
Chapitre 4

Résidus et applications

4.1 Exercices

Exercice 4.1

Déterminer les singularités des fonctions suivantes en précisant leurs nature.

$$\text{a) } f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{b) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \text{c) } f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Exercice 4.2

Donner la série de Laurent de la fonction f au point z_0 ainsi que $\text{Res}(f, z_0)$ dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, z_0 = 0, \quad \text{b) } f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}, z_0 = 1 \quad \text{c) } f(z) = z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right), z_0 = 0.$$

Exercice 4.3

Calculer le résidu des fonctions suivantes relativement à leurs pôles :

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z^2}{(z-3)^3}, \quad \text{c) } f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{3}z^2}, \quad \text{d) } f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)}.$$

Exercice 4.4

En appliquant le théorème des résidus calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4} \frac{dz}{(z^2 - 1)^2(z - 3)^2}, & \text{b) } \int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz, n \in \mathbb{N}^*, & \text{c) } \int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \\ \text{d) } \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}, & \text{e) } \int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2 + 1)}, & \text{f) } \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz. \end{array}$$

Exercice 4.5

Calculer les intégrales suivantes ($-1 < a < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$).

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta, \quad \text{b) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta, \quad \text{c) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \theta)^n}{5 + 4 \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

Exercice 4.6

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, & \text{b) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}, & \text{c) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2ix - 1 - a^2)^3}, a > 0, \\ \text{d) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx, & \text{e) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx, & \text{f) } & \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx, a > 0. \end{aligned}$$

Exercice 4.7

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 5} dx, & \text{b) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^2} dx, & \text{c) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx, \\ \text{d) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx, & \text{e) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin(2x)}{x^2 + 2x + 2} dx, & \text{f) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx, a > 0. \end{aligned}$$

Exercice 4.8

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx, a > 0 & \text{b) } & \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx, a > 0, b > 0, \\ \text{c) } & \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \right) \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \operatorname{Re} b > 0. & \text{d) } & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \\ \text{e) } & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2 + b^2)} dx, a > 0, \operatorname{Re} b > 0. \end{aligned}$$

Exercice 4.9

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(a+x)^2 + b^2} dx, a > 0, b > 0, \text{ utiliser la fonction } f(z) = \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(a+z)^2 + b^2} \text{ où} \\ & \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \arg z \text{ avec } \arg z \in [0, 2\pi[. \\ \text{b) } & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)((\ln x)^2 + \pi^2)}, a > 0, \text{ utiliser la fonction } f(z) = \frac{1}{(a^2 + z^2) \operatorname{Log} z} \text{ où} \\ & \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \arg z \text{ avec } \arg z \in]-\pi, \pi]. \end{aligned}$$