2y) + \cos(2x)\right).$$

Par les transformations $\operatorname{Ch}(2y) = 2\operatorname{Ch}^2 y - 1$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, on obtient la relation

$$|\cos z|^2 = \frac{1}{2}\left(2\operatorname{Ch}^2 y - 1 + 1 - 2\sin^2 x\right) = \operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x.$$

Comme $-1 \leq -\sin^2 x \leq 0$, alors $\operatorname{Sh}^2 y = \operatorname{Ch}^2 y - 1 \leq \operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x \leq \operatorname{Ch}^2 y$. D'où le résultat demandé

$$|\operatorname{Sh} y| \leq |\cos z| \leq |\operatorname{Ch} y|.$$

b) On a

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 = \sin z \overline{\sin z} &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i}\right) = \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} - e^{-i(z+\bar{z})} + e^{-i(z-\bar{z})}}{4} \\
&= \frac{e^{-2y} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Ch}(2y) - \cos(2x)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant les transformations $\operatorname{Ch}(2y) = 2\operatorname{Ch}^2 y - 1$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, on trouve

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{2}\left(2\operatorname{Ch}^2 y - 1 - \left(2\cos^2 x - 1\right)\right) = \operatorname{Ch}^2 y - \cos^2 x.$$

Comme précédemment $-1 \leq -\cos^2 x \leq 0$ implique que $|\operatorname{Sh} y| \leq |\sin z| \leq |\operatorname{Ch} y|$.

Nous pouvons conclure des inégalités ci-dessus que les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ ne sont pas bornées dans le domaine complexe.

Exercice 1.15

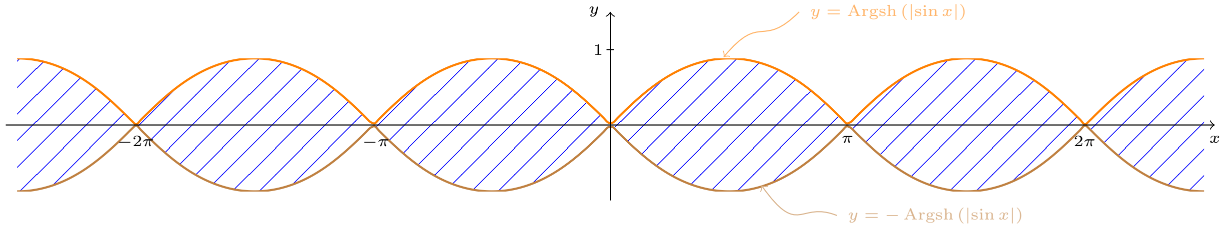
Déterminer tout les points z de $\mathbb{C}$ qui vérifie $|\cos z| \leq 1$.

Solution.

D'après la solution de l'exercice précédent 1.14, on a $|\cos z|^2 = \operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x$. Alors $|\cos z| \leq 1$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x \leq 1 &\iff \operatorname{Sh}^2 y = \operatorname{Ch}^2 y - 1 \leq \sin^2 x \\
&\iff -|\sin x| \leq \operatorname{Sh} y \leq |\sin x| \\
&\iff -\operatorname{Argsh}(|\sin x|) \leq y \leq \operatorname{Argsh}(|\sin x|)
\end{aligned}$$

Dans la figure ci-dessous, il s'agit de la partie hachurée.



Exercice 1.16

Déterminer les valeurs de $\text{Log}\, z$ dans chacun des cas, où Log désigne la détermination principale du logarithme :

$$\textbf{a)}\ z = -11,\ \textbf{b)}\ z = 4+4i,\ \textbf{c)}\ z = 4-4i,\ \textbf{d)}\ z = 1 \pm i,\ \textbf{e)}\ z = ei.$$

Solution.

On rappelle que la fonction $z \mapsto \text{Log}\, z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned}\text{Log}\, z &= \ln|z| + i \arg z \\ &= \ln|z| + i\left(\text{Arg}\, z + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z},\ \text{où}\ -\pi < \text{Arg}\, z \leq \pi.\end{aligned}$$

La détermination **principale** ou valeur principale de $\text{Log}\, z$ est souvent définie par

$$\text{Log}\, z = \ln|z| + i\, \text{Arg}\, z,\ \text{où}\ -\pi < \text{Arg}\, z \leq \pi \text{ ou } 0 \leq \text{Arg}\, z < 2\pi.$$

a) On a $\text{Log}\,(-11) = \ln|11| + i\, \text{Arg}\,(-11) = \ln 11 + i\pi$.

b) $\text{Log}\,(4+4i) = \ln|4+4i| + i\, \text{Arg}\,(4+4i) = \frac{5}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

c) $\text{Log}\,(4-4i) = \ln|4-4i| + i\, \text{Arg}\,(4-4i) = \frac{5}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$.

d) $\text{Log}\,(1-i) = \ln|1-i| + i\, \text{Arg}\,(1-i) = \ln 2 - i\frac{\pi}{4}$,

$\text{Log}\,(1+i) = \ln|1+i| + i\, \text{Arg}\,(1+i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$,

e) $\operatorname{Log}(ei) = \ln|ei| + i\operatorname{Arg}(ei) = 1 + i\frac{\pi}{2}$.

Exercice 1.17

Déterminer toutes les valeurs de $\operatorname{Log} z$ dans les cas suivants :

$$\textbf{a)}\ z = e,\ \textbf{b)}\ z = 1,\ \textbf{c)}\ z = -7,\ \textbf{d)}\ z = e^i,\ \textbf{e)}\ z = 4 + 3i.$$

Puis montrer que l'ensemble des valeurs de $\operatorname{Log}(i^2)$ est différent de l'ensemble des valeurs de $2\operatorname{Log}(i)$.

Solution.

a) $\operatorname{Log}(e) = \ln|e| + i\arg(e) = 1 + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\operatorname{Log}(1) = \ln|1| + i\arg(1) = 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\operatorname{Log}(-7) = \ln|-7| + i\arg(-7) = \ln 7 + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

d) $\operatorname{Log}(e^i) = \ln|e^i| + i\arg(e^i) = \ln 1 + i(1 + 2k\pi) = i(1 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

e) $\operatorname{Log}(4 + 3i) = \ln|4 + 3i| + i\arg(4 + 3i) = \ln 5 + i\left(\operatorname{Arctg}\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

En ce qui concerne la deuxième partie de l'exercice, on a

$$\operatorname{Log}\left(i^2\right) = \operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

et

$$2\operatorname{Log}(i) = 2(\ln|i| + i\arg(i)) = 2i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i(\pi + 4k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Notons que l'ensemble des valeurs de $2\operatorname{Log}(i)$ est strictement inclus dans l'ensemble des valeurs de $\operatorname{Log}(i^2)$.

Exercice 1.18

Résoudre les équations suivantes :

$$\textbf{a)}\ \operatorname{Log} z = -i\frac{\pi}{2},\ \textbf{b)}\ \operatorname{Log} z = 4 - 3i,\ \textbf{c)}\ \operatorname{Log} z = e - \pi i.$$

Solution.

On rappelle que la fonction $z \mapsto \operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^z : $\operatorname{Log} z = w \Longleftrightarrow z = e^w$. Alors

a) $z = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$.

b) $z = e^{4-3i} = e^4\left(\cos(-3) + i\sin(-3)\right) = e^4\cos 3 - ie^4\sin 3$.

c) $z = e^{e-\pi i} = e^e\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = -e^e$.

Exercice 1.19

Trouver la valeur principale de

$$\textbf{a)}\ (1+i)^{1-i},\ \textbf{b)}\ (1-i)^{1+i},\ \textbf{c)}\ i^{\frac{i}{2}},\ \textbf{d)}\ (-1)^{2-i},\ \textbf{e)}\ (3+4i)^{\frac{1}{3}}.$$

Solution.

La fonction $z \mapsto z^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$, est définie par $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z} = e^{\alpha(\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))}$, $k \in \mathbb{Z}$. La valeur principale est $e^{\alpha(\ln|z| + i\operatorname{Arg} z)}$ obtenue en donnant à k la valeur 0. Alors

a) $(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\operatorname{Log}(1+i)} = e^{(1-i)\{\ln|1+i| + i\arg(1+i)\}}$

$$= e^{(1-i)\left\{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}} = e^{\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} + 2\pi k + i\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + 2\pi k\right)}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + 2\pi k\right)\right\}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)\right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

La valeur principale est $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)\right) \simeq 2.8079 + 1.3179i$.

b) $(1-i)^{1+i} = e^{(1+i)\operatorname{Log}(1-i)} = e^{(1+i)\{\ln|1-i| + i\arg(1-i)\}}$

$$= e^{(1+i)\left\{\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}} = e^{\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} - 2\pi k + i\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} + 2\pi k\right)}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi k}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} + 2\pi k\right)\right\}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} - 2\pi k}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)\right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

La valeur principale est $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)\right) \simeq 2.8079 - 1.3179i$

c) $i^{\frac{i}{2}} = e^{\frac{i}{2}\operatorname{Log} i} = e^{\frac{i}{2}(\ln|i| + i\arg i)} = e^{\frac{i}{2}\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}$.

d) $(-1)^{2-i} = e^{(2-i)\,\mathrm{Log}(-1)} = e^{(2-i)\,\{\ln|-1|+i\arg(-1)\}} = e^{(2-i)\,i(\pi+2k\pi)}$

$$= e^{\pi+2k\pi+i(2\pi+4k\pi)} = e^{\pi+2k\pi}\left\{\cos\left(2\pi+4k\pi\right)+i\sin\left(2\pi+4k\pi\right)\right\}$$

$$= e^{\pi+2k\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

La valeur principale est e^{π}.

e) $(3+4i)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\,\mathrm{Log}(3+4i)} = e^{\frac{1}{3}(\ln|3+4i|+i\arg(3+4i))}$

$$= e^{\frac{1}{3}\left(2\ln 5+i\left(\mathrm{Arctg}\,\frac{4}{3}+2k\pi\right)\right)} = e^{\frac{2}{3}\ln 5+i\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{4}{3}+\frac{2}{3}k\pi\right)}$$

$$= \sqrt[3]{25}\left\{\cos\left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{4}{3}+\tfrac{2}{3}k\pi\right)+i\sin\left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Arctg}\,\tfrac{4}{3}+\tfrac{2}{3}k\pi\right)\right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

La valeur principale est $\sqrt[3]{25}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{4}{3}\right)\right) \simeq 2.7854+0.88949i$.