Chapitre 3

Intégration et formule de Cauchy

3.1 Exercices

Exercice 3.1

Déterminer et représenter graphiquement les chemins suivants.

- a) $z(t) = (1 + \frac{1}{2i})t$, $2 \leq t \leq 5$, b) $z(t) = 3 + i + (1 - i)t$, $0 \leq t \leq 3$,
c) $z(t) = t + (1 - t)^2 i$, $-1 \leq t \leq 1$, d) $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}$, $0 \leq t \leq 2$,
e) $z(t) = 2 + 4e^{\frac{\pi}{2} i t}$, $0 \leq t \leq 2$, f) $z(t) = 2 \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 3.2

Donner une représentation paramétrique des chemins suivants.

- a) Le segment allant de $(-1, 1)$ vers $(1, 3)$.
b) L'arc de courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, allant de $(1, 1)$ à $(5, \frac{1}{5})$.
c) Le demi cercle supérieur $|z - 2 + i| = 2$ de $(4, -1)$ à $(0, -1)$.
d) L'ellipse d'équation $4(x - 2)^2 + 5(y + 1)^2 = 20$.
e) La branche d'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 4$ contenant $(2, 0)$.
f) L'arc de la parabole d'équation $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ avec $-2 \leq x \leq 2$.

Exercice 3.3

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

- a) $\int_C e^z dz$ où C est le chemin le plus court reliant $i\pi$ à $2i\pi$.
- b) $\int_C \operatorname{Re} z dz$ où C est l'arc de la parabole $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$ de $1+i$ à $3+3i$.
- c) $\int_C \cos(2z) dz$ où C est le demi cercle $|z| = \pi, x \geq 0$ de $-i\pi$ vers $i\pi$.
- d) $\int_C \operatorname{Re}(z^2) dz$ où C est le carré de sommets $0, 1, 1+i$ et i orienté positivement.
- e) $\int_C z e^{z^2} dz$ où C est le chemin reliant 1 à i le long des axes.
- f) $\int_C \operatorname{Im}(z^2) dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1$ et i orienté positivement.
- g) $\int_C \left(\frac{5}{z-2i} - \frac{6}{(z-2i)^2} \right) dz$ où C est le cercle $|z-2i| = 4$ orienté positivement.

Exercice 3.4

Calculer l'intégrale $\int_{|z|=R} f(z) dz$ dans chacun des cas suivants.

- a) $f(z) = e^{z^2}$, b) $f(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right)$, c) $f(z) = \frac{1}{z}$,
d) $f(z) = \operatorname{Im} z$, e) $f(z) = \frac{1}{|z|^2}$, f) $f(z) = \frac{1}{4z-3}$.

Exercice 3.5

Évaluer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

- a) $\int_C \operatorname{Log}(1-z) dz$ où C est le parallélogramme de sommets $-1-i, -i, 1+i$ et i .
- b) $\int_C \operatorname{coth}\left(\frac{1}{2}z\right) dz$ où C est le cercle $\left|z - \frac{\pi}{2}i\right| = 1$
- c) $\int_C \frac{\sin z}{z+2iz} dz$ où C est le cercle $|z-4-2i| = \frac{11}{2}$.
- d) $\int_C \frac{1}{z-3i} dz$ où C est le cercle $|z| = \pi$.
- e) $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 2 \text{ ou } |z|^- = 1\}$.
- f) $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 1 \text{ ou } |z|^- = 3\}$.
- g) $\int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4-16} dz$ où C est le carré de sommets $-i, 1, i$ et -1 .
- h) $\int_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz$ où C est le cercle $|z-2| = 4$.

Exercice 3.6

Calculer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

- a) $\int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz$ où C est l'ellipse de l'équation $4x^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- b) $\int_C \frac{z}{z^2 + 4z + 3} dz$ où C est le cercle $|z + 1| = 2$.
- c) $\int_C \frac{z + 2}{z - 2} dz$ où C est le cercle $|z - 1| = 2$.
- d) $\int_C \frac{\text{Ch}(z^2 - \pi i)}{z - \pi i} dz$ où C est le carré de sommets $2, 2 + 4i, -2 + 4i$ et -2 .
- e) $\int_C \frac{\text{tg } z}{z - i} dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1 + 2i$ et $-1 + 2i$.
- f) $\int_C \frac{\text{Log}(z + 1)}{z^2 + 1} dz$ où C est le cercle $|z - i| = \frac{7}{5}$.