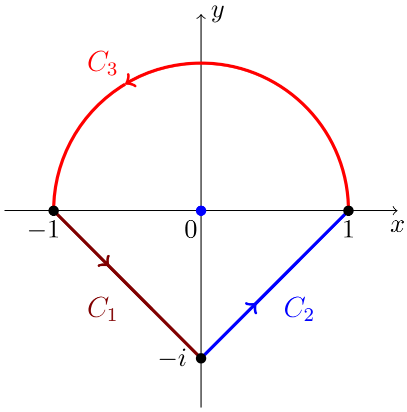
Classe : $3^{ième}$ Année Prépa, ST et MI	**Année universitaire** : 2021-2022
Domaine : Mathématique et informatique	**Date** : 21/04/2022
Module : Analyse 6	**Durée** : 15 minutes

Test 2

Exercice (5 points) : 1) 0.75+0.75+0.5 pts. **2)** 0.75+0.75+0.5 pts. **3)** 1 pt.

1) Donner une représentation paramétrique des chemins suivants.



a) C_1 : le segment de droite allant de -1 vers $-i$.

b) C_2 : le segment de droite allant de $-i$ vers 1.

c) C_3 : le demi cercle supérieur $|z| = 1$ de 1 à -1.

2) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z+1}{z} dz$, $\displaystyle\int_{C_2} \frac{z+1}{z} dz$ et $\displaystyle\int_{C_3} \frac{z+1}{z} dz$.

3) Posons $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. En utilisant la formule intégrale de Cauchy calculer $\displaystyle\int_{C} \frac{z+1}{z} dz$.

Corrigé.

1) On rappelle que :

- Le segment de droite allant de z_0 vers z_1 est paramétré par

$$z(t) = z_0(1-t) + tz_1 = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- Le cercle demi supérieur $|z - z_0| = r$ est paramétré par $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

a) Le segment de droite C_1 allant de $z_0 = -1$ vers $z_1 = -i$ est paramétré par

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = -1 + (1-i)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

b) Le segment de droite C_2 allant de $z_0 = -i$ vers $z_1 = 1$ est paramétré par

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = -i + (1+i)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

c) Le demi cercle supérieur C_3 : $|z| = 1$ de 1 à -1 est paramétré par $z(t) = e^{it}$, $\quad 0 \leq t \leq \pi$.

2) On a

- $$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{z+1}{z} dz = \int_{C_1} \left(1 + \frac{1}{z}\right) dz &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{-1 + (1-i)t}\right)(1-i)\,dt \\ &= \left[(1-i)t + \mathrm{Log}(-1 + (1-i)t)\ \right]_0^1 \\ &= 1 - i + \mathrm{Log}(-i) - \mathrm{Log}(-1) \\ &= 1 - i + \frac{\pi}{2} i \end{aligned}$$

- $$\int_{C_2} \frac{z+1}{z} dz = \int_{C_2} \left(1+\frac{1}{z}\right) dz = \int\limits_0^1 \left(1+\frac{1}{-i+(1+i)\,t}\right)(1+i)\,dt$$
$$= \left[(1+i)\,t + \mathrm{Log}\,(-i+(1+i)\,t)\ \right]_0^1$$
$$= 1+i+\mathrm{Log}\,(1) - \mathrm{Log}\,(-i)$$
$$= 1+i+\frac{\pi}{2}i$$

- $$\int_{C_2} \frac{z+1}{z} dz = \int_{C_2} \left(1+\frac{1}{z}\right) dz = \int\limits_0^\pi \left(1+\frac{1}{e^{it}}\right) ie^{it}dt = \int\limits_0^\pi \left(ie^{it}+i\right) dt$$
$$= \left[e^{it}+it\ \right]_0^\pi$$
$$= e^{i\pi} - 1 + i\pi$$
$$= -2+i\pi$$

On a $z_0 = 0$ est à l'intérieur de la courbe $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Donc par application de la formule intégrale de Cauchy
$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$
avec $f(z) = z+1$ et $z_0 = 0$, on obtient
$$\int_C \frac{z+1}{z} dz = 2i\pi \times (0+1) = 2i\pi.$$
En notant que $\int_C \frac{z+1}{z} dz = \int_{C_1} \frac{z+1}{z} dz + \int_{C_2} \frac{z+1}{z} dz + \int_{C_3} \frac{z+1}{z} dz$, on trouve le même résultat
$$\int_C \frac{z+1}{z} dz = \left(1-i+\frac{\pi}{2}i\right) + \left(1+i+\frac{\pi}{2}i\right) + (-2+i\pi) = 2i\pi.$$