
Chapitre 4

Résidus et applications

4.1 Exercices

Exercice 4.1

Déterminer les singularités des fonctions suivantes en précisant leurs nature.

$$\text{a) } f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{b) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \text{c) } f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Exercice 4.2

Donner la série de Laurent de la fonction f au point z_0 ainsi que $\text{Res}(f, z_0)$ dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, z_0 = 0, \quad \text{b) } f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}, z_0 = 1 \quad \text{c) } f(z) = z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right), z_0 = 0.$$

Exercice 4.3

Calculer le résidu des fonctions suivantes relativement à leurs pôles :

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z^2}{(z-3)^3}, \quad \text{c) } f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{3}z^2}, \quad \text{d) } f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)}.$$

Exercice 4.4

En appliquant le théorème des résidus calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4} \frac{dz}{(z^2 - 1)^2(z - 3)^2}, \quad & \text{b) } \int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz, n \in \mathbb{N}^*, \quad & \text{c) } \int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \\ \text{d) } \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}, \quad & \text{e) } \int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2 + 1)}, \quad & \text{f) } \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz. \end{aligned}$$

Exercice 4.5

Calculer les intégrales suivantes ($-1 < a < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$).

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta, \quad \text{b) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta, \quad \text{c) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \theta)^n}{5 + 4 \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

Exercice 4.6

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, & \text{b) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}, & \text{c) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2ix - 1 - a^2)^3}, a > 0, \\ \text{d) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx, & \text{e) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx, & \text{f) } & \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx, a > 0. \end{aligned}$$

Exercice 4.7

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 5} dx, & \text{b) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^2} dx, & \text{c) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx, \\ \text{d) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx, & \text{e) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin(2x)}{x^2 + 2x + 2} dx, & \text{f) } & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx, a > 0. \end{aligned}$$

Exercice 4.8

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx, a > 0 & \text{b) } & \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx, a > 0, b > 0, \\ \text{c) } & \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \right) \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \operatorname{Re} b > 0. & \text{d) } & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \\ \text{e) } & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2 + b^2)} dx, a > 0, \operatorname{Re} b > 0. \end{aligned}$$

Exercice 4.9

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(a+x)^2 + b^2} dx, a > 0, b > 0, \text{ utiliser la fonction } f(z) = \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(a+z)^2 + b^2} \text{ où} \\ & \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \arg z \text{ avec } \arg z \in [0, 2\pi[. \\ \text{b) } & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)((\ln x)^2 + \pi^2)}, a > 0, \text{ utiliser la fonction } f(z) = \frac{1}{(a^2 + z^2) \operatorname{Log} z} \text{ où} \\ & \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \arg z \text{ avec } \arg z \in]-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

4.2 Solutions

Exercice 4.1

Déterminer les singularités des fonctions suivantes en précisant leurs nature.

$$\text{a) } f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{b) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \text{c) } f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Solution.

On rappelle qu'un point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un **point singulier** ou une **singularité** de f .

On rappelle aussi qu'un point $z = z_0$ est appelé **singularité isolée**, ou point singulier isolé de f , si l'on peut déterminer $\delta > 0$ tel que le disque $|z - z_0| \leq \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0 . Si l'on ne peut trouver une telle valeur δ , on dit que z_0 est une **singularité non isolée**.

Il existe des types variés de singularités.

- **Singularités apparentes** : Le point singulier z_0 est appelé singularité **apparente** de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
- **Pôles** : Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, alors z_0 est appelé un **pôle d'ordre n** . Si $n = 1$, z_0 est appelé un **pôle simple**.
- **Points de branchement** : Soit z_0 un point singulier isolé de f . Le point z_0 est un **point de branchement** lorsque l'image par f d'au moins d'une courbe fermée entourant z_0 est une courbe non fermée.
- **Singularités essentielles** : Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée **singularité essentielle**.

Séries de Laurent

Une série des puissances de la forme

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \cdots \end{aligned} \quad (4.1)$$

s'appelle **série de Laurent** centrée au point $z_0 \in \mathbb{C}$.

La série des puissances négatives $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ s'appelle la **partie principale**.

La série des puissances positives $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ s'appelle la **partie régulière ou analytique**.

Classification des singularités

Il est possible de classer les singularités **isolées** d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent.

- **Pôles** : Si f à la forme (4.1) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = z_0$ est appelé un **pôle d'ordre n** .

- **Singularités apparentes** : Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = z_0$ mais si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, alors $z = z_0$ est appelée une **singularité apparente**. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = z_0$ comme étant égal à $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

- **Singularités essentielles** : Si $z = z_0$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une **infinité de terme**.

a) La fonction $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ n'est pas définie pour $z_0 = 0$, donc ce point est une singularité de f . De même, puisque $z = 0$ est une singularité de $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sin z}{z}$, $z_1 = \infty$ est une singularité de $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

La série de Laurent de f centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \frac{1}{7!z^6} + \frac{1}{9!z^8} - \cdots.$$

Le point $z_0 = 0$ est une singularité essentielle car la partie principale de la série de Laurent possède une infinité de terme.

Le point $z_1 = \infty$ est une singularité apparente car $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

b) La fonction $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ possède une singularité apparente en $z_0 = 0$ car

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Le point $z_1 = \infty$ est une singularité essentielle car la série de Laurent de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ centrée au point $z_0 = 0$,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right) = 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{4!z^3} + \dots$$

possède une infinité de terme dans sa partie principale.

c) La série de Laurent de f centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \frac{1}{5!z^3} + \dots$$

Cette série possède une infinité de terme dans sa partie principale. Donc $z_0 = 0$ est une singularité essentielle.

Le point $z_1 = \infty$ est un pôle double car la série de Laurent de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ centrée au point $z_0 = 0$,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \dots$$

possède deux termes dans sa partie principale.

Exercice 4.2

Donner la série de Laurent de la fonction f au point z_0 ainsi que $\text{Res}(f, z_0)$ dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, z_0 = 0, \quad \text{b) } f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}, z_0 = 1 \quad \text{c) } f(z) = z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right), z_0 = 0.$$

Solution.

Pour un rappel sur les singularités et les séries de Laurent voir l'exercice précédent 4.1.

Concernant le résidu d'une fonction f en un point z_0 , on rappelle que si f une fonction holomorphe et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C , **excepté** au point $z = z_0$ centre de C . Alors f possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$, donné par

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = & a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \\ & + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Dans le cas particulier $n = -1$ on a $\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$.

Le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de z_0 s'appelle le **résidu** de f au point z_0 et se note

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

- Si $z = z_0$ est un **pôle simple** le calcul du résidu est particulièrement simple

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

- Si $z = z_0$ est un pôle simple et $f(z)$ se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0 \text{ et } Q'(z_0) \neq 0,$$

alors nous avons

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (4.4)$$

- Dans le cas où $z = z_0$ est un **pôle d'ordre** $m \geq 2$, le résidu a_{-1} est donné par la formule

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)).$$

a) La série de Laurent de $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots,$$

qui converge pour toute valeur de $z \neq 0$. Le point $z_0 = 0$ est un pôle simple et le résidu en $z_0 = 0$ est $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = 1$.

b) Posons $u = \frac{1-z}{2}$. La série de Laurent de $f(z) = \frac{2z}{z^2-1}$ centrée au point $z_0 = 1$ est

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z}{z^2-1} = \frac{2(1-2u)}{(1-2u)^2-1} = \left(1 - \frac{1}{2u}\right) \frac{1}{1-u} = \left(1 - \frac{1}{2u}\right) \sum_{n \geq 0} u^n \\ &= \sum_{n \geq 0} u^n - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} u^{n-1} = \sum_{n \geq 0} u^n - \frac{1}{2u} - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} u^n = -\frac{1}{2u} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} u^n \\ &= \frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n. \end{aligned}$$

Cette série converge pour toute valeur de z dans $0 < |z-1| < 2$. Le point $z_0 = 1$ est un pôle simple et $\text{Res}(f, 1) = a_{-1} = 1$.

c) La série de Laurent de $f(z) = z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ centrée au point $z_0 = 0$ est

$$\begin{aligned} f(z) &= z^6 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^6}{(2n)! z^{2n}} \\ &= z^6 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8! z^2} - \frac{1}{10! z^4} + \dots, \end{aligned}$$

qui converge pour toute valeur de $z \neq 0$. Comme cette série possède une infinité de terme dans sa partie principale, alors le point $z_0 = 0$ est une singularité essentielle et le résidu en $z_0 = 0$ est $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = 0$.

Exercice 4.3

Calculer le résidu des fonctions suivantes relativement à leurs pôles :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}, & \text{b) } f(z) &= \frac{z^2}{(z-3)^3}, & \text{c) } f(z) &= \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{3} z^2}, \\ \text{d) } f(z) &= \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)}. \end{aligned}$$

Solution.

Pour un rappel sur le calcul des résidus voir l'exercice précédent 4.2.

a) La fonction $f(z)$ possède un pôle double en $z_0 = -1$ et un pôle simple en $z_1 = 2$.

Le résidu en $z_0 = -1$ est

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left((z+1)^2 \cdot \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} \right) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z-3}{(z-2)^2} e^z = \frac{-4}{9e}.$$

Le résidu en $z_1 = 2$ est

$$\text{Res}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} \left((z-2) \cdot \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)} \right) = \frac{e^2}{(2+1)^2} = \frac{e^2}{9}.$$

b) La fonction $f(z)$ possède un pôle triple en $z_0 = 3$ dont le résidu est

$$\text{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-3)^3 \cdot \frac{z^2}{(z-3)^3} \right) = 1.$$

c) La fonction $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2(z - \frac{\pi}{3})}$ possède un pôle simple en $z_0 = \frac{\pi}{3}$ dont le résidu est

$$\text{Res}\left(f, \frac{\pi}{3}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\left(z - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\sin z^2}{z^2(z - \frac{\pi}{3})} \right) = \frac{9}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{9}.$$

d) Comme $1 - \cos(2z) = 2 \sin^2 z$ alors la fonction $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)}$ possède des pôles doubles en $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. La singularité en $z_0 = 0$ est apparente car $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - z}{1 - \cos(2z)} = \frac{1}{4}$.

Le résidu en $z_k = k\pi$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, k\pi) &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z - k\pi)^2 (e^z - 1 - z)}{2 \sin^2 z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \left(\frac{(2(z - k\pi)(e^z - 1 - z) + (z - k\pi)^2 (e^z - 1)) \sin z - 2(z - k\pi)^2 (e^z - 1 - z) \cos z}{2 \sin^3 z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \left(\frac{(z - k\pi)^2 (e^z - 1)}{2 \sin^2 z} + \frac{\sin z - (z - k\pi) \cos z}{\sin^2 z} (e^z - 1 - z) \frac{(z - k\pi)}{\sin z} \right). \end{aligned}$$

En posant $z - k\pi = u$ ou $z = u + k\pi$, cette limite peut être écrite sous la forme

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u^2 (e^{u+k\pi} - 1)}{2 \sin^2 u} + \frac{\sin u - u \cos u}{\sin^2 u} (e^{u+k\pi} - 1 - u - k\pi) \frac{u}{\sin u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 (e^{u+k\pi} - 1)}{2 \sin^2 u} = \frac{e^{k\pi} - 1}{2}.$$

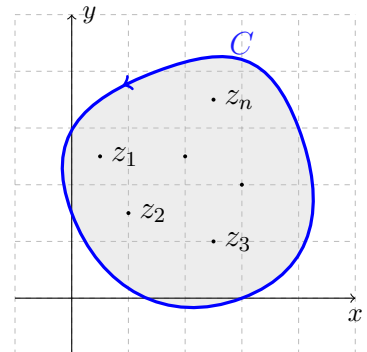
Exercice 4.4

En appliquant le théorème des résidus calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_{|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4} \frac{dz}{(z^2 - 1)^2 (z - 3)^2}, & \text{b)} \quad & \int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz, n \in \mathbb{N}^*, & \text{c)} \quad & \int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \\ \text{d)} \quad & \int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}, & \text{e)} \quad & \int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2 (z^2 + 1)}, & \text{f)} \quad & \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz. \end{aligned}$$

Solution.

On rappelle que si f une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en un nombre fini de singularités $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ intérieures à C . Alors le **théorème des résidus** établit que l'intégrale de f le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de f en les singularités contenues dans C , i.e.



$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

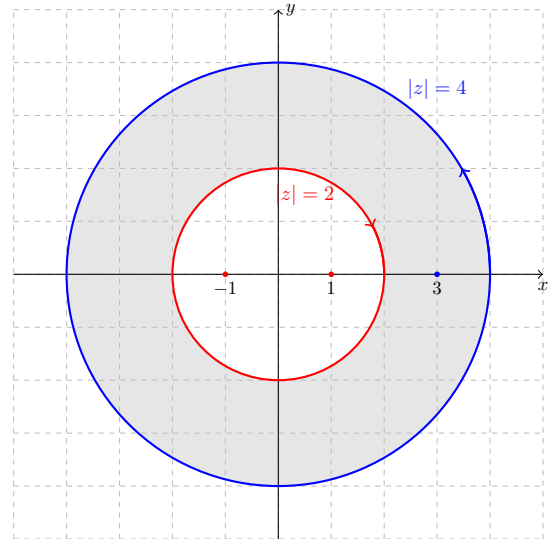
a) La fonction à intégrer $\frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ possède trois pôles doubles en $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = 3$ [racines de $(z^2-1)^2(z-3)^2$]. Le seul pôle intérieur à $|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4$ est $z_3 = 3$.

Le résidu en $z_3 = 3$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 3) &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} \left((z-3)^2 \cdot \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{-4z}{(z^2-1)^3} = -\frac{3}{128}. \end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\int_{|z|^- = 2 \cup |z|^+ = 4} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = 2\pi i \text{Res}(f, 3) = -\frac{3\pi i}{64}.$$



b) La fonction à intégrer $\frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$ possède deux pôles simples en $z_1 = -i\pi$ et $z_2 = i\pi$ [racines de $z^2 + \pi^2$].

Le résidu en $z_1 = -i\pi$ est

$$\text{Res}(f, -i\pi) = \lim_{z \rightarrow -i\pi} \left((z + i\pi) \cdot \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} \right) = \lim_{z \rightarrow -i\pi} \frac{e^z}{z - i\pi} = \frac{e^{-i\pi}}{-i\pi - i\pi} = \frac{1}{2i\pi}.$$

Le résidu en $z_2 = i\pi$ est

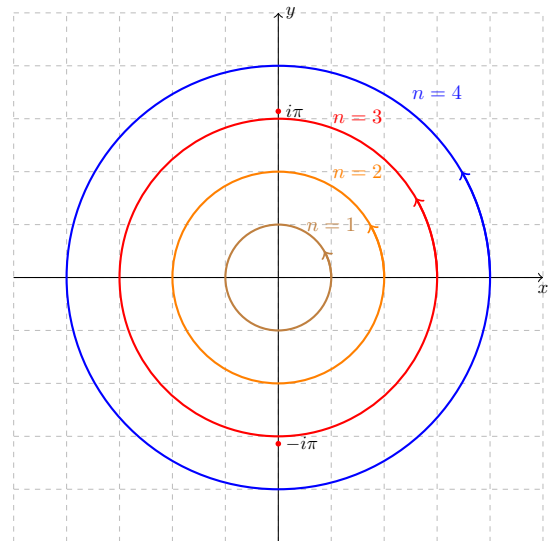
$$\text{Res}(f, i\pi) = \lim_{z \rightarrow i\pi} \left((z - i\pi) \cdot \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^z}{z + i\pi} = \frac{e^{i\pi}}{i\pi + i\pi} = \frac{-1}{2i\pi}.$$

On distingue deux cas :

- Le premier cas $n = 1, 2$ ou 3 . Dans ce cas, aucun pôle n'est à l'intérieur du cercle $|z| = n$ et donc par le théorème de Cauchy

$$\int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz = 0.$$

- Le deuxième cas $n \geq 4$. Dans ce cas, les deux pôles $z_1 = -i\pi$ et $z_2 = i\pi$ sont à l'intérieur du cercle $|z| = n$ et donc par le théorème des résidus



$$\int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, -i\pi) + \text{Res}(f, i\pi)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i\pi} + \frac{-1}{2i\pi} \right) = 0.$$

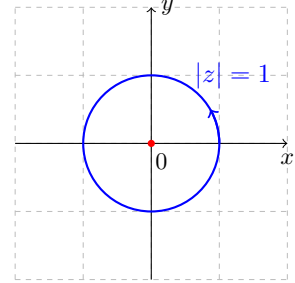
c) La fonction à intégrer $z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ possède une singularité essentielle en $z_0 = 0$. En effet, sa série de Laurent centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^2}{(2n+1)! z^{2n+1}} = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \frac{1}{7!z^5} + \frac{1}{9!z^7} - \dots,$$

qui converge pour toute valeur de $z \neq 0$. Comme cette série possède une infinité de terme dans sa partie principale, alors le point $z_0 = 0$ est une singularité essentielle et $\text{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Le point $z_0 = 0$ est à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ et donc par le théorème des résidus

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}.$$



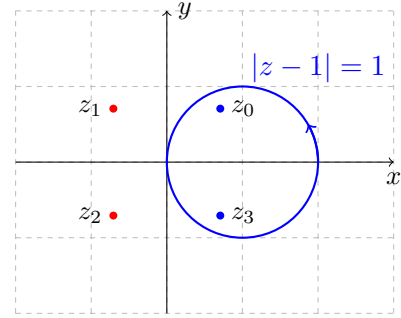
d) La fonction $\frac{1}{z^4 + 1}$ possède quatre pôles simples en $z_k = e^{i\frac{(1+2k)\pi}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$ [racines de $z^4 + 1$]. Les pôles à l'intérieur du cercle $|z - 1| = 1$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

D'après la formule (4.4) du rappel de l'exercice 4.2, les résidus en z_0 et z_3 sont respectivement,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}i \quad \text{et} \quad \text{Res}(f, z_3) = \frac{1}{4z_3^3} = \frac{e^{-i\frac{21\pi}{4}}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}i.$$

On a alors par le théorème des résidus

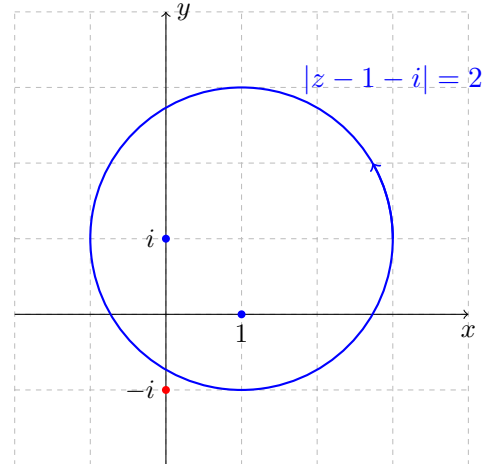
$$\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_3)) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$



e) La fonction à intégrer $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ possède un pôle double $z_1 = 1$ et deux pôles simples $z_2 = i, z_3 = -i$. Les pôles à l'intérieur du cercle $|z - 1 - i| = 2$ sont $z_1 = 1$ et $z_2 = i$.

Le résidu en $z_1 = 1$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left((z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Le résidu en $z_2 = i$ est

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left((z - i) \cdot \frac{1}{(z - 1)^2 (z^2 + 1)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z - 1)^2 (z + i)} = \frac{1}{4}.$$

D'après le théorème des résidus on a

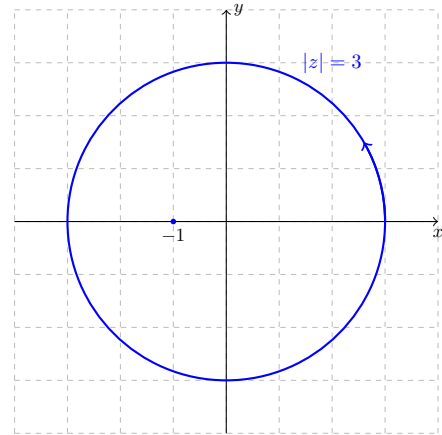
$$\int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2 (z^2+1)} = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, i)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{i\pi}{2}.$$

f) La fonction $\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ possède un pôle d'ordre quatre en $z_0 = -1$, qui est à l'intérieur du cercle $|z| = 3$. Le résidu en $z_0 = -1$ est

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left((z+1)^4 \cdot \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{8e^{2z}}{6} = \frac{4}{3e^2}. \end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = \frac{8\pi}{3e^2} i.$$



Exercice 4.5

Calculer les intégrales suivantes ($-1 < a < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$).

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta, \quad \text{b) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta, \quad \text{c) } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \theta)^n}{5 + 4 \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

Solution.

a) Pour calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta$ on va appliquer la méthode qui consiste à poser $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $dz = iz d\theta$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^2}{13 + 12 \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{-i(z^2 + 1)^2}{4z^2(6z^2 + 13z + 6)} dz$$

Les singularités de $f(z) = \frac{-i(z^2+1)^2}{4z^2(6z^2+13z+6)}$ sont un pôle double $z_1 = 0$ et deux pôles simples $z_2 = -\frac{2}{3}$, $z_3 = -\frac{3}{2}$. Les pôles à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ sont $z_1 = 0$ et $z_2 = -\frac{2}{3}$.

Le résidu en $z_1 = 0$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \cdot \frac{-i(z^2+1)^2}{4z^2(6z^2+13z+6)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-i(12z^5 + 39z^4 + 24z^3 + 26z^2 + 12z - 13)}{4(6z^2+13z+6)^2} = \frac{13}{144}i. \end{aligned}$$

Le résidu en $z_2 = -\frac{2}{3}$ est

$$\text{Res}\left(f, -\frac{2}{3}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{-i(z^2+1)^2}{4z^2 \frac{d}{dz}(6z^2+13z+6)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{-i(z^2+1)^2}{4z^2(12z+13)} = -\frac{169}{720}i.$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\int_{|z|=1} \frac{-i(z^2+1)^2}{4z^2(6z^2+13z+6)} dz = 2\pi i \left(\text{Res}(f, 0) + \text{Res}\left(f, -\frac{2}{3}\right) \right) = 2\pi i \left(\frac{13}{144}i - \frac{169}{720}i \right) = \frac{13}{45}\pi.$$

D'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{13 + 12 \cos \theta} d\theta = \frac{13}{45}\pi.$$

b) Si $a = 0$ l'intégrale vaut $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) d\theta = \left[-\frac{1}{n} \cos(n\theta) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

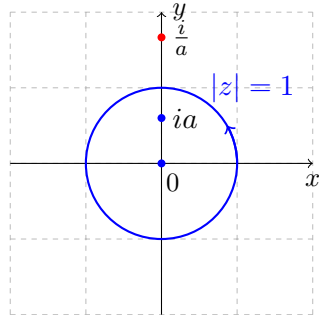
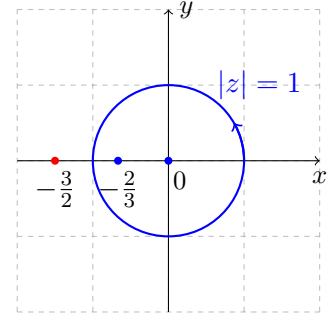
Supposons $a \neq 0$. Posons $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. On a $z^n = e^{in\theta}$ et $z^{-n} = e^{-in\theta}$. D'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}$, $dz = izd\theta$ et alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^n - z^{-n}}{2i}}{1 - 2a \frac{z - z^{-1}}{2i} + a^2} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia (z - ia) \left(z - \frac{i}{a}\right)} dz.$$

Les singularités de $f(z) = \frac{1-z^{2n}}{2z^n ia (z-ia)(z-\frac{i}{a})}$ sont un pôle $z_1 = 0$ qui est d'ordre n et deux pôles simples $z_2 = ia$, $z_3 = \frac{i}{a}$. Comme $-1 < a < 1$, on a que les pôles $z_1 = 0$ et $z_2 = ia$ qui sont à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Le résidu en $z_2 = ia$ est

$$\text{Res}(f, ia) = \lim_{z \rightarrow ia} \left((z - ia) \cdot \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia (z - ia) \left(z - \frac{i}{a}\right)} \right) = \lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia \left(z - \frac{i}{a}\right)} \right) = \frac{1 - i^{2n} a^{2n}}{2i^n a^n (1 - a^2)}.$$



Pour le calcul du résidu en $z_1 = 0$ on remarque que

$$f(z) = \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia(z - ia)\left(z - \frac{i}{a}\right)} = \frac{1}{2z^n ia(z - ia)\left(z - \frac{i}{a}\right)} - \frac{z^n}{2ia(z - ia)\left(z - \frac{i}{a}\right)}.$$

Alors $\text{Res}(f, 0) = \text{Res}\left(\frac{1}{2z^n ia(z - ia)\left(z - \frac{i}{a}\right)}, 0\right)$ car $\text{Res}\left(\frac{z^n}{2ia(z - ia)\left(z - \frac{i}{a}\right)}, 0\right) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(z^n \cdot \frac{1}{2z^n ia(z - ia)\left(z - \frac{i}{a}\right)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{2ia(z - ia)\left(z - \frac{i}{a}\right)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)! 2(a^2 - 1)} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{ia - z} - \frac{1}{\frac{i}{a} - z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(n-1)! 2(a^2 - 1)} \left(\frac{(n-1)!}{(ia - z)^n} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{i}{a} - z\right)^n} \right) \\ &= \frac{1}{2(a^2 - 1)} \left(\frac{1}{(ia)^n} - \frac{1}{\left(\frac{i}{a}\right)^n} \right) = \frac{a^{2n} - 1}{2a^n(1 - a^2)i^n}. \end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{1 - z^{2n}}{2z^n ia(z - ia)\left(z - \frac{i}{a}\right)} dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, ia)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{a^{2n} - 1}{2a^n(1 - a^2)i^n} + \frac{1 - i^{2n}a^{2n}}{2i^n a^n(1 - a^2)} \right) \\ &= -i(i^n - i^{-n}) \pi \frac{a^n}{1 - a^2} = 2\pi \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \frac{a^n}{1 - a^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 - 2a \sin \theta + a^2} d\theta = 2\pi \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \frac{a^n}{1 - a^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m \\ 2\pi (-1)^m \frac{a^{2m+1}}{1 - a^2} & \text{si } n = 2m + 1 \end{cases}.$$

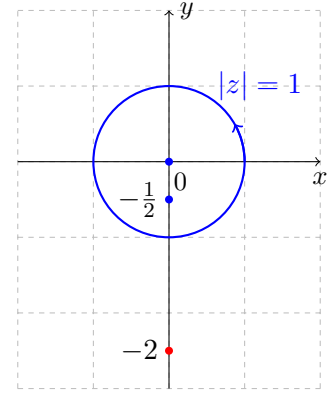
c) Soit $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. On a $z^n = e^{in\theta}$ et $z^{-n} = e^{-in\theta}$. D'où $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$,
 $\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$, $dz = izd\theta$ et alors

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2\cos \theta)^n}{5 + 4\cos \theta} \cos(n\theta) d\theta &= \int_{|z|=1} \frac{(1 + z + z^{-1})^n}{5 + 2z + 2z^{-1}} \cdot \frac{z^n + z^{-n}}{2} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-i(z^2 + z + 1)^n (z^{2n} + 1)}{4z^{2n}(z + 2)\left(z + \frac{1}{2}\right)} dz. \end{aligned}$$

La fonction $f(z) = \frac{-i(z^2+z+1)^n(z^{2n}+1)}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})}$ possède un pôle $z_1 = 0$ d'ordre $2n$ et deux pôles simples $z_2 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = -2$. Les pôles à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ sont $z_1 = 0$ et $z_2 = -\frac{1}{2}$.

Le résidu en $z_2 = -\frac{1}{2}$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(f, -\frac{1}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{-i(z^2+z+1)^n(z^{2n}+1)}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{-i(z^2+z+1)^n(z^{2n}+1)}{4z^{2n}(z+2)} \right) = \frac{-i}{6} \left(3^n + \frac{3^n}{4^n} \right). \end{aligned}$$



Pour le calcul du résidu en $z_1 = 0$ on remarque que

$$f(z) = \frac{-i(z^2+z+1)^n(z^{2n}+1)}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})} = \frac{-i(z^2+z+1)^n}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})} + \frac{-i(z^2+z+1)^n}{4(z+2)(z+\frac{1}{2})}.$$

Alors $\text{Res}(f, 0) = \text{Res}\left(\frac{-i(z^2+z+1)^n}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})}, 0\right)$ car $\text{Res}\left(\frac{-i(z^2+z+1)^n}{4(z+2)(z+\frac{1}{2})}, 0\right) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(z^{2n} \cdot \frac{-i(z^2+z+1)^n}{4z^{2n}(z+2)(z+\frac{1}{2})} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{-i(z^2+z+1)^n}{4(z+2)(z+\frac{1}{2})} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{\frac{i}{6}(z^2+z+1)^n}{z+2} - \frac{\frac{i}{6}(z^2+z+1)^n}{z+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Calculons $\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{(z^2+z+1)^n}{z+2} \right)$ et $\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{(z^2+z+1)^n}{z+\frac{1}{2}} \right)$.

On a

$$\frac{(z^2+z+1)^n}{z+2} = \frac{((z+2)^2-3(z+2)+3)^n}{z+2} = (z+2)^{2n-1} + P_{2n-2}(z+2) + \frac{3^n}{z+2},$$

où $P_{2n-2}(z+2)$ est un polynôme de $z+2$ d'ordre $2n-2$ dont $\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} P_{2n-2} = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{(z^2+z+1)^n}{z+2} \right) &= \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} ((z+2)^{2n-1}) + 0 + \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}} \left(\frac{3^n}{z+2} \right) \\ &= (2n-1)! + 3^n \frac{(-1)^{2n-1} (2n-1)!}{(z+2)^{2n}} \\ &= (2n-1)! \left(1 - \frac{3^n}{(z+2)^{2n}} \right). \end{aligned}$$

De même on a

$$\frac{(z^2+z+1)^n}{z+\frac{1}{2}} = \frac{\left((z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right)^n}{z+\frac{1}{2}} = \left(z+\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + Q_{2n-2}\left(z+\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{z+\frac{1}{2}},$$

où $Q_{2n-2}(z + \frac{1}{2})$ est un polynôme de $z + \frac{1}{2}$ d'ordre $2n - 2$ dont $\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}Q_{2n-2} = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\left(\frac{(z^2 + z + 1)^n}{z + \frac{1}{2}}\right) &= \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\left(\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) + 0 + \frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{z + \frac{1}{2}}\right) \\ &= (2n-1)! + \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)!}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n}} \\ &= (2n-1)! \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n}}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{i}{6}}{(2n-1)!} \left((2n-1)! \left(1 - \frac{3^n}{(z+2)^{2n}}\right) - (2n-1)! \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n}}\right) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{i}{6} \left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{2n}} - \frac{3^n}{(z+2)^{2n}} \right) = \frac{i}{6} \left(3^n - \frac{3^n}{4^n} \right).\end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{-i(z^2 + z + 1)^n(z^{2n} + 1)}{4z^{2n}(z+2)\left(z + \frac{1}{2}\right)} dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -\frac{1}{2})) \\ &= 2\pi i \left(\frac{i}{6} \left(3^n - \frac{3^n}{4^n} \right) - \frac{i}{6} \left(3^n + \frac{3^n}{4^n} \right) \right) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \theta)^n}{5 + 4 \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Exercice 4.6

Calculer les intégrales suivantes :

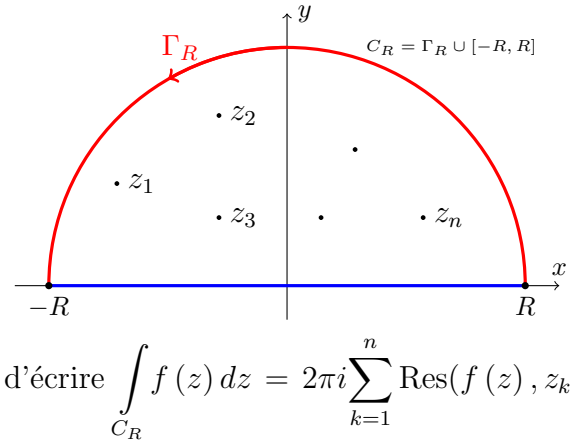
$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx, & \text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}, & \text{c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2ix - 1 - a^2)^3}, a > 0, \\ \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx, & \text{e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx, & \text{f)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx, a > 0. \end{array}$$

Solution.

Les intégrales de cet exercice sont de type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ où $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec P et Q sont des polynômes tels que $\deg Q \geq 2 + \deg P$, et aucun des zéros de Q n'étant réel.

Pour calculer ces intégrales on considère $\int_{C_R} f(z) dz$,

où C_R désigne le contour fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct. Avec R est pris suffisamment grand pour que C_R contient tous les zéros z_k de Q tels que



$\text{Im } z_k > 0$. Alors le théorème des résidus permet d'écrire $\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k)$,

i.e.

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

Notons que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$. En effet, comme $\deg Q \geq 2 + \deg P$ il existe $M > 0$ telle que pour $z = R e^{i\theta}$ avec R suffisamment grand on a

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{R^2}.$$

Alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |f(z)| |dz| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{M}{R^2} R d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi M}{R} = 0.$$

Par conséquent, lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

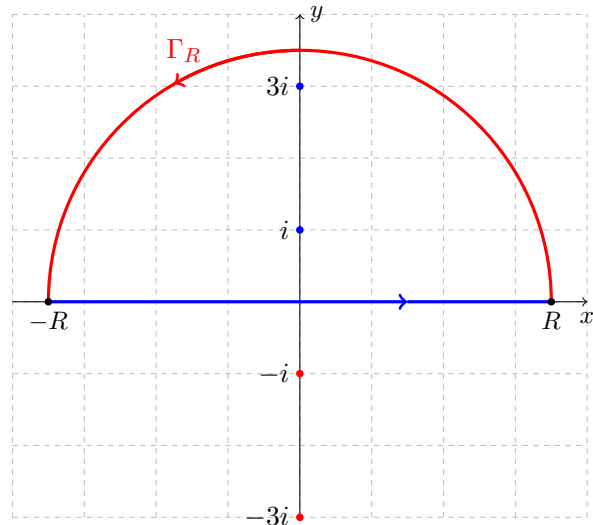
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

a) On considère $\int_{C_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz, R > 0$, où

C_R désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Puisque $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$ pour $z_1 = i, z_2 = 3i, z_3 = -i, z_4 = -3i$. Ces valeurs de z sont les pôles simples de $f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}$.

Seuls les pôles $z_1 = i$ et $z_2 = 3i$ sont à l'intérieur de C_R . Les résidus en ces pôles sont



$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2 - z + 2}{\frac{d}{dz}(z^4 + 10z^2 + 9)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i,$$

$$\operatorname{Res}(f, 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{z^2 - z + 2}{\frac{d}{dz}(z^4 + 10z^2 + 9)} \right) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right) = \frac{1}{16} - \frac{7}{48}i.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 3i)) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i + \frac{1}{16} - \frac{7}{48}i \right) = \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz = \frac{5\pi}{12}. \quad (4.5)$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (4.5) quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(Re^{i\theta})^2 - Re^{i\theta} + 2}{(Re^{i\theta})^4 + 10(Re^{i\theta})^2 + 9} Re^{i\theta} d\theta = 0,$$

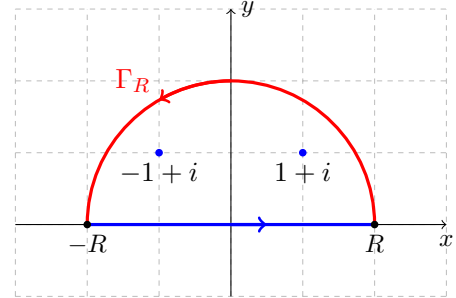
on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = \frac{5\pi}{12}.$$

b) Les pôles de $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz - 2}$ sont $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1 + i$. Ces pôles sont simples et situés à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

Le résidu en $z_1 = -1 + i$ est

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1 + i) &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \left(\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^2 - 2iz - 2)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \left(\frac{1}{2z - 2i} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Le résidu en $z_2 = 1 + i$ est

$$\operatorname{Res}(f, 1 + i) = \lim_{z \rightarrow 1+i} \left(\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^2 - 2iz - 2)} \right) = \lim_{z \rightarrow 1+i} \left(\frac{1}{2z - 2i} \right) = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\int_{C_R} \frac{1}{z^2 - 2iz - 2} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, -1 + i) + \operatorname{Res}(f, 1 + i)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{1}{x^2 - 2ix - 2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2 - 2iz - 2} dz = 0.$$

En prenant la limite de ces expressions quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

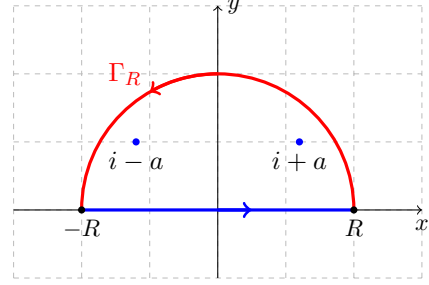
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2 - 2iz - 2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^2 - 2iRe^{i\theta} - 2} Rie^{i\theta} d\theta = 0,$$

nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2ix - 2} dx = 0.$$

c) La fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3}$ possède deux pôles triples en $z_1 = i - a$, $z_2 = i + a$. Les deux pôles sont à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

Le résidu en $z_1 = i - a$ est



$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i - a) &= \lim_{z \rightarrow i-a} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - (i - a))^3 \cdot \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i-a} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z - (i + a))^3} \right) = \lim_{z \rightarrow i-a} \frac{6}{(z - (i + a))^5} = -\frac{3}{16a^5}. \end{aligned}$$

Le résidu en $z_1 = i + a$ est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i + a) &= \lim_{z \rightarrow i+a} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - (i + a))^3 \cdot \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i+a} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{(z - (i - a))^3} \right) = \lim_{z \rightarrow i+a} \frac{6}{(z - (i - a))^5} = \frac{3}{16a^5}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i - a) + \text{Res}(f, i + a)) = 0.$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} dz = 0.$$

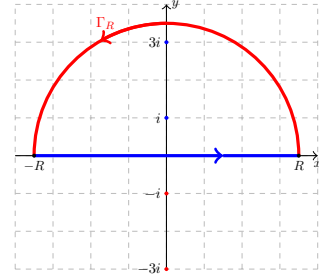
En prenant la limite de ces expressions quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2 - 2iz - 1 - a^2)^3} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1}{((Re^{i\theta})^3 - 2iRe^{i\theta} - 1 - a^2)^3} Rie^{i\theta} d\theta = 0,$$

nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2ix - 1 - a^2)^3} = 0.$$

d) La fonction $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ possède quatre pôles simples en $z_1 = i, z_2 = 3i, z_3 = -i, z_4 = -3i$. Seuls les pôles $z_1 = i$ et $z_2 = 3i$ sont à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.



Les résidus en ces pôles sont

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left((z - i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2}{(z+i)(z^2+9)} \right) = \frac{1}{16}i,$$

$$\text{Res}(f, 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left((z - 3i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} \right) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3i)} \right) = -\frac{3}{16}i.$$

D'où

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 3i)) = 2\pi i \left(\frac{1}{16}i - \frac{3}{16}i \right) = \frac{\pi}{4}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} dz = \frac{\pi}{4}. \quad (4.6)$$

Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(Re^{i\theta})^2}{((Re^{i\theta})^2+1)((Re^{i\theta})^2+9)} Re^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient

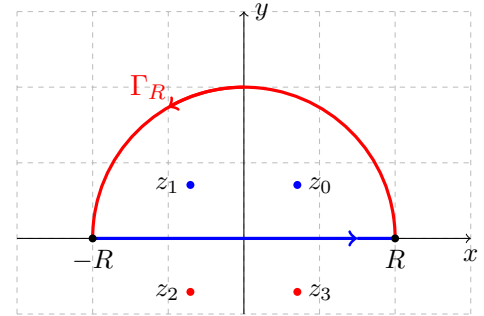
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{4}.$$

e) La fonction $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ possède quatre pôles simples en $z_k = e^{i\frac{(1+2k)\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$. Les pôles à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Les résidus en ces pôles sont

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2+1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2+1}{4z^3} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i,$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2+1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2+1}{4z^3} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i.$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}i \right) = \sqrt{2}\pi$$

ou

$$\int_{-R}^R \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz = \sqrt{2}\pi.$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(Re^{i\theta})^2 + 1}{(Re^{i\theta})^4 + 1} Re^{i\theta} d\theta = 0,$$

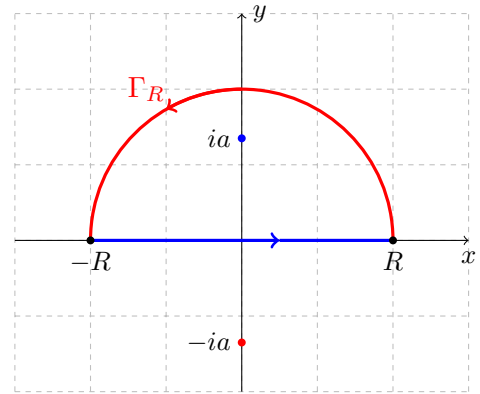
nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \sqrt{2}\pi.$$

f) La fonction $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3}$ possède deux pôles triples en $z_1 = -ia$ et $z_2 = ia$. Seul le pôle $z_2 = ia$ qui est à l'intérieur du contour $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

Le résidus en ce pôle est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - ia)^3 \cdot \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^2}{(z + ia)^3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z^2 - 4iaz - a^2}{(z + ia)^5} = -\frac{i}{16a^3}. \end{aligned}$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} dz = 2\pi i \text{Res}(f, ia) = 2\pi i \left(-\frac{i}{16a^3} \right) = \frac{\pi}{8a^3}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} dz = \frac{\pi}{8a^3}.$$

Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(Re^{i\theta})^2}{((Re^{i\theta})^2 + a^2)^3} Re^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{\pi}{8a^3}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3}$ est paire, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{\pi}{16a^3}.$$

Exercice 4.7

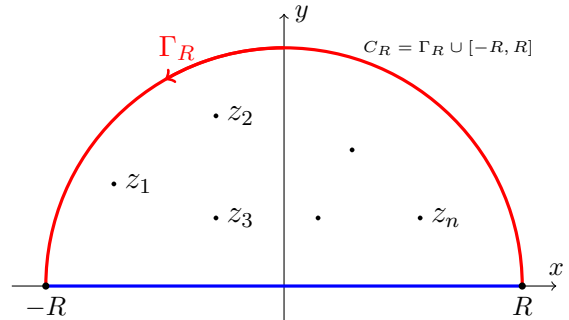
Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} dx, & \text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^2} dx, & \text{c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx, \\ \text{d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx, & \text{e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin(2x)}{x^2+2x+2} dx, & \text{f)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx, a > 0. \end{array}$$

Solution.

Les intégrales de cet exercice reviennent à calculer les intégrales de type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$ avec $\alpha > 0$, où P et Q sont des polynômes avec $\deg Q \geq 1 + \deg P$, et aucun des zéros de Q n'étant réel.

Pour calculer cet intégrale, comme dans l'exercice précédent 4.6, on considère $\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz$, où C_R désigne le contour fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct. Avec R est pris suffisamment grand pour



que C_R contient tous les zéros z_k de Q tels que $\text{Im } z_k > 0$. D'après le théorème des résidus on obtient

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z), z_k).$$

Montrons que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0$. Comme $\deg Q \geq 1 + \deg P$, il existe $M > 0$ telle que

pour $z = R e^{i\theta}$ avec R suffisamment grand on a $\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{i\alpha R e^{i\theta}} \frac{P(R e^{i\theta})}{Q(R e^{i\theta})} R i e^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} e^{i\alpha R \cos \theta} \frac{P(R e^{i\theta})}{Q(R e^{i\theta})} R i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| e^{-\alpha R \sin \theta} e^{i\alpha R \cos \theta} \frac{P(R e^{i\theta})}{Q(R e^{i\theta})} R i e^{i\theta} \right| d\theta = \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} \left| \frac{P(R e^{i\theta})}{Q(R e^{i\theta})} \right| R d\theta \\ &\leq M \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

De plus, par l'étude de la fonction $\theta \mapsto \frac{2}{\pi}\theta - \sin \theta$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on voit que $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} \theta} d\theta = \left[\frac{-\pi}{2\alpha R} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}),$$

qui tend vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$ car $\alpha > 0$ ce qui démontre le résultat annoncé

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Par suite, lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

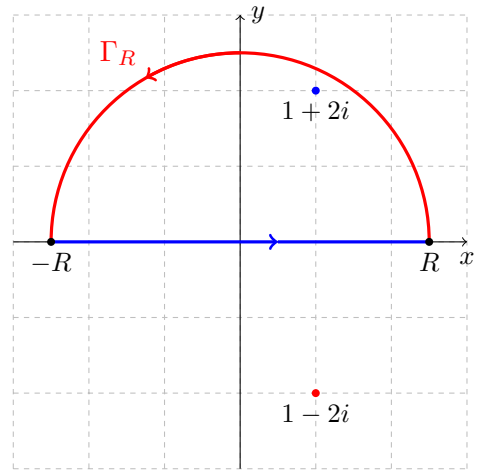
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z), z_k).$$

a) On considère $\int_{C_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5} dz$, $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$.

La fonction $f(z) = \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5}$ possède deux pôles simples en $z_1 = 1+2i$ et $z_2 = 1-2i$. Seul le pôle $z_1 = 1+2i$ qui est à l'intérieur du contour C_R .

Le résidus en ce pôle est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1+2i) &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{(z+1)e^{3iz}}{\frac{d}{dz}(z^2-2z+5)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{(z+1)e^{3iz}}{2z-2} = \frac{1-i}{2} e^{-6+3i}. \end{aligned}$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1+2i) = \pi(1+i)e^{-6+3i}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2-2x+5} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5} dz = -\pi e^{-6}(\sin 3 - \cos 3) + i\pi e^{-6}(\sin 3 + \cos 3).$$

Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2-2z+5} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{(Re^{i\theta}+1)e^{3iR\cos\theta-3R\sin\theta}}{(Re^{i\theta})^2-2Re^{i\theta}+5} Rie^{i\theta} d\theta = 0,$$

on obtient

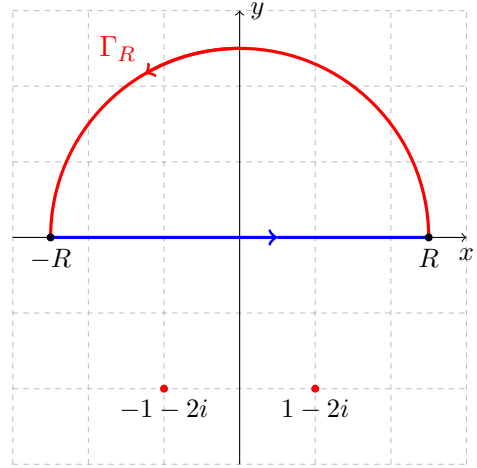
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2-2x+5} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{(x+1)e^{3ix}}{x^2-2x+5} dx = \pi(1+i)e^{-6+3i}.$$

Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5} dx = \overline{\pi(1+i)e^{-6+3i}} = \pi(1-i)e^{-6-3i}.$$

b) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4iz - 5)^2}$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède deux pôles doubles en $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$. Mais aucun de ces pôles n'est situé à l'intérieur du contour C_R . Alors

$$\int_{C_R} \frac{(z+1)e^{3iz}}{z^2 - 2z + 5} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4iz - 5)^2} dz = 0.$$



Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4ix - 5)^2} dx = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4iz - 5)^2} dz = 0,$$

c) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4}$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède quatre pôles simples en $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -i$ et $z_4 = -2i$. Seuls les pôles $z_1 = i$ et $z_2 = 2i$ sont à l'intérieur du contour C_R .

Les résidus en ces pôles sont

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 e^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^4 + 5z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 e^{iz}}{4z^3 + 10z} = -\frac{1}{6e},$$

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 e^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^4 + 5z^2 + 4)} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 e^{iz}}{4z^3 + 10z} = \frac{2}{3e^2}.$$

D'où

$$\int_{C_R} \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{6e} + \frac{2}{3e^2} \right).$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{6e} + \frac{2}{3e^2} \right).$$

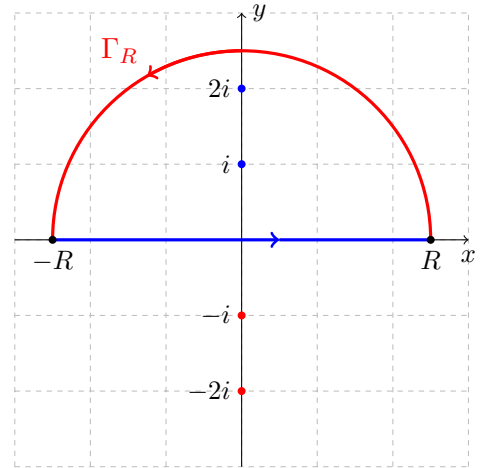
En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} dz = 0$, on

obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = 2\pi i \left(-\frac{1}{6e} + \frac{2}{3e^2} \right) = \frac{4-e}{3e^2} \pi i.$$

Par conséquent,

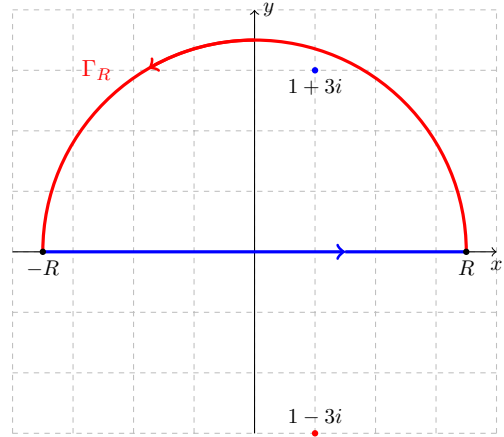
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \right) = \frac{4-e}{3e^2} \pi.$$



d) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède deux pôles simples en $z_1 = 1 + 3i$ et $z_2 = 1 - 3i$. Seul le pôle $z_1 = 1 + 3i$ qui est à l'intérieur du contour C_R .

Le résidu en ce pôle est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1 + 3i) &= \lim_{z \rightarrow 1+3i} \frac{ze^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^2 - 2z + 10)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+3i} \frac{ze^{iz}}{2z - 2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\right) e^{-3+i}. \end{aligned}$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1 + 3i) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i\right) e^{-3+i} = \frac{\pi}{e^3} \left(\frac{1}{3} + i\right) e^i.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10} dz = \frac{\pi}{e^3} \left(\frac{1}{3} + i\right) e^i.$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10} dz = 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx = \frac{\pi}{e^3} \left(\frac{1}{3} + i\right) e^i.$$

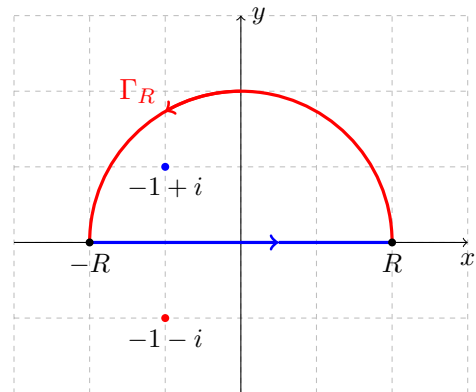
Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx \right) = \frac{\pi}{e^3} \left(\frac{1}{3} \cos 1 - \sin 1\right).$$

e) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2 + 2z + 2}$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède deux pôles simples en $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = -1 - i$. Seul le pôle $z_1 = -1 + i$ qui est à l'intérieur du contour C_R .

Le résidu en ce pôle est

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -1 + i) &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{(z+1)e^{2iz}}{\frac{d}{dz}(z^2 + 2z + 2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{(z+1)e^{2iz}}{2z + 2} = \frac{1}{2} e^{-2-2i}. \end{aligned}$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2 + 2z + 2} dz = 2\pi i \text{Res}(f, -1 + i) = 2\pi i \frac{1}{2} e^{-2-2i} = \pi i e^{-2-2i}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{(x+1)e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2} dz = \pi i e^{-2-2i}.$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2} dz = 0$, on

obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx = \pi i e^{-2-2i} = \pi e^{-2} (\sin 2 + i \cos 2).$$

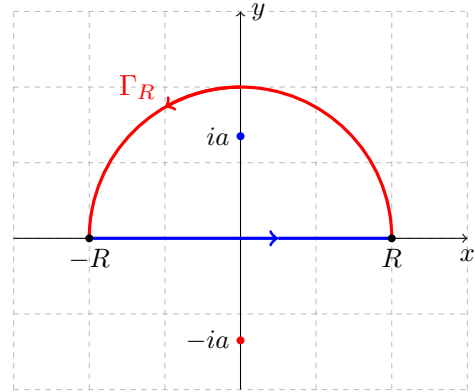
Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin(2x)}{x^2+2x+2} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx \right) = \pi e^{-2} \cos 2.$$

f) On considère $\int_{C_R} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$, $a > 0$ et $C_R = [-R, +R] \cup \Gamma_R$. La fonction $f(z)$ possède deux pôles simples en $z_1 = ia$ et $z_2 = -ia$. Seul le pôle $z_1 = ia$ qui est à l'intérieur du contour C_R .

Le résidu en ce pôle est

$$\operatorname{Res}(f, ia) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{\frac{d}{dz}(z^2+a^2)} = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{2z} = -i \frac{e^{-a}}{2a}.$$



D'où

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) = 2\pi i \cdot \left(-i \frac{e^{-a}}{2a} \right) = \frac{\pi}{ae^a}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = \frac{\pi}{ae^a}.$$

En prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et en remarquant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = 0$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} dx \right) = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Exercice 4.8

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx, a > 0 & \text{b)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx, a > 0, b > 0, \\ \text{c)} \quad & \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \right) \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \operatorname{Re} b > 0. & \text{d)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx, a > 0, \\ \text{e)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2 + b^2)} dx, a > 0, \operatorname{Re} b > 0. \end{aligned}$$

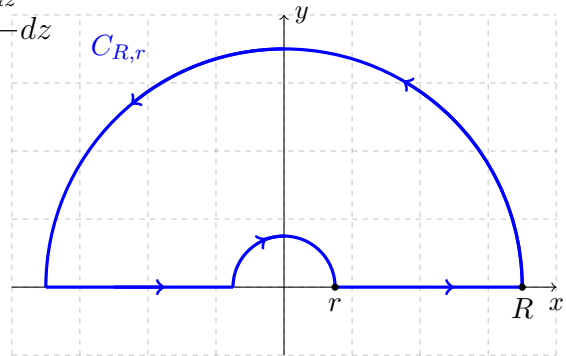
Solution.

Les intégrales de cet exercice reviennent à calculer les intégrales de type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$, $\alpha > 0$, où $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas des racines réelles et $\deg Q \geq \deg P$.

Pour calculer cet intégrale, on considère $\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$

où $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre,

$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons R et r . Donc, d'après le théorème des résidus on obtient



$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right). \end{aligned}$$

Notons que si on procède comme dans les rappels des exercices précédents, on vérifie que l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$.

Pour l'intégrale sur Γ_r on a

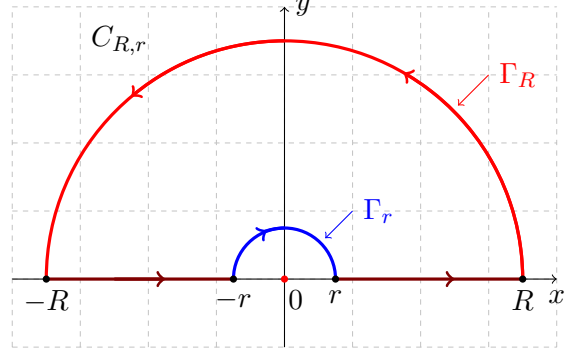
$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} \frac{e^{i\alpha re^{it}}}{re^{it}} ire^{it} dt = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)}.$$

Donc si on fait tendre r vers zéro et R vers $+\infty$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)} + 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right).$$

a) On considère $\int_{C_{R,r}} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz$ où $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre,

$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons R et r . La seule singularité $z_0 = 0$ de $f(z) = \frac{1 - e^{iaz}}{z^2}$ étant à l'extérieur de $C_{R,r}$, on a donc



$$\int_{C_{R,r}} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz + \int_r^R \frac{1 - e^{iax}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \frac{2 - e^{iax} - e^{-iax}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = 0$$

ou encore

$$\int_r^R \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz. \quad (4.7)$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. La deuxième intégrale du second membre tend vers zéro car

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1 - e^{iaR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^2 e^{2i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{1 - e^{-aR(\sin \theta - i \cos \theta)}}{R e^{i\theta}} i d\theta = 0.$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans la première intégrale du deuxième membre de (4.7), on voit que sa limite est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{iaz}}{z^2} dz &= -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{1 - e^{iare^{i\theta}}}{r^2 e^{2i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{1 - e^{iare^{i\theta}}}{iare^{i\theta}} a d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - e^{iare^{i\theta}}}{iare^{i\theta}} a d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi a d\theta = \frac{\pi a}{2} \end{aligned}$$

par passage à la limite sous le symbole d'intégration.

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} dx = \frac{\pi a}{2}.$$

b) On considère $\int_{C_{R,r}} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz$ où $C_{R,r}$ est le contour de l'intégrale a) de cet exercice.

Comme dans l'intégrale a), la seule singularité $z_0 = 0$ de $f(z) = \frac{e^{2ibz} - e^{2iaz}}{z^2}$ étant à l'extérieur de $C_{R,r}$ et donc

$$\int_{C_{R,r}} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz = 0,$$

ou

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{2iax} - e^{2ibx}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz + \int_r^R \frac{e^{2iax} - e^{2ibx}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \frac{e^{2iax} + e^{-2iax} - (e^{2ibx} + e^{-2ibx})}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz = 0$$

ou encore

$$\int_r^R \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz.$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. La deuxième intégrale du second membre tend vers zéro car

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{2iaR(\cos\theta + i\sin\theta)} - e^{2ibR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2 e^{2i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{-2aR(\sin\theta - i\cos\theta)} - e^{-2bR(\sin\theta - i\cos\theta)}}{R e^{i\theta}} i d\theta = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose $z = r e^{i\theta}$ dans l'intégrale sur Γ_r , on voit que sa limite est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{2iaz} - e^{2ibz}}{z^2} dz &= -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{e^{2iare^{i\theta}} - e^{2ibre^{i\theta}}}{r^2 e^{2i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{e^{2iare^{i\theta}} - e^{2ibre^{i\theta}}}{r e^{i\theta}} i d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{2iare^{i\theta}} - e^{2ibre^{i\theta}}}{r e^{i\theta}} i d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (2ia - 2ib) i d\theta = \pi(b - a). \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx = \pi(b-a).$$

Autre méthode. En utilisant l'intégrale **a**), on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2bx) - (1 - \cos(2ax))}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2bx)}{x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2ax)}{x^2} dx \\ &= \frac{\pi(2b)}{2} - \frac{\pi(2a)}{2} = \pi(b-a). \end{aligned}$$

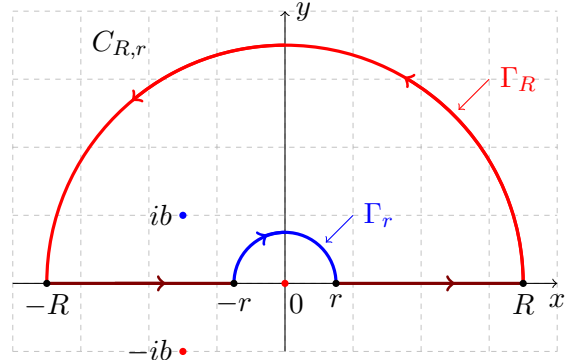
c) On considère $\int_{C_{R,r}} f(z) dz$ où $f(z) = \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z}$

et $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre.

Le pôle de $f(z)$ appartenant à l'intérieur de $C_{R,r}$ est

$z_1 = ib$ car $\operatorname{Re} b > 0$. Le résidu en ce pôle est

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, ib) &= \lim_{z \rightarrow ib} \frac{(z^2 - b^2) e^{iaz}}{z \frac{d}{dz}(z^2 + b^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow ib} \frac{(z^2 - b^2) e^{iaz}}{2z^2} = e^{-ab}. \end{aligned}$$



On a donc

$$\int_{C_{R,r}} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ib) = 2\pi i e^{-ab}.$$

ou

$$\int_{-R}^{-r} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right) \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_r^R \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right) \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz = 2\pi i e^{-ab}.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right) \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_{\Gamma_R} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz = 2\pi i e^{-ab}$$

ou encore

$$\int_r^R \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\right) \frac{\sin(ax)}{x} dx = -\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\right) \frac{e^{iaz}}{z} dz + \pi e^{-ab}.$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. L'intégrale sur Γ_R tend vers zéro car

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \right) \frac{e^{iaz}}{z} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \left(\frac{R^2 e^{2i\theta} - b^2}{R^2 e^{2i\theta} + b^2} \right) \frac{e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \left(\frac{R^2 e^{2i\theta} - b^2}{R^2 e^{2i\theta} + b^2} \right) e^{-aR(\sin\theta - i\cos\theta)} i d\theta = 0. \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur cette limite, voir le rappel de l'exercice 4.7.

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans l'intégrale sur Γ_r , on voit que sa limite est

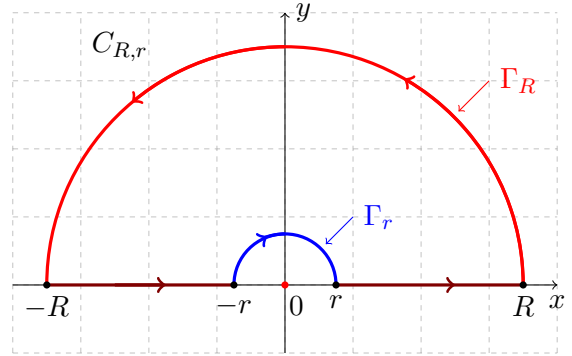
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \left(\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \right) \frac{e^{iaz}}{z} dz &= -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \left(\frac{r^2 e^{2i\theta} - b^2}{r^2 e^{2i\theta} + b^2} \right) \frac{e^{iare^{i\theta}}}{re^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \left(\frac{r^2 e^{2i\theta} - b^2}{r^2 e^{2i\theta} + b^2} \right) e^{iare^{i\theta}} i d\theta \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^2 e^{2i\theta} - b^2}{r^2 e^{2i\theta} + b^2} \right) e^{iare^{i\theta}} i d\theta = -\int_0^\pi \frac{1}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \right) \frac{\sin(ax)}{x} dx = \pi \left(e^{-ab} - \frac{1}{2} \right).$$

d) On considère $\int_{C_{R,r}} \frac{e^{iaz}}{z} dz$ où $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre,

$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$. La seule singularité $z_0 = 0$ de $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z}$ étant à l'extérieur de $C_{R,r}$, on a donc



$$\int_{C_{R,r}} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0$$

ou encore

$$\int_r^R \frac{\sin(ax)}{x^2} dx = -\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz. \quad (4.8)$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. L'intégrale sur Γ_R tend vers zéro car

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{iaR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{R e^{i\theta}} R i e^{i\theta} d\theta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-aR(\sin \theta - i \cos \theta)} i d\theta = 0.$$

Pour plus de détails sur cette limite, voir le rappel de l'exercice 4.7.

Si l'on pose $z = r e^{i\theta}$ dans l'intégrale sur Γ_r , on voit que sa limite est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z} dz &= -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{e^{i a r e^{i\theta}}}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{i a r e^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} e^{i a r e^{i\theta}} d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

par passage à la limite sous le symbole d'intégration.

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

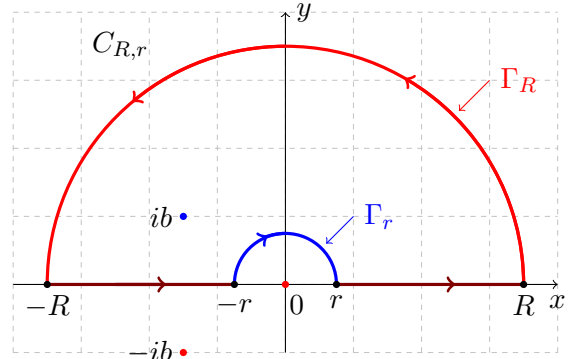
e) On considère $\int_{C_{R,r}} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$

et $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre.

Le pôle de $f(z)$ appartenant à l'intérieur de $C_{R,r}$ est

$z_1 = ib$ car $\operatorname{Re} b > 0$. Le résidu en ce pôle est

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, ib) &= \lim_{z \rightarrow ib} \frac{e^{iaz}}{z \frac{d}{dz}(z^2 + b^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow ib} \frac{e^{iaz}}{2z^2} = -\frac{1}{2b^2} e^{-ab}. \end{aligned}$$



On a donc

$$\int_{C_{R,r}} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ib) = -i \frac{\pi}{b^2} e^{-ab}.$$

ou

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = -i \frac{\pi}{b^2} e^{-ab}.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et en combinant avec celle sur $[r, R]$, on trouve

$$\int_r^R \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = -i \frac{\pi}{b^2} e^{-ab}$$

ou encore

$$\int_r^R \frac{\sin(ax)}{x(x^2 + b^2)} dx = -\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz - \frac{\pi}{2b^2} e^{-ab}.$$

On fait tendre $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$. L'intégrale sur Γ_R tend vers zéro car

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{iaR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{Re^{i\theta}(R^2 e^{2i\theta} + b^2)} R i e^{i\theta} d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{e^{-aR(\sin \theta - i \cos \theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + b^2} i d\theta = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans l'intégrale sur Γ_r , on voit que sa limite est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz &= -\frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^0 \frac{e^{iare^{i\theta}}}{re^{i\theta}(r^2 e^{2i\theta} + b^2)} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{e^{iare^{i\theta}}}{r^2 e^{2i\theta} + b^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{iare^{i\theta}}}{r^2 e^{2i\theta} + b^2} d\theta = \frac{\pi}{2b^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}).$$

Exercice 4.9

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(a+x)^2 + b^2} dx, a > 0, b > 0$, utiliser la fonction $f(z) = \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(a+z)^2 + b^2}$ où

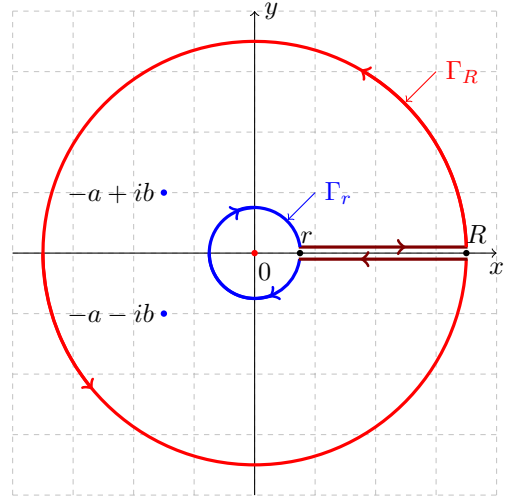
$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \arg z$ avec $\arg z \in [0, 2\pi[$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)((\ln x)^2 + \pi^2)}, a > 0$, utiliser la fonction $f(z) = \frac{1}{(a^2 + z^2) \operatorname{Log} z}$ où

$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \arg z$ avec $\arg z \in]-\pi, \pi]$.

Solution.

a) On considère $\int_{C_{R,r}} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{(\text{Log } z)^2}{(a+z)^2 + b^2}$ avec $\arg z \in [0, 2\pi[$. Le point $z_0 = 0$ étant un point de branchement, on utilisera le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ de la figure ci-contre, Γ_r et Γ_R sont des cercles centrés à l'origine de rayons r et R , où l'axe réel positif est la coupure car $\arg z \in [0, 2\pi[$ et où $[r, R]$ et $[R, r]$ coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension.



La fonction que l'on intègre a deux pôles simples $z_1 = -a + ib$ et $z_2 = -a - ib$ à l'intérieur de $C_{R,r}$. Les résidus en ces pôles sont

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, ib - a) &= \lim_{z \rightarrow ib-a} \frac{(\text{Log } z)^2}{\frac{d}{dz}((a+z)^2 + b^2)} = \lim_{z \rightarrow ib-a} \frac{(\text{Log } z)^2}{2z + 2a} = -i \frac{(\text{Log}(ib - a))^2}{2b}, \\ \text{Res}(f, -ib - a) &= \lim_{z \rightarrow -ib-a} \frac{(\text{Log } z)^2}{\frac{d}{dz}((a+z)^2 + b^2)} = \lim_{z \rightarrow -ib-a} \frac{(\text{Log } z)^2}{2z + 2a} = i \frac{(\text{Log}(-ib - a))^2}{2b}. \end{aligned}$$

On a donc d'après le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{(\text{Log } z)^2}{(a+z)^2 + b^2} dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, ib - a) + \text{Res}(f, -ib - a)) \\ &= \pi \frac{(\text{Log}(ib - a))^2}{b} - \pi \frac{(\text{Log}(-ib - a))^2}{b} \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{(\text{Log } x)^2}{(a+x)^2 + b^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{(\text{Log } z)^2}{(a+z)^2 + b^2} dz + \int_R^r \frac{(\text{Log } x)^2}{(a+x)^2 + b^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{(\text{Log } z)^2}{(a+z)^2 + b^2} dz \\ = \pi \frac{(\text{Log}(ib - a))^2}{b} - \pi \frac{(\text{Log}(-ib - a))^2}{b}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{(\ln x)^2}{(a+x)^2 + b^2} dx + \int_0^{2\pi} \frac{(\text{Log}(Re^{i\theta}))^2}{(a+Re^{i\theta})^2 + b^2} iR e^{i\theta} d\theta + \int_R^r \frac{(\ln x + 2i\pi)^2}{(a+x)^2 + b^2} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(\text{Log}(re^{i\theta}))^2}{(a+re^{i\theta})^2 + b^2} ire^{i\theta} d\theta \\ = \pi \frac{(\text{Log}(ib - a))^2}{b} - \pi \frac{(\text{Log}(-ib - a))^2}{b}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\text{Log } x = \ln x + 2i\pi$ pour l'intégrale le long de $[R, r]$, l'argument de $z = x$ ayant augmenté de 2π en parcourant le cercle Γ_R .

Si l'on prend la limite quand $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$, remarquant que la deuxième et la quatrième intégrales tendent vers zéro, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 - (\ln x + 2i\pi)^2}{(a+x)^2 + b^2} dx = \pi \frac{(\operatorname{Log}(ib-a))^2}{b} - \pi \frac{(\operatorname{Log}(-ib-a))^2}{b}$$

ou

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{4\pi^2}{(a+x)^2 + b^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{4i\pi \ln x}{(a+x)^2 + b^2} dx &= \frac{\pi}{b} \left(\frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) + i \left(\pi - \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} \right) \right)^2 \\ &\quad - \frac{\pi}{b} \left(\frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) + i \left(\pi + \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} \right) \right)^2 \\ &= \frac{4\pi^2}{b} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} - \frac{2i\pi}{b} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} \ln(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on trouve

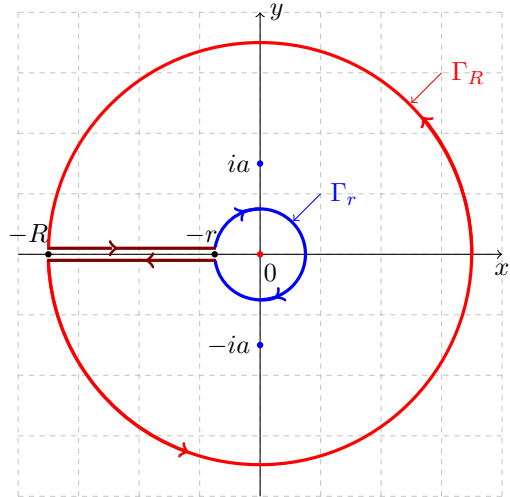
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(a+x)^2 + b^2} dx = \frac{1}{2b} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} \ln(a^2 + b^2)$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}.$$

La deuxième intégrale, même si elle est facile à calculer, étant obtenue en supplément.

b) On considère $\int_{C_{R,r}} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{1}{(a^2 + z^2) \operatorname{Log} z}$ avec $\arg z \in]-\pi, \pi]$. Le point $z_0 = 0$ étant un point de branchement, on utilisera le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ de la figure ci-contre, Γ_r et Γ_R sont des cercles centrés à l'origine de rayons r et R , où l'axe réel négatif est la coupure car $\arg z \in]-\pi, \pi]$ et où $[-r, -R]$ et $[-R, -r]$ coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension.



La fonction à intégrer a deux pôles simples $z_1 = -ia$ et $z_2 = ia$ à l'intérieur de $C_{R,r}$.

Les résidus en ces pôles sont

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{\operatorname{Log} z \frac{d}{dz}(a^2 + z^2)} = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2z \operatorname{Log} z} = \frac{-\pi - 2i \ln a}{a(\pi^2 + 4(\ln a)^2)}, \\ \operatorname{Res}(f, -ia) &= \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{1}{\operatorname{Log} z \frac{d}{dz}(a^2 + z^2)} = \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{1}{2z \operatorname{Log} z} = \frac{-\pi + 2i \ln a}{a(\pi^2 + 4(\ln a)^2)}. \end{aligned}$$

On a donc d'après le théorème des résidus

$$\int_{C_{R,r}} \frac{1}{(a^2 + z^2) \operatorname{Log} z} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, -ia) + \operatorname{Res}(f, ia)) = \frac{-4i\pi^2}{a(\pi^2 + 4(\ln a)^2)}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-r} \frac{1}{(a^2 + x^2) \operatorname{Log} x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(a^2 + z^2) \operatorname{Log} z} dz + \int_{-r}^{-R} \frac{1}{(a^2 + x^2) \operatorname{Log} x} dx \\ + \int_{\Gamma_r} \frac{1}{(a^2 + z^2) \operatorname{Log} z} dz = \frac{-4i\pi^2}{a(\pi^2 + 4(\ln a)^2)}. \end{aligned}$$

On change x par $-x$ dans l'intégrale sur $[-R, -r]$ et on note que $\operatorname{Log}(-x) = \ln x + i\pi$. Ainsi, on change x par $-x$ dans l'intégrale sur $[-r, -R]$ et on note que $\operatorname{Log}(-x) = \ln x - i\pi$.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{1}{(a^2 + x^2)(\ln x + i\pi)} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(a^2 + R^2 e^{2i\theta}) \operatorname{Log}(R e^{i\theta})} iR e^{i\theta} d\theta - \int_r^R \frac{1}{(a^2 + x^2)(\ln x - i\pi)} dx \\ + \int_{\pi}^{-\pi} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{(a^2 + r^2 e^{2i\theta}) \operatorname{Log}(r e^{i\theta})} = \frac{-4i\pi^2}{a(\pi^2 + 4(\ln a)^2)}. \end{aligned}$$

Si l'on prend la limite quand $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$, remarquant que la deuxième et la quatrième intégrales tendent vers zéro, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(a^2 + x^2)(\ln x + i\pi)} - \frac{1}{(a^2 + x^2)(\ln x - i\pi)} \right) dx = \frac{-4i\pi^2}{a(\pi^2 + 4(\ln a)^2)}.$$

Ce qui donne le résultat

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + x^2)((\ln x)^2 + \pi^2)} dx = \frac{2\pi}{a(\pi^2 + 4(\ln a)^2)}.$$
