

Chapitre 3

Intégration et formule de Cauchy

3.1 Exercices

Exercice 3.1

Déterminer et représenter graphiquement les chemins suivants.

- a) $z(t) = \left(1 + \frac{1}{2i}\right)t, \quad 2 \leq t \leq 5,$ b) $z(t) = 3 + i + (1 - i)t, \quad 0 \leq t \leq 3,$
c) $z(t) = t + (1 - t)^2 i, \quad -1 \leq t \leq 1,$ d) $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 2,$
e) $z(t) = 2 + 4e^{\frac{\pi}{2} i t}, \quad 0 \leq t \leq 2,$ f) $z(t) = 2 \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Exercice 3.2

Donner une représentation paramétrique des chemins suivants.

- a) Le segment allant de $(-1, 1)$ vers $(1, 3)$.
b) L'arc de courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, allant de $(1, 1)$ à $\left(5, \frac{1}{5}\right)$.
c) Le demi cercle supérieur $|z - 2 + i| = 2$ de $(4, -1)$ à $(0, -1)$.
d) L'ellipse d'équation $4(x - 2)^2 + 5(y + 1)^2 = 20$.
e) La branche d'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 4$ contenant $(2, 0)$.
f) L'arc de la parabole d'équation $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ avec $-2 \leq x \leq 2$.

Exercice 3.3

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

- a) $\int_C e^z dz$ où C est le chemin le plus court reliant $i\pi$ à $2i\pi$.
- b) $\int_C \operatorname{Re} z dz$ où C est l'arc de la parabole $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$ de $1+i$ à $3+3i$.
- c) $\int_C \cos(2z) dz$ où C est le demi cercle $|z| = \pi, x \geq 0$ de $-i\pi$ vers $i\pi$.
- d) $\int_C \operatorname{Re}(z^2) dz$ où C est le carré de sommets $0, 1, 1+i$ et i orienté positivement.
- e) $\int_C ze^{z^2} dz$ où C est le chemin reliant 1 à i le long des axes.
- f) $\int_C \operatorname{Im}(z^2) dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1$ et i orienté positivement.
- g) $\int_C \left(\frac{5}{z-2i} - \frac{6}{(z-2i)^2} \right) dz$ où C est le cercle $|z-2i| = 4$ orienté positivement.

Exercice 3.4

Calculer l'intégrale $\int_{|z|=R} f(z) dz$ dans chacun des cas suivants.

- a) $f(z) = e^{z^2}$, b) $f(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right)$, c) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$,
- d) $f(z) = \operatorname{Im} z$, e) $f(z) = \frac{1}{|z|^2}$, f) $f(z) = \frac{1}{4z-3}$.

Exercice 3.5

Évaluer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

- a) $\int_C \operatorname{Log}(1-z) dz$ où C est le parallélogramme de sommets $-1-i, -i, 1+i$ et i .
- b) $\int_C \coth\left(\frac{1}{2}z\right) dz$ où C est le cercle $\left|z - \frac{\pi}{2}i\right| = 1$
- c) $\int_C \frac{\sin z}{z+2iz} dz$ où C est le cercle $|z-4-2i| = \frac{11}{2}$.
- d) $\int_C \frac{1}{z-3i} dz$ où C est le cercle $|z| = \pi$.
- e) $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 2 \text{ ou } |z|^- = 1\}$.
- f) $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 1 \text{ ou } |z|^- = 3\}$.
- g) $\int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4-16} dz$ où C est le carré de sommets $-i, 1, i$ et -1 .
- h) $\int_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz$ où C est le cercle $|z-2| = 4$.

Exercice 3.6

Calculer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

- a) $\int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz$ où C est l'ellipse de l'équation $4x^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- b) $\int_C \frac{z}{z^2 + 4z + 3} dz$ où C est le cercle $|z + 1| = 2$.
- c) $\int_C \frac{z + 2}{z - 2} dz$ où C est le cercle $|z - 1| = 2$.
- d) $\int_C \frac{\operatorname{Ch}(z^2 - \pi i)}{z - \pi i} dz$ où C est le carré de sommets $2, 2 + 4i, -2 + 4i$ et -2 .
- e) $\int_C \frac{\operatorname{tg} z}{z - i} dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1 + 2i$ et $-1 + 2i$.
- f) $\int_C \frac{\operatorname{Log}(z + 1)}{z^2 + 1} dz$ où C est le cercle $|z - i| = \frac{7}{5}$.

3.2 Solutions

Exercice 3.1

Déterminer et représenter graphiquement les chemins suivants.

- a) $z(t) = \left(1 + \frac{1}{2i}\right)t, \quad 2 \leq t \leq 5,$ b) $z(t) = 3 + i + (1 - i)t, \quad 0 \leq t \leq 3,$
 c) $z(t) = t + (1 - t)^2 i, \quad -1 \leq t \leq 1,$ d) $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 2,$
 e) $z(t) = 2 + 4e^{\frac{\pi}{2} i t}, \quad 0 \leq t \leq 2,$ f) $z(t) = 2 \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Solution.

Nous rappelons qu'un **chemin** ou **arc** de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{C}$ est défini comme étant une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle réel $I = [a, b]$, $a < b$, vers le plan complexe $\mathbb{C}$.

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

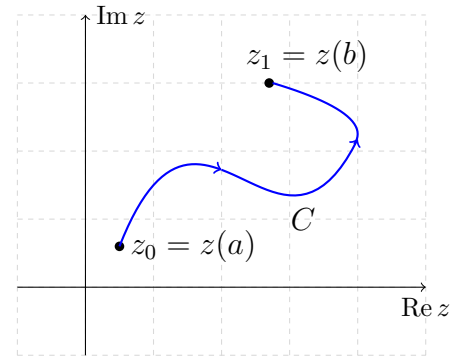
$$t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t).$$

Ses points initial et final sont $z_0 = z(a)$ et $z_1 = z(b)$.

La fonction $t \mapsto z(t)$ est souvent notée $t \mapsto \gamma(t)$ ou $t \mapsto \phi(t)$. Les points initial $z_0 = \gamma(a)$ et final $z_1 = \gamma(b)$ sont appelés respectivement l'origine et l'extrémité de γ .

L'image $C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [a, b]\}$ s'appelle support de γ ou **courbe** dans le plan complexe $\mathbb{C}$ paramétrée par la fonction $\gamma : t \mapsto z(t)$.

Souvent on confond le chemin avec son support et on dit que C est un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

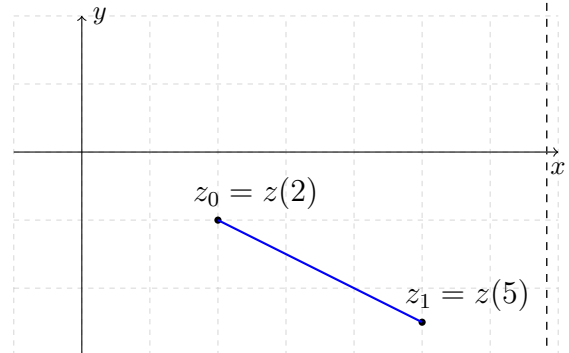


a) On a $z(t) = \left(1 + \frac{1}{2i}\right)t = t - \frac{1}{2}it, \quad 2 \leq t \leq 5.$

Donc $x(t) = t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}t.$

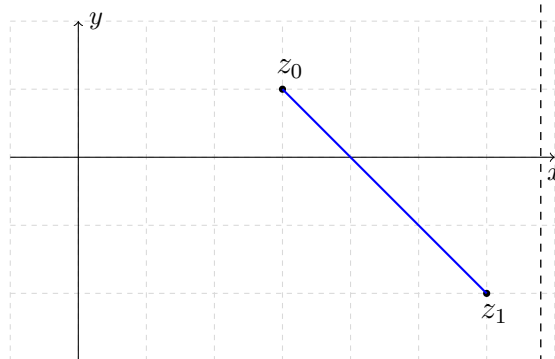
En éliminant t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve

$y = -\frac{1}{2}x, \quad 2 \leq x \leq 5,$ qui est un segment de droite, reliant les deux points complexes $z_0 = 2 - i$ et $z_1 = 5 - \frac{5}{2}i.$



- b) On a $z(t) = 3 + i + (1 - i)t = 3 + t + i(1 - t)$,
 $0 \leq t \leq 3$. Donc $x(t) = 3 + t$ et $y(t) = 1 - t$.

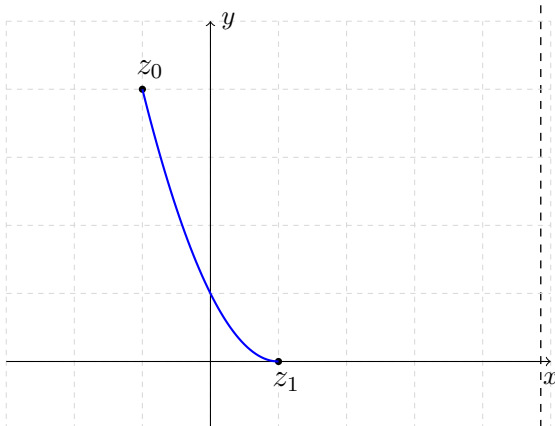
En éliminant t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve
 $y = 4 - x$, $3 \leq x \leq 6$, qui est un segment de
droite, reliant les deux points complexes $z_0 = 3 + i$
et $z_1 = 6 - 2i$.



- c) On a $z(t) = t + (1 - t)^2 i$, $-1 \leq t \leq 1$.

Donc $x(t) = t$ et $y(t) = (1 - t)^2$.

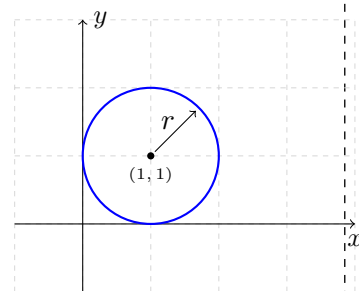
En éliminant t entre $x(t)$ et $y(t)$, on trouve
 $y = (1 - x)^2$, $-1 \leq x \leq 1$, qui est un arc
d'une parabole, reliant les deux points complexes
 $z_0 = -1 + 4i$ et $z_1 = 1$.



- d) On a $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t} = 1 + \cos(\pi t) + i(1 - \sin(\pi t))$, $0 \leq t \leq 2$.

Donc $x(t) = 1 + \cos(\pi t)$ et $y(t) = 1 - \sin(\pi t)$.

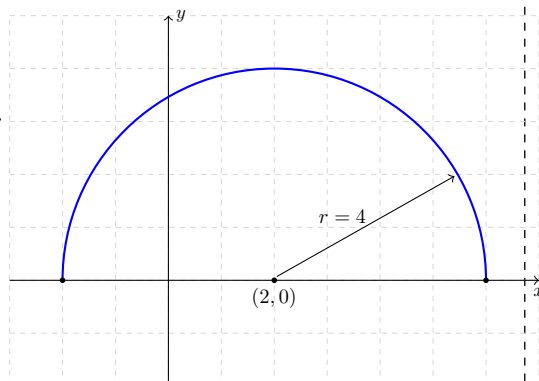
En tenant compte de $\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = 1$ on obtient
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $0 \leq x \leq 2$, qui est un cercle de rayon
 $r = 1$ et de centre $(1, 1)$.



- e) On a $z(t) = 2 + 4e^{\frac{\pi}{2} i t}$
 $= 2 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + 4i \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$, $0 \leq t \leq 2$.

Donc $2 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ et $y(t) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$.

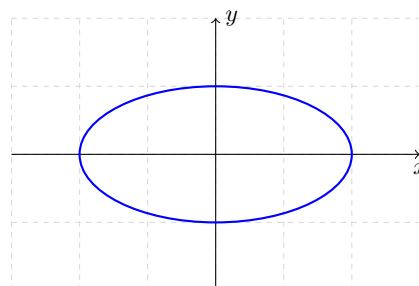
En tenant compte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) = 1$ on
obtient $(x - 2)^2 + y^2 = 4^2$, $0 \leq y \leq 4$, qui est le
demi cercle supérieur de rayon $r = 4$ et de centre
 $(2, 0)$.



- f) On a $z(t) = 2 \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Donc $x(t) = 2 \cos t$ et $y(t) = \sin t$.

En tenant compte de $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ on obtient
 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $-2 \leq x \leq 2$, qui est un ellipse.



Exercice 3.2

Donner une représentation paramétrique des chemins suivants.

- a) Le segment allant de $(-1, 1)$ vers $(1, 3)$.
- b) L'arc de courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, allant de $(1, 1)$ à $(5, \frac{1}{5})$.
- c) Le demi cercle supérieur $|z - 2 + i| = 2$ de $(4, -1)$ à $(0, -1)$.
- d) L'ellipse d'équation $4(x - 2)^2 + 5(y + 1)^2 = 20$.
- e) La branche d'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 4$ contenant $(2, 0)$.
- f) L'arc de la parabole d'équation $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ avec $-2 \leq x \leq 2$.

Solution.

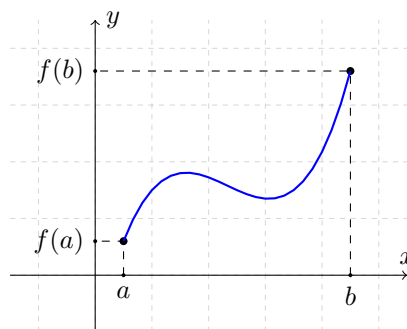
On rappelle que :

- La courbe représentative d'une fonction

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

est paramétrée par

$$z(t) = t + if(t), \quad t \in [a, b].$$

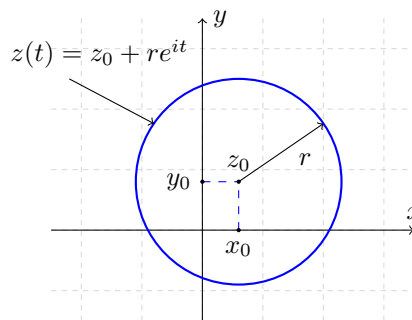


- Le cercle de centre z_0 et de rayon r est une courbe paramétrée par

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ou

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



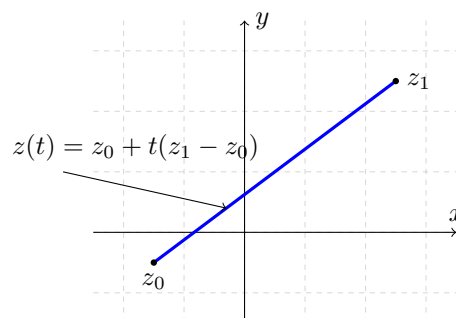
Cercle de centre z_0 et de rayon r

- Le segment d'extrémités z_0 et z_1 noté $[z_0, z_1]$ est une courbe paramétrée par

$$z(t) = z_0(1 - t) + tz_1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ou

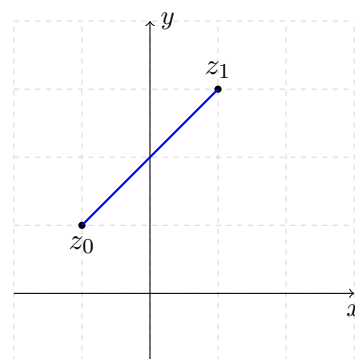
$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Segment d'extrémités z_0 et z_1

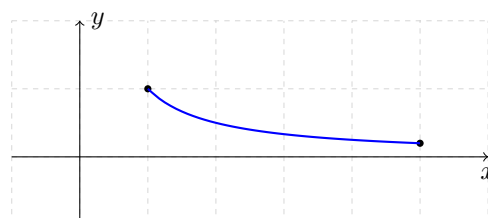
- a) Le segment de droite reliant les deux points $z_0 = -1 + i$ et $z_1 = 1 + 3i$ est paramétré par

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0(1-t) + tz_1 \\ &= (1+i)(1-t) + t(1+3i) \\ &= 1 + i(2t+1), \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$



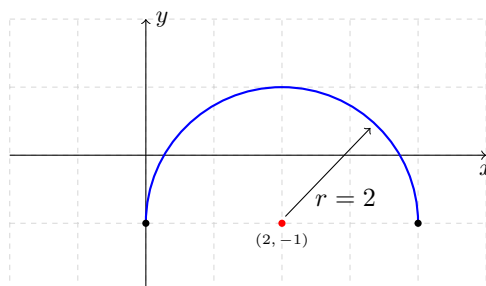
- b) L'arc de courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, allant de $(1, 1)$ à $(5, \frac{1}{5})$ est paramétré par

$$z(t) = t + \frac{i}{t}, \quad 1 \leq t \leq 5.$$



- c) Le demi cercle supérieur $|z - 2 + i| = 2$ de $(4, -1)$ à $(0, -1)$ est paramétré par

$$z(t) = 2 - i + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$



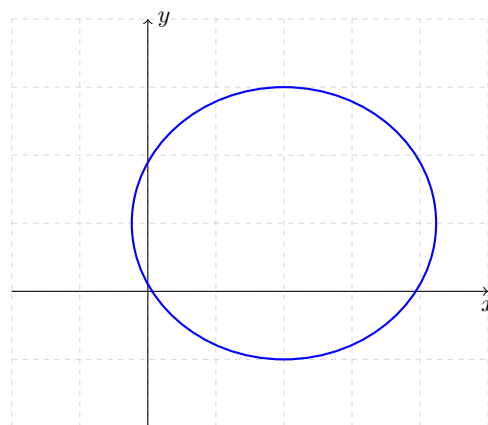
- d) L'équation de l'ellipse $4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20$ est équivalente à

$$\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1.$$

Posons $\frac{x(t)-2}{\sqrt{5}} = \cos t$ et $\frac{y(t)+1}{2} = \sin t$.

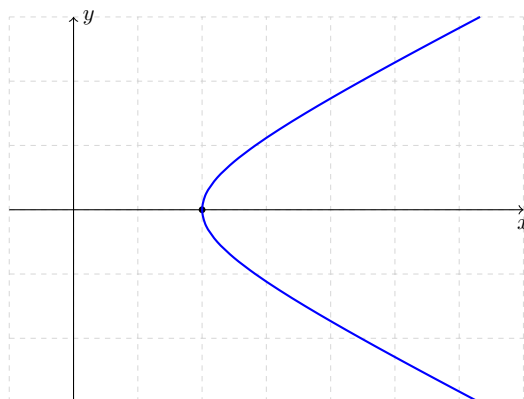
L'équation paramétrique cherchée est alors

$$z(t) = 2 + i + \sqrt{5} \cos t + 2i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



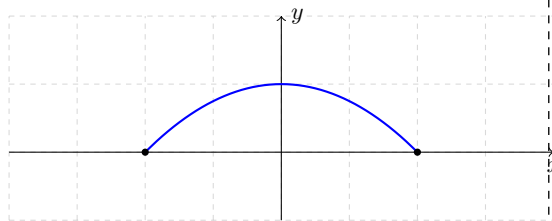
- e) L'équation $x^2 - 4y^2 = 4$ est équivalente à $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2 = 1$. C'est une hyperbole et elle est constituée de deux branches disjointes symétriques l'une de l'autre. La branche contenant $(2, 0)$ correspond aux valeurs de $x \geq 2$. Posons alors $\frac{x(t)}{2} = \text{Ch } t$ et $y(t) = \text{Sh } t$, $t \in \mathbb{R}$. L'équation paramétrique cherchée est donc

$$z(t) = 2 \text{Ch } t + i \text{Sh } t, \quad t \in \mathbb{R}.$$



- f) L'arc de la parabole d'équation $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ avec $-2 \leq x \leq 2$ est paramétré par

$$z(t) = t + i \left(1 - \frac{1}{4}t^2 \right), \quad -2 \leq t \leq 2.$$



Exercice 3.3

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

- a) $\int_C e^z dz$ où C est le chemin le plus court reliant $i\pi$ à $2i\pi$.
- b) $\int_C \operatorname{Re} z dz$ où C est l'arc de la parabole $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$ de $1+i$ à $3+3i$.
- c) $\int_C \cos(2z) dz$ où C est le demi cercle $|z| = \pi, x \geq 0$ de $-i\pi$ vers $i\pi$.
- d) $\int_C \operatorname{Re}(z^2) dz$ où C est le carré de sommets $0, 1, 1+i$ et i orienté positivement.
- e) $\int_C z e^{z^2} dz$ où C est le chemin reliant 1 à i le long des axes.
- f) $\int_C \operatorname{Im}(z^2) dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1$ et i orienté positivement.
- g) $\int_C \left(\frac{5}{z-2i} - \frac{6}{(z-2i)^2} \right) dz$ où C est le cercle $|z-2i| = 4$ orienté positivement.

Solution.

On rappelle que si D un domaine (connexe ouvert) non vide dans $\mathbb{C}$ et C une courbe paramétrée par un chemin

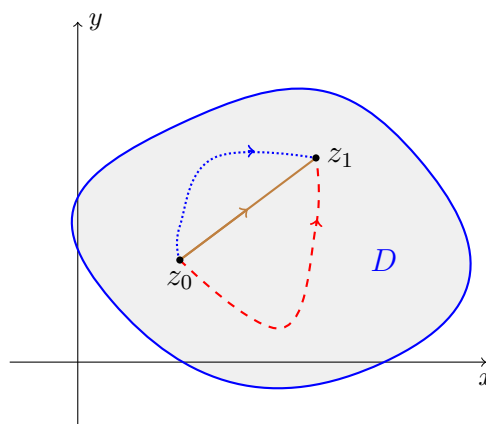
$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\rightarrow D \\ t &\mapsto \gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue en tout point de C , alors

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) dz(t) = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Ainsi, si f est holomorphe dans D et si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D , alors pour toute courbe C dans D de point initial z_0 et de point final z_1 , l'intégrale $\int_C f(z) dz$ est indépendante du chemin suivi pour aller de z_0 à z_1 . De plus, si $F'(z) = f(z)$, alors

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = [F(z)]_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).$$



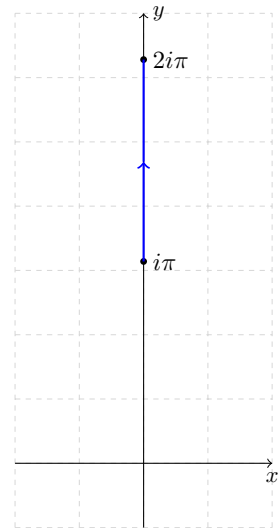
- a) Le plus court chemin joignant $i\pi$ et $2i\pi$ est le segment de droite allant de $i\pi$ à $2i\pi$ dont l'équation paramétrique est

$$z(t) = i\pi(1-t) + 2i\pi t = i\pi t + i\pi, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Les points $i\pi$ et $2i\pi$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 1$.

L'intégrale curviligne considérée vaut donc

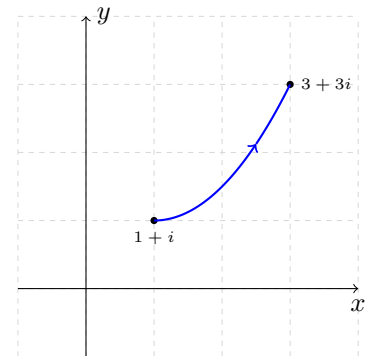
$$\begin{aligned} \int_C e^z dz &= \int_{t=0}^{t=1} e^{i\pi t + i\pi} d(i\pi t + i\pi) \\ &= \int_0^1 e^{i\pi t + i\pi} i\pi dt = [e^{i\pi t + i\pi}]_{t=0}^{t=1} = e^{2i\pi} - e^{i\pi} = 2. \end{aligned}$$



Autre méthode. La fonction e^z est holomorphe dans $\mathbb{C}$ alors $\int_C e^z dz$ est indépendant du chemin suivi pour aller de $i\pi$ à $2i\pi$ et on a $\int_C e^z dz = \int_{i\pi}^{2i\pi} e^z dz = [e^z]_{z_0}^{z_1} = e^{2i\pi} - e^{i\pi} = 2$.

- b) L'arc de la parabole $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2$ de $1+i$ à $3+3i$ est paramétré par

$$\begin{aligned} z(t) &= t + i \left(1 + \frac{1}{2}(t-1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}it^2 + (1-i)t + \frac{3}{2}i, \quad 1 \leq t \leq 3. \end{aligned}$$



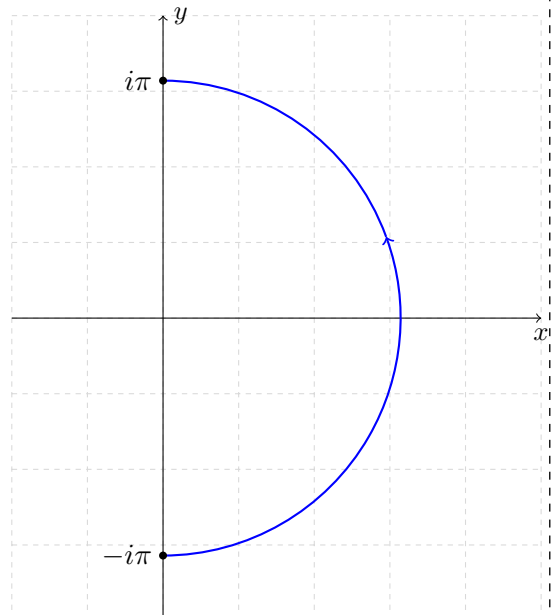
On a $dz = (it + 1 - i) dt$ et donc l'intégrale donnée vaut

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{t=1}^{t=3} t(it + 1 - i) dt = \left[\frac{1}{3}it^3 + \frac{1}{2}(1-i)t^2 \right]_{t=1}^{t=3} = 4 + \frac{14}{3}i.$$

- c) Le demi cercle $|z| = \pi, x \geq 0$ de $-i\pi$ vers $i\pi$ est paramétré par $z(t) = \pi e^{i\pi t}, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_C \cos(2z) dz &= \int_{t=-\frac{1}{2}}^{t=\frac{1}{2}} \cos(2\pi e^{i\pi t}) d(\pi e^{i\pi t}) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} i\pi^2 \cos(2\pi e^{i\pi t}) e^{i\pi t} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin(2\pi e^{i\pi t}) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \sin(2i\pi) \\ &= i \operatorname{Sh}(2\pi) \simeq 267.74i. \end{aligned}$$

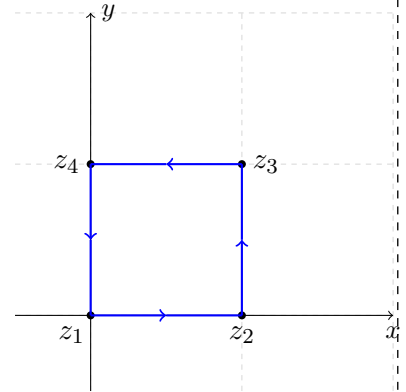


Autre méthode. La fonction $\cos(2z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ alors $\int_C \cos(2z) dz$ est indépendant du chemin suivi pour aller de $-i\pi$ à $i\pi$ et on a

$$\begin{aligned} \int_C \cos(2z) dz &= \int_{-i\pi}^{i\pi} \cos(2z) dz = \left[\frac{1}{2} \sin(2z) \right]_{-i\pi}^{i\pi} \\ &= \frac{1}{2} \sin(2i\pi) - \frac{1}{2} \sin(-2i\pi) = \sin(2i\pi) = i \operatorname{Sh}(2\pi). \end{aligned}$$

d) Posons $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1 + i$ et $z_4 = i$. Les équations paramétriques des segments de droites $[z_1 z_2], [z_2 z_3], [z_3 z_4]$ et $[z_4 z_1]$ sont, respectivement,

$$\begin{aligned} z &= t, z = 1 + it, z = 1 - t + i \\ \text{et } z &= (1 - t)i \text{ avec } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$



Ainsi

$$\operatorname{Re}(z^2) = t^2, \operatorname{Re}(z^2) = 1 - t^2, \operatorname{Re}(z^2) = t^2 - 2t \text{ et } \operatorname{Re}(z^2) = -(1 - t)^2 \text{ avec } t \in [0, 1].$$

L'intégrale donnée vaut

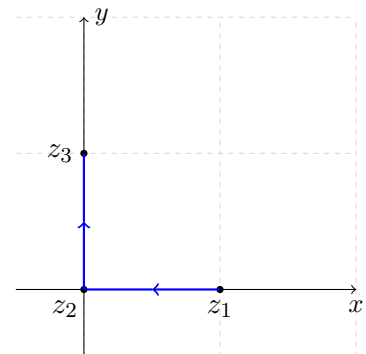
$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Re}(z^2) dz &= \int_{[z_1 z_2]} \operatorname{Re}(z^2) dz + \int_{[z_2 z_3]} \operatorname{Re}(z^2) dz + \int_{[z_3 z_4]} \operatorname{Re}(z^2) dz + \int_{[z_4 z_1]} \operatorname{Re}(z^2) dz \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1 - t^2) i dt + \int_0^1 (t^2 - 2t) (-dt) + \int_0^1 -(1 - t)^2 (-idt) \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[i \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \right]_0^1 + \left[\left(t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \right]_0^1 + \left[-\frac{i}{3} (1 - t)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i + \frac{2}{3} + \frac{i}{3} = 1 + i. \end{aligned}$$

e) Posons $z_1 = 1, z_2 = 0$ et $z_3 = i$. Les équations paramétriques des segments de droites $[z_1 z_2]$ et $[z_2 z_3]$ sont, respectivement,

$$z = 1 - t \text{ et } z = it \text{ avec } t \in [0, 1].$$

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_C z e^{z^2} dz &= \int_{[z_1 z_2]} z e^{z^2} dz + \int_{[z_2 z_3]} z e^{z^2} dz \\ &= \int_0^1 (1 - t) e^{(1-t)^2} (-dt) + \int_0^1 it e^{-t^2} i dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{(1-t)^2} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^1 = \frac{1 - e}{2} + \frac{e^{-1} - 1}{2} = \frac{e^{-1} - e}{2} = -\operatorname{Sh} 1 \simeq -1.1752. \end{aligned}$$



Autre méthode. La fonction ze^{z^2} est holomorphe dans $\mathbb{C}$ alors $\int_C ze^{z^2} dz$ est indépendant du chemin suivi pour aller de 1 à i et on a

$$\int_C ze^{z^2} dz = \int_1^i ze^{z^2} dz = \left[\frac{1}{2} e^{z^2} \right]_1^i = \frac{e^{-1} - e}{2} = -\operatorname{Sh} 1 \simeq -1.1752.$$

f) Posons $z_1 = 0, z_2 = 1$ et $z_3 = i$. Les équations paramétriques des segments de droites $[z_1 z_2], [z_2 z_3]$ et $[z_3 z_1]$ sont, respectivement,

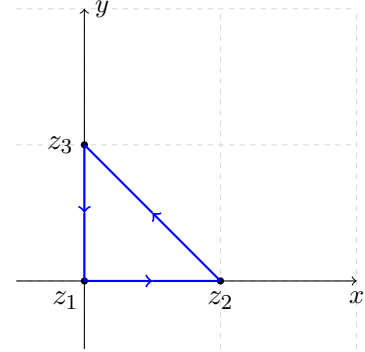
$$z = t, z = 1 - t + it \text{ et } z = (1 - t)i \text{ avec } t \in [0, 1].$$

Ainsi

$$\operatorname{Im}(z^2) = 0, \operatorname{Im}(z^2) = 2t - 2t^2 \text{ et } \operatorname{Im}(z^2) = 0 \text{ avec } t \in [0, 1].$$

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Im}(z^2) dz &= \int_{[z_1 z_2]} \operatorname{Im}(z^2) dz + \int_{[z_2 z_3]} \operatorname{Im}(z^2) dz + \int_{[z_3 z_1]} \operatorname{Im}(z^2) dz \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 (2t - 2t^2)(i - 1) dt + \int_0^1 0(-idt) \\ &= \left[(i - 1) \left(t^2 - \frac{2}{3} t^3 \right) \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} i. \end{aligned}$$

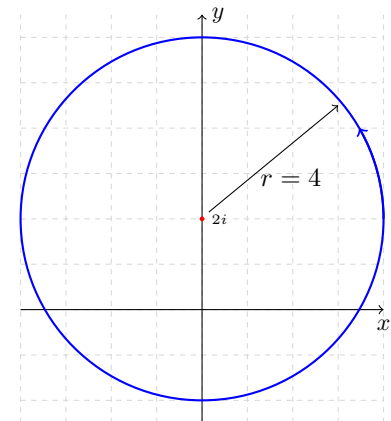


g) Le cercle $|z - 2i| = 4$ est paramétré par

$$z(t) = 2i + 4e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_C \left(\frac{5}{z - 2i} - \frac{6}{(z - 2i)^2} \right) dz &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \left(\frac{5}{4e^{it}} - \frac{6}{(4e^{it})^2} \right) 4ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(5i - \frac{3i}{2} e^{-it} \right) dt \\ &= \left[5it + \frac{3}{2} e^{-it} \right]_0^{2\pi} = 10i\pi. \end{aligned}$$



Exercice 3.4

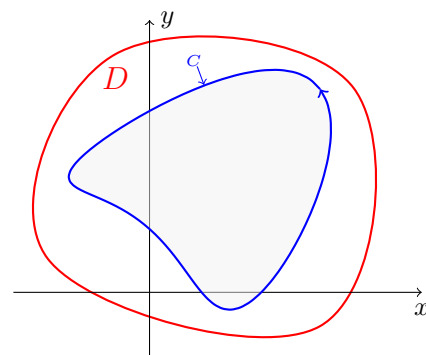
Calculer l'intégrale $\int_{|z|=R} f(z) dz$ dans chacun des cas suivants.

- a) $f(z) = e^{z^2}$, b) $f(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right)$, c) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$,
d) $f(z) = \operatorname{Im} z$, e) $f(z) = \frac{1}{|z|^2}$, f) $f(z) = \frac{1}{4z - 3}$.

Solution.

Nous rappelons que si f une fonction **holomorphe** dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée contenue ainsi que son intérieure dans D , alors

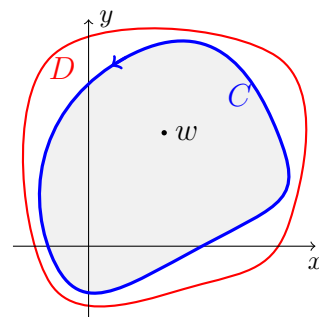
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$



Ce théorème fondamental est souvent appelé **théorème de Cauchy**.

Nous rappelons ainsi que si f une fonction **holomorphe** dans $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée **simple** contenue ainsi que son intérieure dans D , et si w est un point intérieur à C , alors

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - w} dz,$$



où la courbe C est décrite dans le sens direct.

De même la n -ième dérivée de f en w est donnée par

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les deux formules précédentes sont appelées **formules intégrales de Cauchy** et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C .

Nous rappelons aussi le **théorème de l'argument**, qui est une conséquence des formules intégrales de Cauchy.

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C . On a alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

où N et P désignent respectivement le nombre de zéros comptés avec multiplicité et le nombre de pôles comptés avec leur ordre, de f intérieurs à C .

Sachant que un point z_0 en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un **point singulier** ou une singularité de f . Si l'on peut trouver un entier positif n tel que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0,$$

alors z_0 est appelé un **pôle d'ordre** n . Si $n = 1$, z_0 est appelé un **pôle simple**.

a) La fonction $f(z) = e^{z^2}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et le cercle $|z| = R$ est une courbe fermée, alors $\int_{|z|=R} f(z) dz = 0$ pour tout $R > 0$.

b) On a $f(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{4}z\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}z\right)} = -4 \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{4}z\right)\right)'}{\cos\left(\frac{1}{4}z\right)}$. On applique le théorème de l'argument pour la fonction $g(z) = \cos\left(\frac{1}{4}z\right)$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Il n'a donc aucune singularité mais il a des zéros en $z_k = 2(1 + 2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\int_{|z|=R} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right) dz = -4 \int_{|z|=R} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = (-4) 2\pi i N = -8\pi i N,$$

où N est le nombre des z_k intérieurs à $|z| = R$. Il est facile de vérifier que $N = 2 \left\lfloor \frac{R+2\pi}{4\pi} \right\rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Donc

$$\int_{|z|=R} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}z\right) dz = \begin{cases} -16\pi i \left\lfloor \frac{R+2\pi}{4\pi} \right\rfloor & \text{si } \frac{R}{2\pi} \notin \mathbb{N} \\ \text{n'est pas définie} & \text{si } \frac{R}{2\pi} \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

c) On a $f(z) = \frac{1}{z}$. Le cercle $|z| = R$ est paramétré par

$$z(t) = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

L'intégrale donnée vaut

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{z} dz = \int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{1}{Re^{-it}} Rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{i2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{i2t} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i4\pi} - 1}{2} = 0.$$

d) On a $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ donc $f(z) = \operatorname{Im} z = R \sin t$. L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} \int_{|z|=R} \operatorname{Im} z dz &= \int_{t=0}^{t=2\pi} R \sin(t) R i e^{it} dt = R^2 \int_0^{2\pi} (i \sin t \cos t - \sin^2 t) dt \\ &= R^2 \left[\frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}i \cos(2t) \right]_0^{2\pi} = -\pi R^2. \end{aligned}$$

e) Si $z(t) = Re^{it}$ on a $f(z) = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{R^2}$. L'intégrale donnée vaut

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{|z|^2} dz = \int_{t=0}^{t=2\pi} \frac{1}{R^2} R i e^{it} dt = \frac{1}{R} \int_{t=0}^{t=2\pi} i e^{it} dt = \frac{1}{R} [e^{it}]_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi} - 1}{R} = 0.$$

f) On a $f(z) = \frac{1}{4z-3} = \frac{1}{4(z-\frac{3}{4})}$. Si $R = \frac{3}{4}$ l'intégrale donnée n'est pas définie.

Si $R < \frac{3}{4}$, la fonction $f(z) = \frac{1}{4z-3}$ est holomorphe sur $|z| = R$ et dans son intérieure. Donc

d'après le théorème de Cauchy $\int_{|z|=R} \frac{1}{4z-3} dz = 0$.

Si $R > \frac{3}{4}$, l'application de la formule de Cauchy pour $w = \frac{3}{4}$ donne

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{4z-3} dz = \int_{|z|=R} \frac{1}{4(z-\frac{3}{4})} dz = \frac{1}{4} 2\pi i = \frac{\pi}{2} i.$$

Exercice 3.5

Évaluer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

a) $\int_C \operatorname{Log}(1-z) dz$ où C est le parallélogramme de sommets $-1-i$, $-i$, $1+i$ et i .

b) $\int_C \coth\left(\frac{1}{2}z\right) dz$ où C est le cercle $\left|z - \frac{\pi}{2}i\right| = 1$

c) $\int_C \frac{\sin z}{z+2iz} dz$ où C est le cercle $|z-4-2i| = \frac{11}{2}$.

d) $\int_C \frac{1}{z-3i} dz$ où C est le cercle $|z| = \pi$.

e) $\int_C \frac{e^z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 2 \text{ ou } |z|^- = 1\}$.

f) $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$ où $C = \{z \in \mathbb{C}, |z|^+ = 1 \text{ ou } |z|^- = 3\}$.

g) $\int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4-16} dz$ où C est le carré de sommets $-i$, 1 , i et -1 .

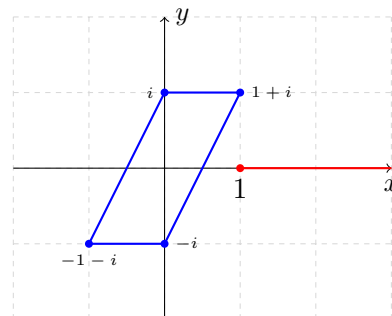
h) $\int_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2} dz$ où C est le cercle $|z-2| = 4$.

Solution.

Pour résoudre cet exercice, voir le rappel de l'exercice 3.4.

a) La fonction $z \mapsto \operatorname{Log} z$ est holomorphe sur tout domaine D qui n'intersecte pas la demi-droite réelle $y = 0$ avec $x \leq 0$, c'est-à-dire $D \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-) = \emptyset$. Donc la fonction $z \mapsto \operatorname{Log}(1 - z)$ est holomorphe sur tout domaine D qui n'intersecte pas la demi-droite $y = 0$ avec $x \geq 1$.

On remarque que le parallélogramme C de sommets $-1 - i$, $-i$, $1 + i$ et i n'intersecte pas la demi-droite $y = 0$ avec $x \geq 1$, alors la fonction $z \mapsto \operatorname{Log}(1 - z)$ est holomorphe sur C et à l'intérieur de C . Donc d'après le théorème de Cauchy (voir le rappel de l'exercice 3.4) on a $\int_C \operatorname{Log}(1 - z) dz = 0$. Ce résultat peut aussi être établi directement à partir de la définition de l'intégrale



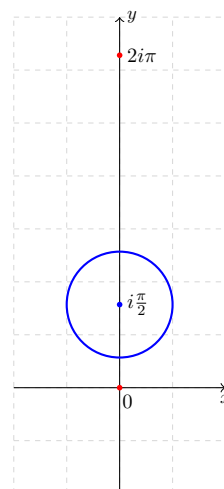
b) On a

$$\coth\left(\frac{1}{2}z\right) = \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

qui est holomorphe sur tout domaine qui ne contient aucun des points $z_k = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On remarque que le disque $|z - \frac{\pi}{2}i| \leq 1$ ne contient aucun des points $z_k = 2ik\pi$. Alors d'après le théorème de Cauchy on a

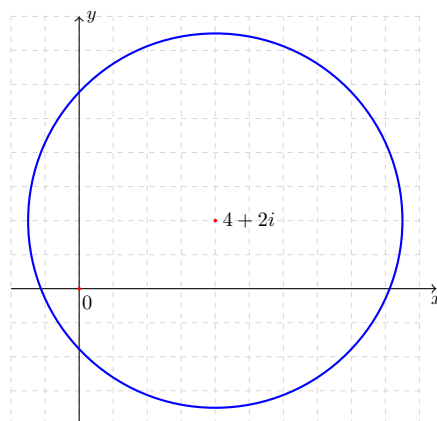
$$\int_C \coth\left(\frac{1}{2}z\right) dz = 0.$$



c) Le dénominateur de $\frac{\sin z}{z + 2iz}$ s'annule en $z_0 = 0$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z - 4 - 2i| = \frac{11}{2}$.

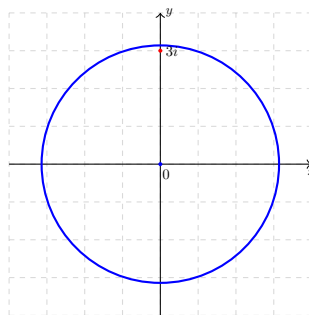
Donc d'après la formule intégrale de Cauchy (voir le rappel de l'exercice 3.4) on a

$$\int_C \frac{\sin z}{z + 2iz} dz = 2i\pi \frac{\sin 0}{1 + 2i} = 0.$$



- d) On a $z_0 = 3i$ est à l'intérieur du cercle $|z| = \pi$. Donc d'après la formule intégrale de Cauchy

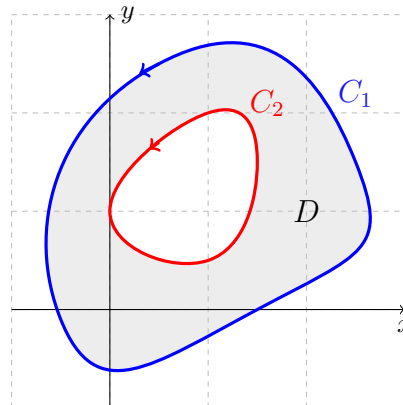
$$\int_C \frac{1}{z - 3i} dz = 2i\pi \times 1 = 2i\pi.$$



- e) On rappelle que si f une fonction **holomorphe** dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées simples C_1 et C_2 et sur ces courbes, alors

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

où C_1 et C_2 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.

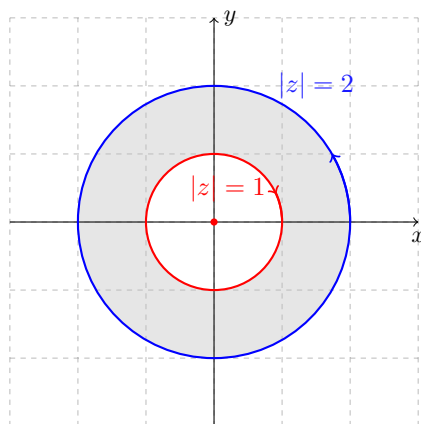


La fonction $z \mapsto \frac{e^z}{z}$ est holomorphe dans le domaine limité par les cercles $|z|^+ = 2$ ou $|z|^+ = 1$ et sur ces cercles. Alors d'après le résultat précédent on a

$$\int_{|z|^+=2} \frac{e^z}{z} dz = \int_{|z|^+=1} \frac{e^z}{z} dz \quad \text{ou bien} \quad \int_{|z|^+=2} \frac{e^z}{z} dz + \int_{|z|^-=1} \frac{e^z}{z} dz = 0,$$

ou encore

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz = 0.$$



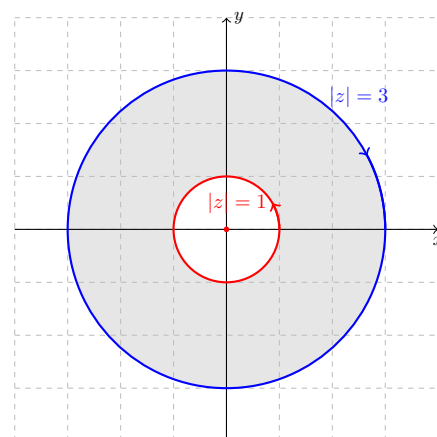
- f) On procède avec une méthode légèrement différente de la précédente en e). On a $z_0 = 0$ est à l'intérieur des cercles $|z| = 1$ et $|z| = 3$. Donc d'après la formule intégrale de Cauchy $\int_{|z|^+=1} \frac{\cos z}{z} dz = 2i\pi \times \cos 0 = 2i\pi$

et $\int_{|z|^+=3} \frac{\cos z}{z} dz = 2i\pi \times \cos 0 = 2i\pi$. Alors

$$\int_{|z|^+=1} \frac{\cos z}{z} dz - \int_{|z|^+=3} \frac{\cos z}{z} dz = 2i\pi - 2i\pi = 0.$$

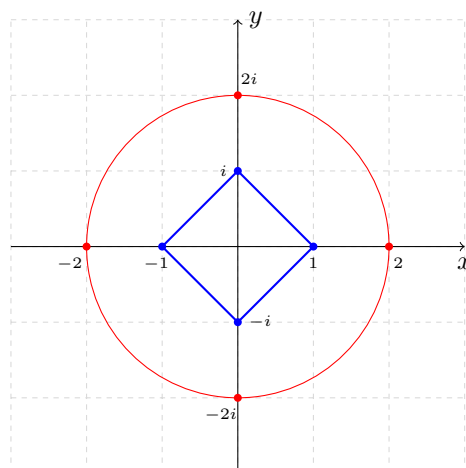
D'où

$$\int_{|z|^+=1} \frac{\cos z}{z} dz + \int_{|z|^-=3} \frac{\cos z}{z} dz = 0 \quad \text{ou} \quad \int_C \frac{\cos z}{z} dz = 0.$$



g) La fonction $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}$ a des singularités en $z_k = (1 + 2k)\pi, k \in \mathbb{Z}$, qui sont à l'extérieur de C . Les quatre racines de $z^4 - 16 = 0$ sont sur le cercle $|z| = 2$, qui sont aussi à l'extérieur de C . La fonction $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4 - 16}$ est alors holomorphe sur C et à l'intérieur de C . Donc d'après le théorème de Cauchy on a

$$\int_C \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}z\right)}{z^4 - 16} dz = 0.$$

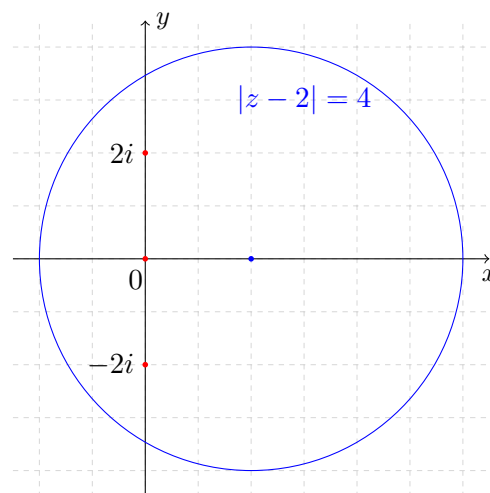


h) La fonction $\frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2}$ se décompose en fractions simples comme

$$\frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} = \frac{1}{z - 2i} + \frac{1}{z + 2i} + \frac{1}{z^2}.$$

Les points $z_0 = 0, z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i$ sont à l'intérieur de C , alors d'après les formules intégrales de Cauchy

$$\int_C \frac{1}{z - 2i} dz = 2i\pi, \quad \int_C \frac{1}{z + 2i} dz = 2i\pi \quad \text{et} \quad \int_C \frac{1}{z^2} dz = 0.$$



D'où

$$\int_C \frac{2z^3 + z^2 + 4}{z^4 + 4z^2} dz = \int_C \frac{1}{z - 2i} dz + \int_C \frac{1}{z + 2i} dz + \int_C \frac{1}{z^2} dz = 4i\pi.$$

Exercice 3.6

Calculer les intégrales suivantes, l'orientation est supposée positive.

- $\int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz$ où C est l'ellipse de l'équation $4x^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- $\int_C \frac{z}{z^2 + 4z + 3} dz$ où C est le cercle $|z + 1| = 2$.
- $\int_C \frac{z + 2}{z - 2} dz$ où C est le cercle $|z - 1| = 2$.
- $\int_C \frac{\operatorname{Ch}(z^2 - \pi i)}{z - \pi i} dz$ où C est le carré de sommets $2, 2 + 4i, -2 + 4i$ et -2 .
- $\int_C \frac{\operatorname{tg} z}{z - i} dz$ où C est le triangle de sommets $0, 1 + 2i$ et $-1 + 2i$.
- $\int_C \frac{\operatorname{Log}(z + 1)}{z^2 + 1} dz$ où C est le cercle $|z - i| = \frac{7}{5}$.

Solution.

a) La fonction $\frac{1}{z^2 + 4}$ se décompose en fractions simples comme

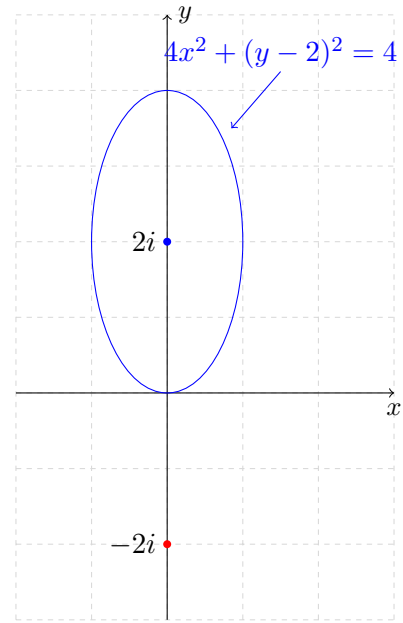
$$\frac{1}{z^2 + 4} = \frac{\frac{i}{4}}{z + 2i} - \frac{\frac{i}{4}}{z - 2i}.$$

Le point $z_1 = 2i$ est à l'intérieur de l'ellipse C mais $z_2 = -2i$ est à l'extérieur de C , alors d'après la formule intégrale et le théorème de Cauchy

$$\int_C \frac{\frac{i}{4}}{z - 2i} dz = 2i\pi \frac{i}{4} = \frac{-\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_C \frac{\frac{i}{4}}{z + 2i} dz = 0.$$

D'où

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz = \int_C \frac{\frac{i}{4}}{z + 2i} dz - \int_C \frac{\frac{i}{4}}{z - 2i} dz = 0 - \frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



b) La fonction $\frac{z}{z^2 + 4z + 3}$ se décompose en fractions simples comme

$$\frac{z}{z^2 + 4z + 3} = \frac{3}{2(z + 3)} - \frac{1}{2(z + 1)}.$$

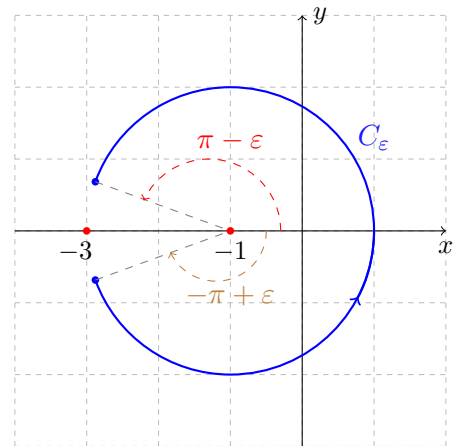
Le point $z_1 = -1$ est à l'intérieur du cercle C , alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\int_C \frac{1}{2(z + 1)} dz = 2i\pi \frac{1}{2} = i\pi.$$

Cependant, $z_2 = -3$ est sur le cercle C , et donc $\int_C \frac{3}{2(z + 3)} dz$ est une intégrale impropre. On pourrait essayer de donner un sens à cette intégrale en considérant l'arc C_ε partant de $-\pi + \varepsilon$ vers $\pi - \varepsilon$, et en prenant une limite lorsque ε tend vers 0. L'arc C_ε est paramétré par

$$z(t) = -1 + 2e^{it}, \quad -\pi + \varepsilon \leq t \leq \pi - \varepsilon.$$

On a $dz = 2ie^{it} dt$ et



$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} \frac{3}{2(z + 3)} dz &= \int_{-\pi + \varepsilon}^{\pi - \varepsilon} \frac{3}{2(2 + 2e^{it})} 2ie^{it} dt = \left[\frac{3}{2} \operatorname{Log}(1 + e^{it}) \right]_{-\pi + \varepsilon}^{\pi - \varepsilon} \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{Log}(1 + e^{i(\pi - \varepsilon)}) - \frac{3}{2} \operatorname{Log}(1 + e^{i(-\pi + \varepsilon)}) \\ &= \frac{3}{2} i \operatorname{Arg}(1 + e^{i(\pi - \varepsilon)}) - \frac{3}{2} i \operatorname{Arg}(1 + e^{i(-\pi + \varepsilon)}) \quad \text{car } |1 + e^{i(\pi - \varepsilon)}| = |1 + e^{i(-\pi + \varepsilon)}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}i \operatorname{Arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) - \frac{3}{2}i \operatorname{Arctg} \left(\frac{-\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \\
&= 3i \operatorname{Arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right) \\
&= 3i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad \text{car } \frac{\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right).
\end{aligned}$$

Alors

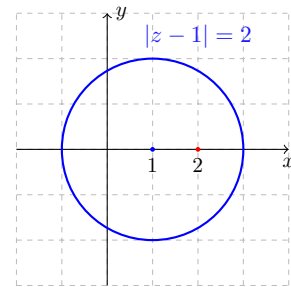
$$\int_C \frac{3}{2(z+3)} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{3}{2(z+3)} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{3}{2}i\pi.$$

D'où

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 4z + 3} dz = \int_C \frac{3}{2(z+3)} dz - \int_C \frac{1}{2(z+1)} dz = \frac{3}{2}i\pi - i\pi = i\frac{\pi}{2}.$$

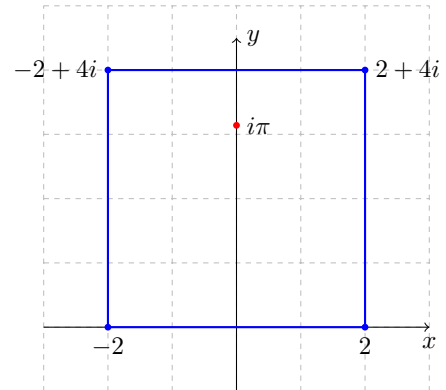
- c) Le point $z_0 = 2$ est à l'intérieur du cercle $|z - 1| = 2$,
alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\int_C \frac{z+2}{z-2} dz = 2i\pi \left[z+2 \right]_{z=2} = 2i\pi \times 4 = 8i\pi.$$



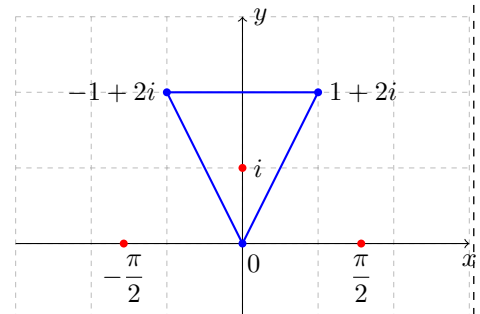
- d) Le point $z_0 = \pi i$ est à l'intérieur du carré de sommets $2, 2+4i, -2+4i$ et -2 , alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\operatorname{Ch}(z^2 - \pi i)}{z - \pi i} dz &= 2i\pi \left[\operatorname{Ch}(z^2 - \pi i) \right]_{z=\pi i} \\
&= 2i\pi \times \operatorname{Ch}(-\pi^2 - \pi i) \\
&= 2i\pi \operatorname{Ch}(\pi^2).
\end{aligned}$$



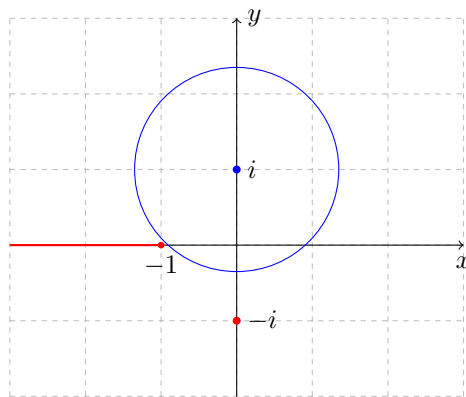
- e) Les points singuliers $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont à l'extérieur du triangle C de sommets $0, 1+2i$ et $-1+2i$. Cependant, le point $z_0 = i$ est à l'intérieur du triangle C , alors d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\operatorname{tg} z}{z-i} dz &= 2i\pi \left[\operatorname{tg} z \right]_{z=i} = 2i\pi \times \operatorname{tg} i \\
&= 2i\pi \times i \operatorname{th} 1 = -2\pi \operatorname{th} 1.
\end{aligned}$$



- f) La fonction $z \mapsto \operatorname{Log}(z+1)$ est holomorphe sur tout domaine D qui n'intersecte pas la demi-droite $y=0$ avec $x \leq -1$.

On remarque que le cercle $C : |z - i| = \frac{7}{5}$ n'intersecte pas la demi-droite $y = 0$ avec $x \leq -1$, alors la fonction $z \mapsto \operatorname{Log}(z + 1)$ est holomorphe sur C et à l'intérieur de C . Les racines de $z^2 + 1 = 0$ sont $z_1 = -i$ et $z_2 = i$. Seule $z_2 = i$ qui est à l'intérieur du cercle C , alors d'après la formule intégrale de Cauchy



$$\begin{aligned} \int_C \frac{\operatorname{Log}(z+1)}{z^2+1} dz &= \int_C \frac{\frac{\operatorname{Log}(z+1)}{z+i}}{z-i} dz = 2i\pi \left[\frac{\operatorname{Log}(z+1)}{z+i} \right]_{z=i} = 2i\pi \times \frac{\operatorname{Log}(1+i)}{2i} \\ &= \pi \left(\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \ln 2 + i \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$