Classe : $3^{ième}$ Année Prépa, MI	**Année universitaire** : 2021-2022
Domaine : Mathématique et informatique	**Date** : 22/05/2022
Module : Analyse 6	**Durée** : 2 h 30

Corrigé de la synthèse

Exercice 1 (6 points) :

I) On a

$$\int_{|z|=1}\left(2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz=2\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz+\int_{|z|=1}f(z)\,dz+\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz.$$

Le point $z_0=0$ est à l'intérieur du cercle $|z|=1$ et la fonction $z\mapsto f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de $|z|=1$ et sur $|z|=1$. Donc par l'application des formules intégrales de Cauchy

$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)\ \text{ et }\ \int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=2\pi i f'(z_0),$$

on aura $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz=2\pi i f(0)$ et $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz=2\pi i f'(0)$, ainsi par application du théorème de Cauchy on a $\displaystyle\int_{|z|=1}f(z)\,dz=0$.

D'où

$$\int_{|z|=1}\left(2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz=2\times 2\pi i f(0)+0+2\pi i f'(0)=2\pi i\left(2f(0)+f'(0)\right). \ \textbf{(1pt)}$$

De même

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\left(2-\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz&=2\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{|z|=1}f(z)\,dz-\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz\\&=2\pi i\left(2f(0)+f'(0)\right). \ \textbf{(1pt)}\end{aligned}$$

Pour déduire les intégrales demandées on pose $z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$ et donc $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$ et $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$. Alors

$$\int_{|z|=1}\left(2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz=\int_0^{2\pi}(2+2\cos\theta)\frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{z}izd\theta=2i\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)f\left(e^{i\theta}\right)d\theta.$$

Sachant que $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et compte tenu de l'intégrale déjà calculée, on aura

$$2\pi i\left(2f(0)+f'(0)\right)=2i\int_0^{2\pi}2\cos^2\frac{\theta}{2}f\left(e^{i\theta}\right)d\theta,$$

ce qui donne

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{2\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta = 2f(0) + f'(0)\,. \ \mathbf{(0.5pt)}$$

De même pour la deuxième intégrale on pose $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ et donc

$$\int_{|z|=1} \left(2 - \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{f(z)}{z} dz = \int_{0}^{2\pi} (2 - 2\cos\theta) \frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{z} iz d\theta = 2i \int_{0}^{2\pi} (1 - \cos\theta) f\left(e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Comme $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, on trouve

$$2\pi i \left(2f(0) - f'(0)\right) = 2i \int_{0}^{2\pi} 2\sin^2\frac{\theta}{2} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta,$$

ce qui donne

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{2\pi} 2\sin^2\frac{\theta}{2} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta = 2f(0) - f'(0)\,. \ \mathbf{(0.5pt)}$$

II) La fonction à intégrer $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2 (z-2)}$ possède un pôle simple en $z_1 = 2$ et un pôle double $z_2 = -1$ [racines de $(z+1)^2 (z-2)$].

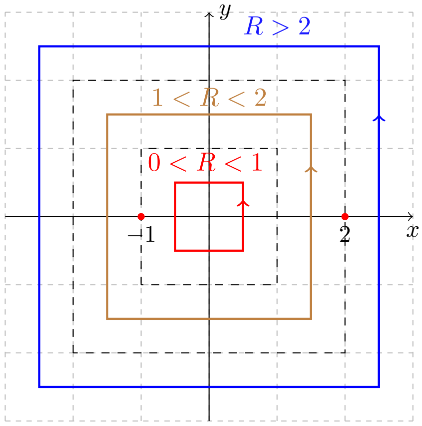
Le résidu en $z_1 = 2$ est

$$\operatorname{Res}(f, 2) = \lim_{z\to 2} \left((z-2) \cdot \frac{1}{(z+1)^2 (z-2)}\right) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{9}. \ \mathbf{(0.25pt)}$$

Le résidu en $z_2 = -1$ est

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \left((z+1)^2 \cdot \frac{1}{(z+1)^2 (z-2)}\right) \\ &= \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-2}\right) = \lim_{z\to -1} \frac{-1}{(z-2)^2} = \frac{-1}{9}. \ \mathbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

On distingue trois cas :



- Le premier cas $0 < R < 1$. Dans ce cas, aucun pôle n'est à l'intérieur du carré C_R et donc par le théorème de Cauchy

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z+1)^2 (z-2)} dz = 0. \ \mathbf{(0.5pt)}$$

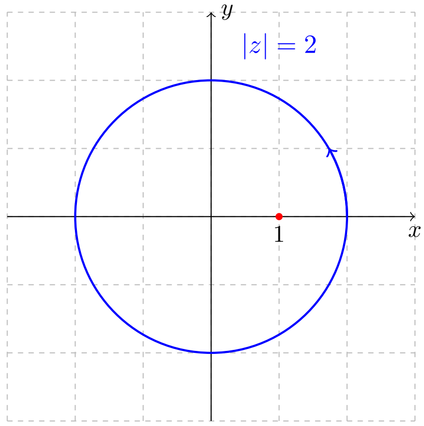
- Le deuxième cas $1 < R < 2$. Dans ce cas, seul le pôle $z_2 = -1$ est à l'intérieur du carré C_R. et donc par le théorème des résidus

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z+1)^2 (z-2)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = 2\pi i \times \frac{-1}{9} = \frac{-2\pi}{9} i.\mathbf{(0.5pt)}$$

- Le troixième cas $R>2$. Dans ce cas, les deux pôles $z_1=2$ et $z_2=-1$ sont à l'intérieur du carré C_R et donc par le théorème des résidus

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z+1)^2(z-2)}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,2)+\operatorname{Res}(f,-1)\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{9}+\frac{-1}{9}\right) = 0.\textbf{(0.5pt)}$$

III) La fonction à intégrer $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ possède un pôle triple en $z_0=1$, qui est à l'intérieur du cercle $|z|=2$.



Le résidu en ce pôle est

$$\operatorname{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\cdot\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}e^{2z}$$

$$= \lim_{z\to 1} 2e^{2z} = 2e^2.$$

Par le théorème des résidus

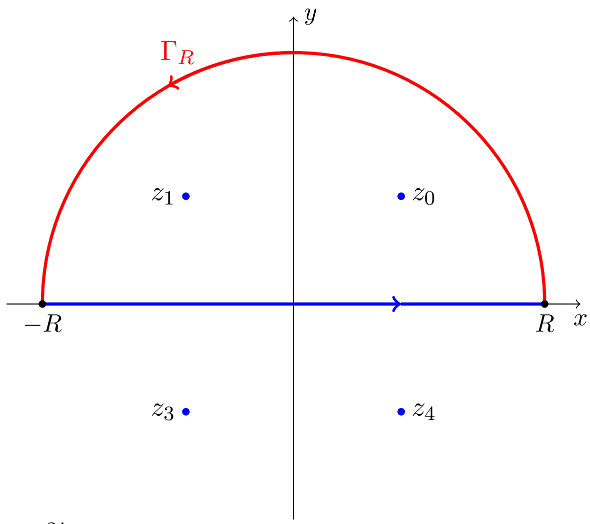
$$\int_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f,1) = 2\pi i\cdot 2e^2 = 4\pi i e^2.\textbf{(1pt)}$$

<u>Exercice 2 (6 points)</u> :

On a

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2\pi x)}{x^4+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi x)}{x^4+4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi i x}}{x^4+4}dx\right).$$

Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi i x}}{x^4+4}dx$, on considère $\displaystyle\int_{C_R}\frac{e^{2\pi i z}}{z^4+4}dz$, $R>0$, où C_R désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment $[-R,+R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.



Les racines de $z^4+4=0$ ou $z^4=-4=4e^{i(\pi+2k\pi)}$ sont $z_k=\sqrt{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}$, $k=0,1,2,3.$

Ces valeurs de z sont des pôles simples de $f(z)=\dfrac{e^{2iz}}{z^4+1}$.

Seuls les pôles $z_0=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}=1+i$ et $z_1=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=-1+i$ sont à l'intérieur de C_R. Les résidus en ces pôles sont

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{e^{2\pi i z}}{\frac{d}{dz}(z^4+4)}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{e^{2\pi i z}}{4z^3}=\frac{e^{2\pi i\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}}{8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}=-\frac{1}{16}(1+i)\,e^{-2\pi},$$

$$\operatorname{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{e^{2\pi i z}}{\frac{d}{dz}(z^4+4)}\right)=\lim_{z\to z_1}\frac{e^{2\pi i z}}{4z^3}=\frac{e^{2\pi i\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}}{8\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}i}}=\frac{1}{16}(1-i)\,e^{-2\pi}.$$

D'après le théorème des résidus on obtient

$$\int\limits_{C_R} \frac{e^{2\pi i z}}{z^4+4}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(f,z_0\right)+\mathrm{Res}\left(f,z_1\right)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{16}\left(1+i\right)e^{-2\pi}+\frac{1}{16}\left(1-i\right)e^{-2\pi}\right) = \frac{\pi}{4}e^{-2\pi}.$$

i.e.

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi i x}}{x^4+4}dx + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{2\pi i z}}{z^4+4}dz = \frac{\pi}{4}e^{-2\pi}.$$

Si l'on prend la limite quand $R \to +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{2\pi i z}}{z^4+4}dz = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{e^{2\pi i R\cos\theta - 2\pi R\sin\theta}}{\left(R\,e^{i\theta}\right)^4+4}R\,ie^{i\theta}d\theta = 0,$$

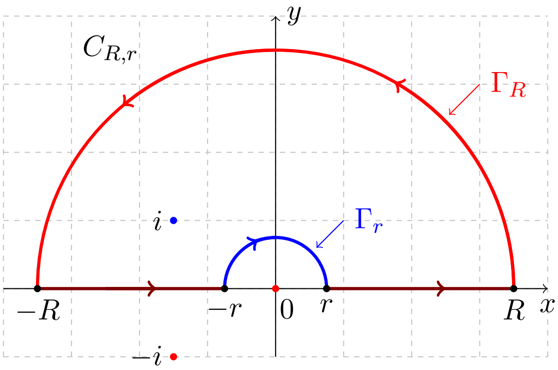
on obtient

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i x}}{x^4+4}dx = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi i x}}{x^4+4}dx = \frac{\pi}{4}e^{-2\pi}.$$

Par conséquent

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\left(2\pi x\right)}{x^4+4}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i x}}{x^4+4}dx\right) = \frac{\pi}{8}e^{-2\pi}.$$

Pour calculer $J = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)}dx$ on considère l'intégrale $\int\limits_{C_{R,r}} f\left(z\right)dz$ où $f\left(z\right) = \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}$ et $C_{R,r}$ est le contour de la figure ci-contre.



Le pôle de $f\left(z\right)$ appartenant à l'intérieur de $C_{R,r}$ est $z_1 = i$. Le résidu en ce pôle est

$$\mathrm{Res}\left(f,i\right) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z\frac{d}{dz}\left(z^2+1\right)} = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{2z^2} = -\frac{1}{2}e^{-1}.$$

On a donc

$$\int\limits_{C_{R,r}} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz = 2\pi i\mathrm{Res}\left(f,i\right) = -i\pi e^{-1}.$$

ou

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+1\right)}dx + \int\limits_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz + \int\limits_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+1\right)}dx + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz = -i\pi e^{-1}.$$

En changeant x en $-x$ dans l'intégrale sur $[-R,-r]$ et en combinant avec celle sur $[r,R]$, on trouve

$$\int\limits_{r}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x\left(x^2+1\right)}dx + \int\limits_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz = -i\pi e^{-1}$$

ou encore

$$\int\limits_{r}^{R} \frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)}dx = -\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz - \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz - \frac{\pi}{2}e^{-1}.$$

On fait tendre $r \to 0$ et $R \to +\infty$. L'intégrale sur Γ_R tend vers zéro car

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}\left(R^2\,e^{2i\theta}+1\right)}R\,ie^{i\theta}d\theta$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{e^{-R(\sin\theta-i\cos\theta)}}{R^2\,e^{2i\theta}+1}id\theta = 0.$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans l'intégrale sur Γ_r, on voit que sa limite est

$$-\frac{1}{2i}\lim_{r\to 0}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)}dz = -\frac{1}{2i}\lim_{r\to 0}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}\left(r^2e^{2i\theta}+1\right)}ire^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{ire^{i\theta}}}{r^2e^{2i\theta}+1}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\lim_{r\to 0}\frac{e^{ire^{i\theta}}}{r^2e^{2i\theta}+1}d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x\left(x^2+1\right)}dx = \frac{\pi}{2}\left(1-e^{-1}\right).$$

Exercice 3 (8 points) :

1) La fonction $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ possède n pôles simples en $z_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}, k = 0,\dots,n-1$**(1pt)** [racines de z^n+1].

Le résidu en $z_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}$ est

$$\text{Res}\left(f, z_k\right) = \lim_{z\to z_k}\left(\frac{1}{\frac{d}{dz}\left(z^n+1\right)}\right) = \lim_{z\to z_k}\frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{ne^{i(\pi+2k\pi)\frac{n-1}{n}}} = \frac{-1}{n}e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}.\textbf{(1pt)}$$

2) Montrons que $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|zf(z)| = 0$. Posons $z = |z|\,e^{i\theta}$. On a donc

$$|zf(z)| = \left|\frac{|z|\,e^{i\theta}}{1+|z|^n e^{in\theta}}\right| = \frac{|z|}{\left|1+|z|^n e^{in\theta}\right|}.$$

D'après l'inégalité triangulaire $\left|1+|z|^n e^{in\theta}\right| \geq \left||z|^n-1\right|$. Donc pour $|z|>1$ on a

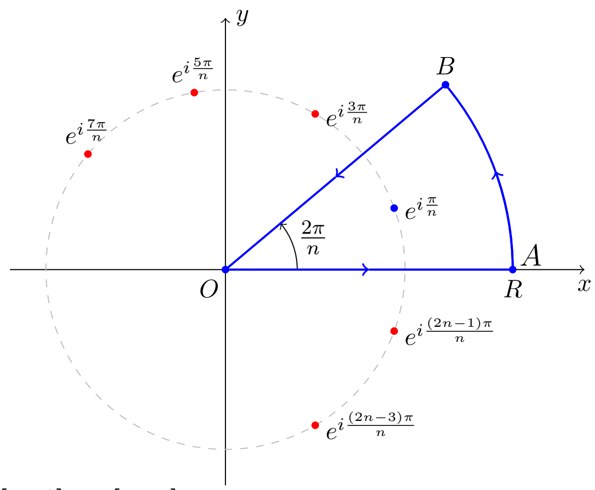
$$|zf(z)| = \frac{|z|}{\left|1+|z|^n e^{in\theta}\right|} \leq \frac{|z|}{|z|^n-1}.$$

Si l'on prend la limite quand $|z|\to+\infty$ on trouve $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|zf(z)| = 0$ car $n\geq 2$.**(1pt)**

3) Seul le pôle $z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}$ est à l'intérieur du contour Σ_R. et donc par le théorème des résidus

$$\int\limits_{\Sigma_R}\frac{1}{1+z^n}dz = 2\pi i\text{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$= 2\pi i\times\left(\frac{-1}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{-2\pi i}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}.\textbf{(1pt)}$$



4) Les équations paramétriques des segments de droites $[OA]$ et $[OB]$ sont, respectivement,

$$z = x \text{ avec } x\in[0,R] \text{ et } z = xe^{\frac{2\pi i}{n}} \text{ avec } x\in[0,R].$$

Ainsi l'équation paramétrique de l'arc$\widehat{AB}$ est $z = R\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$.

Alors l'intégrale $\int\limits_{\Sigma_R} \frac{1}{1+z^n} dz = \frac{-2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}$ s'écrit comme

$$\int\limits_0^R \frac{1}{1+x^n} dx + \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{1+R^n e^{in\theta}} iR\,e^{i\theta} d\theta - \int\limits_0^R \frac{1}{1+x^n e^{2\pi i}} e^{\frac{2\pi i}{n}} dx = \frac{-2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}.\textbf{(1pt)}$$

Si l'on prend la limite quand $R \to +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{1+R^n e^{in\theta}} iR\,e^{i\theta} d\theta = 0, \textbf{(1pt)}$$

on obtient

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{-2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}} \textbf{(1pt)}$$

ou bien

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{-2\pi i}{n} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = \frac{-2\pi i}{n} \frac{1}{e^{-\frac{\pi i}{n}} - e^{\frac{\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}.\textbf{(1pt)}$$