

Exercice 1 : En utilisant les règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f(z) &= (2-i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6, & f(z) &= 5(iz)^3 - 10z^2 + 3 - 4i, \\ f(z) &= (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i), & f(z) &= (z^2 + 2z - 7i)^2(z^4 - 4iz)^3, \\ f(z) &= \frac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}, & f(z) &= -5iz^2 + \frac{2+i}{z^2}, \\ f(z) &= (z^4 - 2iz^2 + z)^{10}, & f(z) &= \left(\frac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i} \right)^3. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Montrer que la fonction $f(z) = x + 4iy$, n'est dérivable en aucun point.

Exercice 3 : Soit la fonction $f(z) = |z|^2$, montrer que f est dérivable qu'à l'origine (même chose pour $g(z) = \bar{z}$ et $h(z) = |z|$).

Exercice 4 : Montrer que la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \\ \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & z \neq 0 \end{cases}$$

est non dérivable à l'origine. (on pourra considérer les chemins le long des axes)

Exercice 5 : Etudier l'holomorphie des fonctions suivantes (en précisant son domaine.)

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3, & f(z) &= 3z^2 + 5z - 6i, \\ f(z) &= \Re(z), & f(z) &= e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y, \\ f(z) &= x^2 + y^2, & f(z) &= x + \sin x \cosh y + i(y + \cos x \sinh y), \\ f(z) &= y + ix, & f(z) &= 4z - 6\bar{z} + 3, \\ f(z) &= \bar{z}^2, & f(z) &= e^{x^2 - y^2} \cos 2xy + ie^{x^2 - y^2} \sin 2xy, \\ f(z) &= 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1), & f(z) &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ f(z) &= \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, & f(z) &= \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} + i \frac{y^3 + x^2y - y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Exercice 6 : Déterminer les constantes a , b , c et d de telle sorte que la fonction f soit holomorphe dans chacun des cas

$$f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3), \quad f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2).$$

Exercice 7 : En utilisant les conditions de Cauchy - Riemann montrer que les fonctions suivantes ne sont pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, néanmoins elle sont dérivables sur les chemins indiquées

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 + y^2 + 2ixy, \text{ l'axe des abscisses} & f(z) &= 3x^2y^2 - 6ix^2y^2, \text{ les deux axes} \\ f(z) &= x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y), \text{ les deux axes} & f(z) &= x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x), y = x + 2 \end{aligned}$$

Exercice 8 : Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction complexe, on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$,

1. Montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta$$

2. Exprimer les conditions de Cauchy - Riemann en coordonnées polaires et montrer que

$$f'(z) = (\cos \theta - i \sin \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r}$$

3. Appliquer les résultats trouvés pour étudier l'holomorphie des fonctions:

$$f(z) = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r} \quad , \quad g(z) = 5r \cos \theta + r^4 \cos 4\theta + i(5r \sin \theta + r^4 \sin 4\theta)$$

Exercice 9 : Soient U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes

1. f est constante.
2. $P = \Re(f)$ est constante.
3. $Q = \Im(f)$ est constante.
4. $\bar{f}$ est holomorphe sur U .
5. $|f|$ est constante.

Exercice 10 : Vérifier que les fonctions données sont harmoniques et déterminer leurs conjuguées dans chacun des cas suivants

$$\begin{aligned} u(x, y) = x & \quad , \quad u(x, y) = 2x - 2xy & , \quad f(z) = x^2 - y^2 \\ u(x, y) = -e^{-x} \sin y & \quad , \quad u(x, y) = x^3 - 3xy^2 & , \quad u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y) \end{aligned}$$

Exercice 11 : Vérifier que la fonction u donnée est harmonique et déterminer sa conjuguée harmonique v , puis expliciter la fonction complexe $f(z) = u + iv$ en fonction de z

$$u(x, y) = xy + x + 2y \quad f(2i) = -1 + 5i \quad , \quad u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x \quad f(1 + i) = 5 + 4i$$

Exercice 12 : Soit v la fonction définie par $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

1. Montrer que v est harmonique dans un domaine D qui ne contient pas l'origine,
2. Trouver une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qui soit holomorphe sur le domaine D ,
3. Exprimer f en fonction de z .

Exercice 13 : Soit $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ une fonction holomorphe sur un domaine D , on utilisant les conditions de Cauchy - Riemann sous forme polaire montrer que u et v satisfont à l'équation de Laplace sous forme polaire

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Application: montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques: $u(x, y) = r^3 \cos 3\theta$, $v(x, y) = \frac{10r^2 - \sin 2\theta}{r^2}$

Exercice 14 : Trouver toutes les fonctions conjuguées harmoniques qui correspondent aux formes suivantes:

$$u = F(x^2 + y^2) \quad u = F(ax + by) \quad u = F(xy) \quad u = F(y/x)$$

Exercice 15 : Déterminer les fonctions holomorphes $Z = P + iQ$ de la variable $z = x + iy$ telles que:

1. P ne dépende que de $x \cos \varphi + y \sin \varphi$ où φ est un angle donné.
2. $P^2 + Q^2$ ne dépende que de x .
3. $\frac{P}{Q}$ ne dépende que de x .