Classe : 3 ^{ième} Année Prépa, MI	Année universitaire : 2021-2022
Domaine : Mathématique et informatique	Date : 02/01/2022
Module : Analyse 5	Durée : 2 heures

Synthèse

Exercice 1 (6 points). Le but de cet exercice est de déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles (dite équation des ondes) suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

f étant une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour t donné, on pose

$$U(\lambda, t) = \mathcal{F}(u(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} u(x, t) dx$$

la transformée de Fourier de $u(x, t)$ par rapport à la variable x . On admet que :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2 U(\lambda, t)}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial U(\lambda, t)}{\partial t}$$

1. Montrer que $U(\lambda, 0) = \mathcal{F}(f)(\lambda)$ et $\frac{\partial U(\lambda, 0)}{\partial t} = 0$
2. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $U(\lambda, t)$
3. Trouver $U(\lambda, t)$.
4. En déduire l'expression de la solution de $u(x, t)$.
5. Déterminer alors la solution $u(x, t)$ dans le cas où $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 2 (7 points). Soit l'équation aux dérivées partielles d'ordre un suivante :

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z^2}{x}. \quad (2)$$

1. Déterminer le système caractéristique et les intégrales premières associées à l'edp (2)
2. Donner la solution générale de l'edp (2)
3. Déterminer la surface solution de l'edp(2) contenant la courbe γ définie par :

$$(\gamma) : y = 1, \quad (x^2 - 1)z = x.$$

Exercice 3 (7 points). Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (E)$$

- a) Déterminer si l'équation (E) est hyperbolique, parabolique ou elliptique.
- b) Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation.
- c) Transformer cette équation en sa première forme standard (ou canonique).
- d) En déduire la solution générale de (E).