

Classe : 3^{ième} Année Prépa, ST et MI

Année universitaire : 2021-2022

Domaine : Mathématique et informatique

Date : 09/03/2022

Module : Analyse 6

Durée : 15 minutes

Test 1

Exercice :

- a) Trouver $u(x, y)$ et $v(x, y)$ tels que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ pour $f(z) = \bar{z}^2 + \cos z$.
- b) Trouver l'image du segment de droite joignant les points $z_0 = 1$ et $z_1 = i$ par la transformation $w = -z^2 + z$.
- c) Résoudre dans le plan complexe l'équation $e^{iz} = 1$.

Corrigé.

- a) On a $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ et $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \bar{z}^2 + \cos z \\ &= (x - iy)^2 + \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\ &= x^2 - y^2 - 2ixy + \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\ &= x^2 - y^2 - 2ixy + \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} \\ &= x^2 - y^2 - 2ixy + \frac{(e^y + e^{-y}) \cos x}{2} + \frac{i(e^{-y} - e^y) \sin x}{2} \\ &= x^2 - y^2 + \operatorname{Ch} y \cos x + i(-2xy - \operatorname{Sh} y \sin x). \end{aligned}$$

Donc $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 + \operatorname{Ch} y \cos x$ et $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)) = -2xy - \operatorname{Sh} y \sin x$.

- b) Le segment de droite joignant les points 1 et i peut être paramétré par

$$z = (1 - t)z_0 + tz_1 = 1 - t + ti, \quad t \in [0, 1].$$

La courbe transformée par $w = -z^2 + z$ de ce segment de droite a pour équation

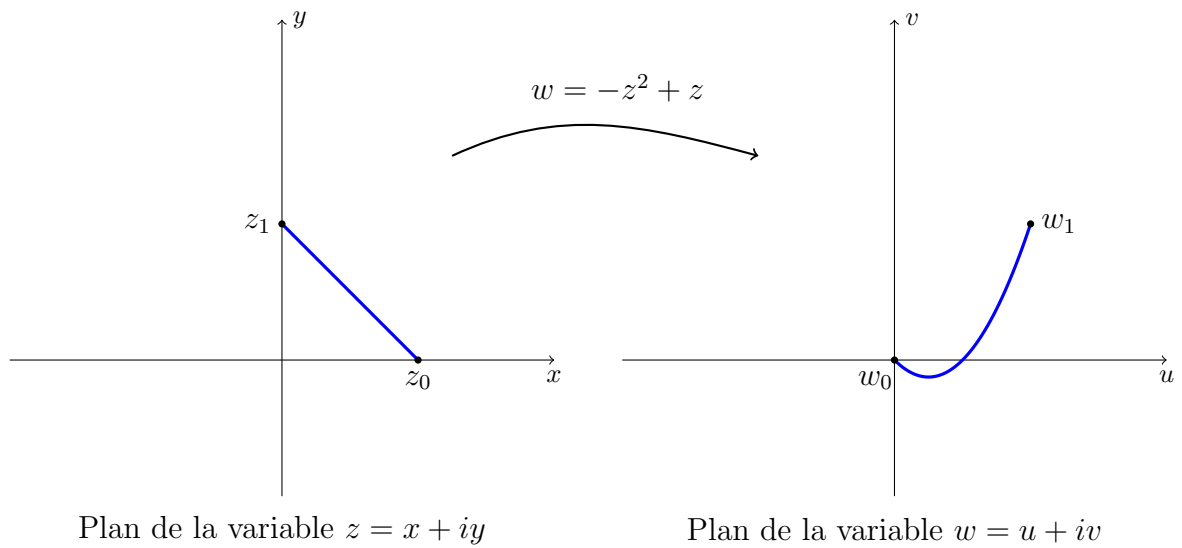
$$w = -(1 - t + ti)^2 + (1 - t + ti) = t + i(2t^2 - t), \quad t \in [0, 1].$$

En tenant compte de $w = u + iv$, l'équation paramétrique de la courbe image est

$$u = t, \quad v = 2t^2 - t, \quad t \in [0, 1].$$

En éliminant t entre u et v , on trouve

$$v = 2u^2 - u, \quad u \in [0, 1].$$



c) Soit $z = x + iy$. On a $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x$.

Si $e^{iz} = 1$, alors on a les deux équations $e^{-y} \cos x = 1$ et $e^{-y} \sin x = 0$.

Puisque $e^{-y} > 0$, on aura $\sin x = 0$ ce qui implique que $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^{-y} \cos(k\pi) = 1 \text{ ou bien } e^y = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Ceci est possible seulement si k est un nombre pair. Dans ce cas $y = 0$. Alors les racines de l'équation $e^{iz} = 1$ sont $z_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.