Classe : $3^{ième}$ Année Prépa, ST	**Année universitaire** : 2021-2022
Domaine : Mathématique et informatique	**Date** : 22/05/2022
Module : Analyse 6	**Durée** : 2 h 30

Corrigé de la synthèse

Exercice 1 (6 points) :

I) On a
$$\int_{|z|=1}\left(2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz=2\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz+\int_{|z|=1}f(z)\,dz+\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz.$$

Le point $z_0=0$ est à l'intérieur du cercle $|z|=1$ et la fonction $z\mapsto f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de $|z|=1$ et sur $|z|=1$. Donc par l'application des formules intégrales de Cauchy
$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)\ \text{ et }\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=2\pi i f'(z_0),$$
on aura $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz=2\pi i f(0)$ et $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz=2\pi i f'(0)$, ainsi par application du théorème de Cauchy on a $\displaystyle\int_{|z|=1}f(z)\,dz=0$.

D'où
$$\int_{|z|=1}\left(2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz=2\times 2\pi i f(0)+0+2\pi i f'(0)=2\pi i\Big(2f(0)+f'(0)\Big).\ \mathbf{(1pt)}$$

De même
$$\int_{|z|=1}\left(2-\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz=2\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{|z|=1}f(z)\,dz-\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz$$
$$=2\pi i\Big(2f(0)+f'(0)\Big).\ \mathbf{(1pt)}$$

Pour déduire les intégrales demandées on pose $z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$ et donc $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$ et $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$. Alors
$$\int_{|z|=1}\left(2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz=\int_0^{2\pi}(2+2\cos\theta)\frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{z}izd\theta=2i\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\,f\left(e^{i\theta}\right)d\theta.$$

Sachant que $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et compte tenu de l'intégrale déjà calculée, on aura
$$2\pi i\Big(2f(0)+f'(0)\Big)=2i\int_0^{2\pi}2\cos^2\frac{\theta}{2}f\left(e^{i\theta}\right)d\theta,$$

ce qui donne

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta = 2f(0) + f'(0). \textbf{ (0.5pt)}$$

De même pour la deuxième intégrale on pose $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ et donc

$$\int_{|z|=1} \left(2 - \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{f(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos\theta) \frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{z} iz d\theta = 2i \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta) f\left(e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Comme $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, on trouve

$$2\pi i \left(2f(0) - f'(0)\right) = 2i \int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{\theta}{2} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta,$$

ce qui donne

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{\theta}{2} f\left(e^{i\theta}\right) d\theta = 2f(0) - f'(0). \textbf{ (0.5pt)}$$

II) La fonction à intégrer $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2 (z-2)}$ possède un pôle simple en $z_1 = 2$ et un pôle double $z_2 = -1$ [racines de $(z+1)^2 (z-2)$].

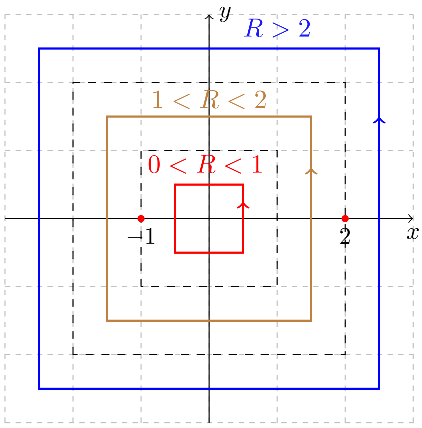
Le résidu en $z_1 = 2$ est

$$\operatorname{Res}(f, 2) = \lim_{z\to 2}\left((z-2)\cdot\frac{1}{(z+1)^2 (z-2)}\right) = \lim_{z\to 2}\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{9}. \textbf{ (0.25pt)}$$

Le résidu en $z_2 = -1$ est

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, -1) &= \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left((z+1)^2\cdot\frac{1}{(z+1)^2 (z-2)}\right)\\ &= \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-2}\right) = \lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-2)^2} = \frac{-1}{9}. \textbf{ (0.25pt)}\end{aligned}$$

On distingue trois cas :



- Le premier cas $0 < R < 1$. Dans ce cas, aucun pôle n'est à l'intérieur du carré C_R et donc par le théorème de Cauchy

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z+1)^2 (z-2)} dz = 0. \textbf{ (0.5pt)}$$

- Le deuxième cas $1 < R < 2$. Dans ce cas, seul le pôle $z_2 = -1$ est à l'intérieur du carré C_R. et donc par le théorème des résidus

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z+1)^2 (z-2)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = 2\pi i \times \frac{-1}{9} = \frac{-2\pi}{9} i. \textbf{(0.5pt)}$$

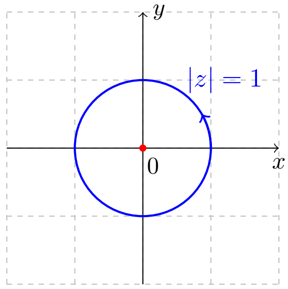
- Le troixième cas $R > 2$. Dans ce cas, les deux pôles $z_1 = 2$ et $z_2 = -1$ sont à l'intérieur du carré C_R et donc par le théorème des résidus

$$\int_{C_R} \frac{1}{(z+1)^2(z-2)} dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,2) + \operatorname{Res}(f,-1)\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{9} + \frac{-1}{9}\right) = 0.\mathbf{(0.5pt)}$$

III) La fonction à intégrer $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ possède une singularité essentielle en $z_0 = 0$. En effet, sa série de Laurent centrée au point $z_0 = 0$ est

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^5} + \frac{1}{4!z^4} + \cdots,$$

qui converge pour toute valeur de $z \neq 0$. Comme cette série possède une infinité de terme dans sa partie principale, alors le point $z_0 = 0$ est une singularité essentielle et $\operatorname{Res}(f,0) = a_{-1} = 1$.

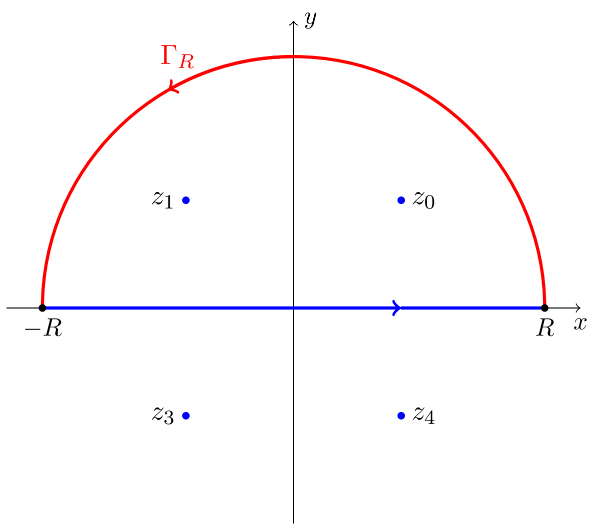


Le point $z_0 = 0$ est à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ et donc par le théorème des résidus

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.\mathbf{(1pt)}$$

Exercice 2 (6 points) :

Pour calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$, on considère $\int_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz, R > 0$, où C_R désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.



Les racines de $z^4 + 1 = 0$ ou $z^4 = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$ sont $z_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}, k = 0, 1, 2, 3.$**(0.5pt)**

Ces valeurs de z sont des pôles simples de $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$.

Seuls les pôles $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ sont à l'intérieur de C_R. Les résidus en ces pôles sont

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)}\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{e^{\frac{-3\pi}{4}i}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i),$$

$$\operatorname{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)}\right) = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}} = \frac{e^{\frac{-9\pi}{4}i}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i).$$

D'après le théorème des résidus on obtient

$$\int_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)\right) \ \textbf{(0.5pt)}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \textbf{(0.5pt)}$$

i.e.

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1} dz = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \tag{1}$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (1) quand $R \to +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1} dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{(R\,e^{i\theta})^4+1} R\, ie^{i\theta} d\theta = 0, \textbf{(0.5pt)}$$

on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \textbf{(1pt)}$$

Pour calculer l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^4+1} dx$, on utilise le fait que $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ et donc

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} I - \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4+1} dx \right). \textbf{(1pt)}$$

Il reste à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4+1} dx$. Pour cela on considère $\int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z^4+1} dz, R > 0$, où C_R désigne le contour de l'intégrale I.

Comme ci-dessus seuls les pôles $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ et $z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ sont à l'intérieur de C_R. Les résidus en ces pôles sont

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \left(\frac{e^{2iz}}{\frac{d}{dz}(z^4+1)} \right) = \lim_{z\to z_0} \frac{e^{2iz}}{4z^3} = \frac{e^{2ie^{\frac{\pi}{4}i}}}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{-\sqrt{2}}{8}(1+i)\, e^{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \left(\frac{e^{2iz}}{\frac{d}{dz}(z^4+1)} \right) = \lim_{z\to z_1} \frac{e^{2iz}}{4z^3} = \frac{e^{2ie^{\frac{3\pi}{4}i}}}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)\, e^{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}.$$

D'après le théorème des résidus on obtient

$$\int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z^4+1} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)\right) = 2\pi i \left(\frac{-\sqrt{2}}{8}(1+i)\, e^{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)\, e^{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \right)$$

$$= \pi \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\sqrt{2} + \sin\sqrt{2} \right) e^{-\sqrt{2}}. \textbf{(1pt)}$$

i.e.

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{x^4+1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{z^4+1} dz = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\sqrt{2} + \sin\sqrt{2} \right) e^{-\sqrt{2}}.$$

Si l'on prend la limite quand $R \to +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{z^4+1}dz = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{2iR\cos\theta - 2R\sin\theta}}{(R\,e^{i\theta})^4+1} R\,ie^{i\theta}d\theta = 0,$$

on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4+1}dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{x^4+1}dx = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\sqrt{2} + \sin\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}.$$

Par conséquent

$$J = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4+1}dx\right) = \pi\frac{\sqrt{2}}{4} - \pi\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\sqrt{2} + \sin\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}.$$

Finalement,

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^4+1}dx = \pi\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \left(\cos\sqrt{2} + \sin\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}}\right).\mathbf{(1pt)}$$

Exercice 3 (8 points) :

1) La fonction $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ possède n pôles simples en $z_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}, k = 0, \ldots, n-1$**(1pt)** [racines de $z^n + 1$].

Le résidu en $z_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}$ est

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z\to z_k}\left(\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^n+1)}\right) = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{ne^{i(\pi+2k\pi)\frac{n-1}{n}}} = \frac{-1}{n}e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}.\mathbf{(1pt)}$$

2) Montrons que $\lim_{|z|\to+\infty} |zf(z)| = 0$. Posons $z = |z|\,e^{i\theta}$. On a donc

$$|zf(z)| = \left|\frac{|z|\,e^{i\theta}}{1+|z|^n\,e^{in\theta}}\right| = \frac{|z|}{|1+|z|^n\,e^{in\theta}|}.$$

D'après l'inégalité triangulaire $\left|1+|z|^n\,e^{in\theta}\right| \geq \left||z|^n - 1\right|$. Donc pour $|z| > 1$ on a

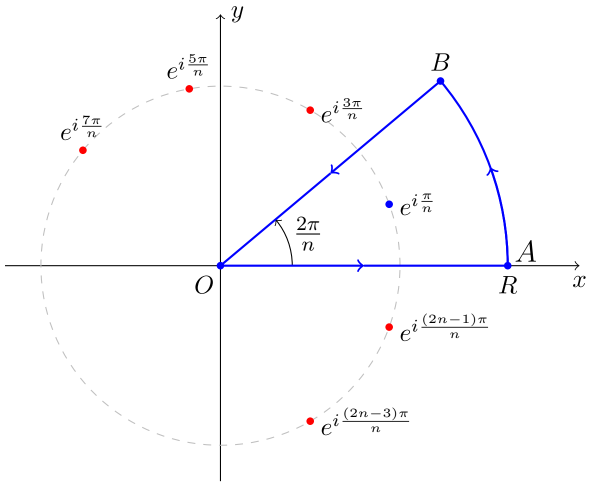
$$|zf(z)| = \frac{|z|}{|1+|z|^n\,e^{in\theta}|} \leq \frac{|z|}{|z|^n - 1}.$$

Si l'on prend la limite quand $|z| \to +\infty$ on trouve $\lim_{|z|\to+\infty} |zf(z)| = 0$ car $n \geq 2$.**(1pt)**

3) Seul le pôle $z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}$ est à l'intérieur du contour Σ_R. et donc par le théorème des résidus

$$\int_{\Sigma_R} \frac{1}{1+z^n}dz = 2\pi i\operatorname{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$= 2\pi i \times \left(\frac{-1}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{-2\pi i}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}.\mathbf{(1pt)}$$



4) Les équations paramétriques des segments de droites $[OA]$ et $[OB]$ sont, respectivement,

$$z = x \text{ avec } x \in [0, R] \text{ et } z = xe^{\frac{2\pi i}{n}} \text{ avec } x \in [0, R].$$

Ainsi l'équation paramétrique de l'arc$\widehat{AB}$ est $z = R\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$.
Alors l'intégrale $\int\limits_{\Sigma_R} \frac{1}{1+z^n} dz = \frac{-2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}$ s'écrit comme

$$\int\limits_0^R \frac{1}{1+x^n} dx + \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{1+R^n e^{in\theta}} iR\,e^{i\theta} d\theta - \int\limits_0^R \frac{1}{1+x^n e^{2\pi i}} e^{\frac{2\pi i}{n}} dx = \frac{-2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}}. \textbf{(1pt)}$$

Si l'on prend la limite quand $R \to +\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{1+R^n e^{in\theta}} iR\,e^{i\theta} d\theta = 0, \textbf{(1pt)}$$

on obtient

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{-2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}} \textbf{(1pt)}$$

ou bien

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{-2\pi i}{n} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = \frac{-2\pi i}{n} \frac{1}{e^{-\frac{\pi i}{n}} - e^{\frac{\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}. \textbf{(1pt)}$$