Manuel des solutions aux exercices d'

Analyse 5 (Partie 2 : EDP)

Par

LAADJ Toufik

Table des matières

Chapitre 1

Généralités sur les équations aux dérivées partielles

1.1 Exercices

Exercice 1.1

Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.

a) $u_{xx} + x^2 u_y = y$, **b)** $(u_x)^2 + u\,u_y = 1$, **c)** $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$,

d) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$, **e)** $u_{xx} + u_x + \sin(u) = e^y$, **f)** $u_{xx}u_{yy} + u_y + u_x + u = 0$.

Exercice 1.2

Vérifier que les fonctions $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $u(x,y) = e^x \sin y$ sont bien des solutions de l'équation

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Exercice 1.3

Déterminer la solution générale de l'équation $u_{yy} + u = 0$, où $u = u(x,y)$.

Exercice 1.4

Déterminer la solution générale de

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad \text{où } u = u(x,y)$$

en utilisant les nouvelles coordonnées : $\xi = x + y$ et $\eta = x - y$.

Exercice 1.5

Montrer que l'équation de la chaleur

$$u_t = k\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

exprimée en coordonnées polaires : $r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$ est

$$u_t = k\left(u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r\right) \quad \text{où} \quad u = u\left(x, y, t\right) = u\left(r, \theta, t\right).$$

1.2 Solution des exercices

Exercice 1.1

Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.

a) $u_{xx} + x^2 u_y = y$, **b)** $(u_x)^2 + u\, u_y = 1$, **c)** $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$

d) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$, **e)** $u_{xx} + u_x + \sin(u) = e^y$, **f)** $u_{xx}u_{yy} + u_y + u_x + u = 0$.

Solution de l'exercice 1.1.

a) $u_{xx} + x^2 u_y = y$.

Cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2. Pour montrer que l'EDP est linéaire, considérons l'opérateur

$$u \longmapsto Lu = u_{xx} + x^2 u_y.$$

Celui-ci est linéaire. En effet, prenons $a, b \in \mathbb{R}$ et u, v deux fonctions. Alors il nous faut vérifier que

$$L(au + bv) = aL(u) + bL(v).$$

Par les propriétés des dérivées partielles, nous obtenons

$$\begin{aligned} L(au + bv) &= (au + bv)_{xx} + x^2 (au + bv)_y = au_{xx} + bv_{xx} + ax^2 u_y + bx^2 v_y \\ &= a\left(u_{xx} + x^2 u_y\right) + b\left(v_{xx} + x^2 v_y\right) = aL(u) + bL(v). \end{aligned}$$

Ceci complète le preuve que L est un opérateur linéaire. Comme notre équation est de la forme $L(u) = y$, nous pouvons conclure que l'EDP est linéaire. À cause aussi de cette forme, l'EDP est non homogène. Comme la dérivée partielle d'ordre supérieure est d'ordre 2, alors l'EDP est d'ordre 2.

b) $(u_x)^2 + u\, u_y = 1$.

Cette EDP n'est pas linéaire. Elle est d'ordre 1. Cette EDP est de la forme $T(u) = 1$ où T est l'opérateur

$$u \longmapsto T(u) = (u_x)^2 + u\, u_y.$$

Pour vérifier que cette EDP n'est pas linéaire, il suffit de montrer que T n'est pas un opérateur linéaire. Il nous faut donc trouver deux nombres réels a et b, ainsi que deux fonctions u et v tels que

$$T(au+bv) \neq aT(u)+bT(v).$$

Prenons $a=b=1, u=2x+y$ et $v=y^2$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} T(u+v) = T\left(2x+y+y^2\right) &= \left(\left(2x+y+y^2\right)_x\right)^2 + \left(2x+y+y^2\right)\left(2x+y+y^2\right)_y \\ &= 2^2+\left(2x+y+y^2\right)(1+2y) = 4+2x+y+4xy+3y^2+2y^3, \end{aligned}$$

$$T(u) = T(2x+y) = \left((2x+y)_x\right)^2 + (2x+y)(2x+y)_y = 4+2x+y$$

et

$$T(v) = T\left(y^2\right) = \left(\left(y^2\right)_x\right)^2 + \left(y^2\right)\left(y^2\right)_y = 0+y^2(2y) = 2y^3.$$

Nous voyons bien dans ce cas que $T(u+v) \neq T(u)+T(v)$. Ceci montre que l'EDP n'est pas linéaire. Comme la dérivée partielle d'ordre supérieure est d'ordre 1, alors l'EDP est d'ordre 1.

Pour c), d) et e), nous allons seulement donner les réponses. Il suffit de procéder comme ci-dessus dans chacun de ces cas, nous laissons aux étudiant(e)s le soin de faire ces vérifications.

c) $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$. Cette EDP est linéaire, homogène et d'ordre 4.

d) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=\sin x$. Cette EDP est linéaire, non homogène et d'ordre 2.

e) $u_{xx}+u_x+\sin(u)=e^y$. Cette EDP n'est pas linéaire, elle est quasi-linéaire. Elle est d'ordre 2.

f) $u_{xx}u_{yy}+u_y+u_x+u=0$. Cette EDP est complètement non linéaire. Elle est d'ordre 2.

Exercice 1.2

Vérifier que les fonctions $u(x,y)=x^2-y^2$ et $u(x,y)=e^x\sin y$ sont bien des solutions de l'équation

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

Solution de l'exercice 1.2.

- Si $u(x,y)=x^2-y^2$, alors

$$u_x=2x, \quad u_{xx}=2, \quad u_y=-2y, \quad u_{yy}=-2 \Longrightarrow u_{xx}+u_{yy}=2-2=0.$$

Ceci montre que u est bien une solution.

- Si $u(x,y) = e^x \sin y$, alors

$$u_x = e^x \sin y, \quad u_{xx} = e^x \sin y, \quad u_y = e^x \cos y, \quad u_{yy} = -e^x \sin y$$

implique que

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0.$$

Ceci montre que u est bien une solution.

Exercice 1.3

Déterminer la solution générale de l'équation $u_{yy} + u = 0$, où $u = u(x,y)$.

Solution de l'exercice 1.3.

Rappelons que l'équation différentielle ordinaire $Y'' + Y = 0$ pour laquelle $Y = Y(y)$ est une fonction de la variable y et $Y''(y)$ désigne la dérivée seconde par rapport à y a comme solution générale

$$Y(y) = a \cos y + b \sin y,$$

où a et b sont des nombres réels quelconques. Nous pouvons maintenant adapter ce résultat. Ainsi l'EDP

$$u_{yy} + u = 0 \quad \text{avec } u = u(x,y)$$

a comme solution générale

$$u(x,y) = a(x) \cos y + b(x) \sin y$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions quelconques de x.

Exercice 1.4

Déterminer la solution générale de

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad \text{où } u = u(x,y)$$

en utilisant les nouvelles coordonnées : $\xi = x + y$ et $\eta = x - y$.

Solution de l'exercice 1.4.

Si $\xi = x + y$ et $\eta = x - y$, alors en utilisant la règle de chaînes nous obtenons

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} := u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \\ u_{xx} &= (u_x)_x = (u_\xi + u_\eta)_x = (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_x + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} \\ &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} := u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi - u_\eta, \\ u_{yy} &= (u_y)_y = (u_\xi - u_\eta)_y = (u_\xi - u_\eta)_\xi \xi_y + (u_\xi - u_\eta)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - (u_{\eta\xi} - u_{\eta\eta}) \\ &= u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Conséquemment $u_{xx} - u_{yy} = 0$ devient $4u_{\xi\eta} = 0$. Il nous suffit donc de résoudre l'EDP $u_{\xi\eta} = 0$. Mais nous avons $u_{\xi\eta} = (u_\eta)_\xi = 0$ donc $u_\eta = f(\eta)$ et

$$u(\xi, \eta) = \int f(\eta)\, d\eta + g(\xi) = h(\eta) + g(\xi).$$

où f, g et h sont des fonctions dérivables arbitraires. Donc la solution générale est

$$u(x, y) = g(x + y) + h(x - y)$$

avec g et h comme ci-dessus.

Exercice 1.5

Montrer que l'équation de la chaleur

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$$

exprimée en coordonnées polaires : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{Arctg}\, \frac{y}{x}$ est

$$u_t = k\left(u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r\right) \quad \text{où} \quad u = u(x, y, t) = u(r, \theta, t).$$

Solution de l'exercice 1.5.

Rappelons que nous avons

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et } \theta = \text{Arctg}\, \frac{y}{x}.$$

Alors$\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta, \quad \theta_x = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{r}\sin\theta$$

et

$$\theta_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{r}\cos\theta.$$

En utilisant la règle de chaînes, nous avons

$$\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x = \cos\theta u_r - \frac{1}{r}\sin\theta u_\theta, \\
u_{xx} &= \left(\cos\theta u_r - \frac{1}{r}\sin\theta u_\theta\right)_x = \left(\cos\theta u_r - \frac{1}{r}\sin\theta u_\theta\right)_r r_x + \left(\cos\theta u_r - \frac{1}{r}\sin\theta u_\theta\right)_\theta \theta_x \\
&= \left(\cos\theta u_{rr} - \frac{1}{r}\sin\theta u_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\sin\theta u_\theta\right)\cos\theta \\
&+ \left(-\sin\theta u_r + \cos\theta u_{\theta r} - \frac{1}{r}\cos\theta u_\theta - \frac{1}{r}\sin\theta u_{\theta\theta}\right)\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right) \\
&= \cos^2\theta u_{rr} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta u_{\theta\theta} - \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta u_{r\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta u_r + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta u_\theta.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y = \sin\theta u_r + \frac{1}{r}\cos\theta u_\theta, \\
u_{yy} &= \left(\sin\theta u_r + \frac{1}{r}\cos\theta u_\theta\right)_y = \left(\sin\theta u_r + \frac{1}{r}\cos\theta u_\theta\right)_r r_y + \left(\sin\theta u_r + \frac{1}{r}\cos\theta u_\theta\right)_\theta \theta_y \\
&= \left(\sin\theta u_{rr} + \frac{1}{r}\cos\theta u_{r\theta} - \frac{1}{r^2}\cos\theta u_\theta\right)\sin\theta \\
&+ \left(\cos\theta u_r + \sin\theta u_{\theta r} - \frac{1}{r}\sin\theta u_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta u_{\theta\theta}\right)\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right) \\
&= \sin^2\theta u_{rr} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta u_{\theta\theta} + \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta u_{r\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta u_r - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta u_\theta.
\end{aligned}$$

Donc après substitution et simplification, nous obtenons que

$$u_t = k\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \quad \text{est équivalent à} \quad u_t = k\left(u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r\right).$$

Chapitre 2

EDP d'ordre un et méthode des caractéristiques

2.1 Exercices

Exercice 2.1

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + cu_x + \lambda u = 0 \quad \text{avec} \quad u(x,0) = f(x),$$

où $\lambda > 0$, $f(x)$ est une fonction donnée et $u = u(x,t)$.

Exercice 2.2

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + cu_x = h(x,t) \quad \text{avec} \quad u(x,0) = f(x),$$

où c est un nombre réel non nul, $h(x,t)$ est une fonction donnée et $u = u(x,t)$.

Exercice 2.3

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + e^x u_x = 0 \quad \text{avec} \quad u(x,0) = x,$$

où $u = u(x,t)$.

Exercice 2.4

Considérer la solution de d'Alembert de l'équation des ondes pour le déplacement initial $f(x)$

et la vitesse initiale $g(x)$ suivants:

a) $f(x) = x$ et $g(x) = 0$, **b)** $f(x) = 0$ et $g(x) = x$,

c) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -c\cos x$, **d)** $f(x) = \sin x$ et $g(x) = c\cos x$.

Exercice 2.5

Considérer l'EDP linéaire non-homogène

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t),$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_t(x,0) = g(x),$$

où c est un nombre réel positif, $h(x,t), f(x), g(x)$ sont des fonctions données et $u = u(x,t)$.

a) Montrer que ce problème est équivalent au système

$$\begin{cases} v_t + cv_x = h(x,t), & v(x,0) = g(x) - cf'(x), \\ u_t - cu_x = v, & u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

b) Déterminer la solution du problème à valeur initiale

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = x + t \quad \text{avec} \quad u(x,0) = x \quad \text{et} \quad u_t(x,0) = \sin x$$

en procédant comme nous l'avons fait en décrivant la solution de d'Alembert pour l'équation des ondes.

2.2 Solution des exercices

Exercice 2.1

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + cu_x + \lambda u = 0 \qquad \text{avec} \qquad u(x, 0) = f(x),$$

où $\lambda > 0$, $f(x)$ est une fonction donnée et $u = u(x, t)$.

Solution de l'exercice 2.1.

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = c.$$

Nous pouvons résoudre ces équations par séparation de variables :

$$\frac{dt}{ds} = 1 \Rightarrow dt = ds \Rightarrow \int dt = \int ds + \text{constante} \ \Rightarrow t = s + t_0$$

et

$$\frac{dx}{ds} = c \Rightarrow dx = cds \Rightarrow \int dx = c \int ds + \text{constante} \ \Rightarrow x = c\,s + x_0.$$

Si nous considérons la fonction u recherchée comme fonction de s, *i.e.* $u(s) = u(x(s), t(s))$, alors en utilisant la règle de chaînes et le fait que u est une solution de l'EDP $u_t + cu_x + \lambda u = 0$, nous obtenons

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = c\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda u.$$

Nous pouvons résoudre cette dernière équation différentielle ordinaire par séparation de variables :

$$\frac{du}{ds} = -\lambda u \Rightarrow \frac{du}{u} = -\lambda ds \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\lambda \int ds + \text{constante} \ \Rightarrow \ln|u| = -\lambda s + c.$$

Si nous fixons $u(0) = u_0$, alors nous aurons $u(s) = u_0 e^{-\lambda s}$. Ainsi les courbes caractéristiques sont

$$s \mapsto (x(s), t(s), u(s)) = \left(cs + x_0, s + t_0, u_0 e^{-\lambda s}\right).$$

Si nous considérons les conditions initiales

$$x_0 = \tau, \qquad t_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_0 = f(\tau),$$

alors nous obtenons les courbes caractéristiques

$$s \mapsto (x(s,\tau), t(s,\tau), u(s,\tau)) = \left(cs+\tau, s, f(\tau)\, e^{-\lambda s}\right).$$

Il est possible de déterminer la fonction inverse de $(s,\tau) \mapsto (x(s,\tau), t(s,\tau)\ 0pt - 0.1cm)$. En effet

$$\begin{cases} cs+\tau = x \\ s = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = t \\ \tau = x - cs = x - ct \end{cases}.$$

Donc si nous exprimons u en fonction de x et t plutôt que s et τ, nous obtenons

$$u(x,t) = f(x-ct)\, e^{-\lambda t}.$$

Cette fonction est la solution du problème. Nous pouvons vérifier ceci facilement. En effet nous avons

$$u_t = -cf'(x-ct)\, e^{-\lambda t} - \lambda f(x-ct)\, e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad u_x = f'(x-ct)\, e^{-\lambda t}.$$

Conséquemment

$$u_t + cu_x + \lambda u = -cf'(x-ct)\, e^{-\lambda t} - \lambda f(x-ct)\, e^{-\lambda t} + cf'(x-ct)\, e^{-\lambda t} + \lambda f(x-ct)\, e^{-\lambda t} = 0$$

et

$$u(x,0) = f(x - c\cdot 0)\, e^{-\lambda\cdot 0} = f(x).$$

Exercice 2.2

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + cu_x = h(x,t) \qquad \text{avec} \qquad u(x,0) = f(x),$$

où c est un nombre réel non nul, $h(x,t)$ est une fonction donnée et $u = u(x,t)$.

Solution de l'exercice 2.2.

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = c.$$

Nous pouvons résoudre ces équations par séparation de variables :

$$\frac{dt}{ds} = 1 \Rightarrow dt = ds \Rightarrow \int dt = \int ds + \text{constante} \ \Rightarrow t = s + t_0$$

et
$$\frac{dx}{ds}=c\Rightarrow dx=cds\Rightarrow\int dx=c\int ds+\text{constante}\ \Rightarrow x=c\,s+x_0.$$
Si nous considérons la fonction u recherchée comme fonction de s, *i.e.* $u(s)=u(x(s),t(s))$, alors en utilisant la règle de chaînes et le fait que u est une solution de l'EDP $u_t+cu_x=h(x,t)$, nous obtenons
$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds}=c\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=h(x,t)=h(c\,s+x_0,s+t_0).$$
La solution de cette dernière équation différentielle avec $v(0)=v_0$ est
$$u(s)=u_0+\int_0^s h(c\,\omega+x_0,\omega+t_0)\,d\omega.$$
La condition initiale $u(x,0)=f(x)$ peut être paramétrée par $x_0=\tau,t_0=0$ et $u_0=u(x_0,0)=u(\tau,0)=f(\tau)$. Alors nous obtenons pour chaque τ, la courbe caractéristique
$$s\mapsto(x(s,\tau),t(s,\tau),u(s,\tau))=\left(cs+\tau,s,f(\tau)+\int_0^s h(c\,\omega+\tau,\omega)\,d\omega\right).$$
Il est possible de déterminer la fonction inverse de $(s,\tau)\mapsto(x(s,\tau),t(s,\tau)\ \ 0pt-0.1cm)$. En effet
$$\begin{cases}cs+\tau=x\\ s=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=t\\ \tau=x-cs=x-ct\end{cases}.$$
Donc si nous exprimons u en fonction de x et t plutôt que s et τ, nous obtenons
$$u(x,t)=f(x-ct)+\int_0^t h(c\,\omega+x-ct,\omega)\,d\omega.$$
Cette fonction est la solution du problème. Nous pouvons vérifier ceci facilement. En effet nous avons
$$u_t=-cf'(x-ct)+h(x,t)-c\int_0^t\frac{\partial h}{\partial x}(c\,\omega+x-ct,\omega)\,d\omega$$
et
$$u_x=f'(x-ct)+\int_0^t\frac{\partial h}{\partial x}(c\,\omega+x-ct,\omega)\,d\omega.$$
Conséquemment
$$u_t+cu_x=h(x,t)\quad\text{et}\quad u(x,0)=f(x).$$

Exercice 2.3

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.
$$u_t+e^xu_x=0\quad\text{avec}\quad u(x,0)=x,$$
où $u=u(x,t)$.

Solution de l'exercice 2.3.

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} = e^x \quad \text{avec} \;\; t(0) = t_0 \text{ et } x(0) = x_0.$$

Nous pouvons résoudre ces équations par séparation de variables :

$$\frac{dt}{ds} = 1 \Rightarrow dt = ds \Rightarrow \int dt = \int ds + \text{constante} \;\; \Rightarrow t = s + t_0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} = e^x \Rightarrow \frac{dx}{e^x} = ds \Rightarrow \int e^{-x} dx = \int ds + \text{constante} \;\; \Rightarrow -e^{-x} = s - e^{-x_0} \\ \Rightarrow x = -\operatorname{Log}\left(e^{-x_0} - s\right) = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{e^{-x_0} - s}\right). \end{aligned}$$

Si nous considérons la fonction u recherchée comme fonction de s, *i.e.* $u(s) = u(x(s), t(s))$, alors en utilisant la règle de chaînes et le fait que u est une solution de l'EDP $u\ u_t + e^x u_x = 0$, nous obtenons

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = e^x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Cette équation différentielle ordinaire peut facilement être résolue. Nous obtenons $u(s) = u_0$. La condition initiale $u(x, 0) = x$ peut être paramétrée par $x_0 = \tau, t_0 = 0$ et $u_0 = u(x_0, 0) = u(\tau, 0) = \tau$. Alors nous obtenons pour chaque τ, la courbe caractéristique

$$s \mapsto (x(s,\tau), t(s,\tau), u(s,\tau)) = \left(\operatorname{Log}\left(\frac{1}{e^{-\tau} - s}\right), s, \tau\right).$$

La fonction $(s, \tau) \mapsto (x(s,\tau), t(s,\tau))$ a une fonction inverse. En effet, $s = t$ et

$$\begin{aligned} x = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{e^{-\tau} - s}\right) \Rightarrow x = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{e^{-\tau} - t}\right) \Rightarrow e^x = \frac{1}{e^{-\tau} - t} \Rightarrow e^{-x} = e^{-\tau} - t \\ \Rightarrow e^{-\tau} = e^{-x} + t \Rightarrow \operatorname{Log} e^{-\tau} = \operatorname{Log}\left(e^{-x} + t\right) \end{aligned}$$

nous permet de conclure finalement que

$$\tau = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{e^{-x} + t}\right) = \operatorname{Log}\left(\frac{e^x}{1 + te^x}\right) = x - \operatorname{Log}(1 + te^x).$$

En substituant l'expression pour τ dans $u(s, \tau) = \tau$ par leurs valeurs en fonction de x et t nous obtenons la solution du problème

$$u(x, t) = x - \operatorname{Log}(1 + te^x).$$

Nous pouvons vérifier que cette fonction est bien une solution du problème. En effet, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-e^x}{1+te^x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{te^x}{1+te^x} = \frac{1}{1+te^x}.$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + e^x \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-e^x}{1+te^x} + e^x \frac{1}{1+te^x} = 0 \quad \text{avec } u(x,0) = x - \text{Log}(1) = x.$$

Exercice 2.4

Considérer la solution de d'Alembert de l'équation des ondes pour le déplacement initial $f(x)$ et la vitesse initiale $g(x)$ suivants:

a) $f(x) = x$ et $g(x) = 0$, **b)** $f(x) = 0$ et $g(x) = x$,

c) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -c \cos x$, **d)** $f(x) = \sin x$ et $g(x) = c \cos x$.

Solution de l'exercice 2.4.

On rappelle que la solution de l'équation des ondes

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{avec} \quad u(x,0) = f(x) \quad \textit{et} \quad u_t(x,0) = g(x),$$

obtenue par d'Alembert est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda)\, d\lambda.$$

a) $f(x) = x$ et $g(x) = 0$.

Si $f(x) = x$ et $g(x) = 0$, alors la solution de d'Alembert est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left((x+ct) + (x-ct) \right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0 d\lambda = x.$$

b) $f(x) = 0$ et $g(x) = x$.

Si $f(x) = 0$ et $g(x) = x$, alors la solution de d'Alembert est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(0+0 \right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \lambda d\lambda = \left[\frac{1}{4c}\lambda^2\right]_{x-ct}^{x+ct} = \frac{1}{4c}\left((x+ct)^2 - (x-ct)^2\right) = tx.$$

c) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -c\cos x$.

Si $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -c\cos x$, alors la solution de d'Alembert est

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \left(-c\cos(\lambda)\right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right) - \left[\frac{1}{2}\sin\lambda\right]_{x-ct}^{x+ct} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right) - \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)\right) = \sin(x-ct).
\end{aligned}$$

d) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = c\cos x$.

Si $f(x) = \sin x$ et $g(x) = c\cos x$, alors la solution de d'Alembert est

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \left(c\cos(\lambda)\right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right) + \left[\frac{1}{2}\sin\lambda\right]_{x-ct}^{x+ct} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)\right) = \sin(x+ct).
\end{aligned}$$

Exercice 2.5

Considérer l'EDP linéaire non-homogène

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t),$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_t(x,0) = g(x),$$

où c est un nombre réel positif, $h(x,t), f(x), g(x)$ sont des fonctions données et $u = u(x,t)$.

a) Montrer que ce problème est équivalent au système

$$\begin{cases} v_t + cv_x = h(x,t), & v(x,0) = g(x) - cf'(x), \\ u_t - cu_x = v, & u(x,0) = f(x). \ -0.4cm \end{cases}$$

b) Déterminer la solution du problème à valeur initiale

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = x + t \quad \text{avec} \quad u(x,0) = x \quad \text{et} \quad u_t(x,0) = \sin x$$

en procédant comme nous l'avons fait en décrivant la solution de d'Alembert pour l'équation des ondes.

Solution de l'exercice 2.5.

a) Nous pouvons écrire l'EDP sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)u=h\left(x,t\right).$$

En effet, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)u&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-c\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=h\left(x,t\right)\end{aligned}$$

en supposant que les dérivées partielles d'ordre 2 de u sont continues et conséquemment que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}.$$

Si nous considérons

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}-c\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{v}=h\left(x,t\right)$$

nous obtenons bien le système

$$\begin{cases}u_t-cu_x=v,\\ v_t+cv_x=h\left(x,t\right).\end{cases}\tag{2.1}$$

Les conditions initiales $u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$ et $u_t\left(x,0\right)=g\left(x\right)$ signifient en utilisant la première équation du système (2.1) que

$$v\left(x,0\right)=u_t\left(x,0\right)-cu_x\left(x,0\right)=g\left(x\right)-cf'\left(x\right).$$

Nous avons donc comme problème à résoudre

$$\begin{cases}v_t+cv_x=h\left(x,t\right)\quad\text{avec comme condition initiale}\quad v\left(x,0\right)=g\left(x\right)-cf'\left(x\right),\\ u_t-cu_x=v\quad\text{avec comme condition initiale}\quad u\left(x,0\right)=f\left(x\right).\end{cases}$$

b) Ici $h\left(x,t\right)=x+t$, $f\left(x\right)=x$ et $g\left(x\right)=\sin x$.

Pour déterminer la solution u, il nous faut premièrement déterminer v tel que

$$v_t+cv_x=x+t,\quad v\left(x,0\right)=\sin x-c.$$

En utilisant le résultat de l'exercice 2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}v\left(x,t\right)&=v\left(x-ct,0\right)+\int_0^t h\left(c\omega+x-ct,\omega\right)d\omega\\&=\sin\left(x-ct\right)-c+\int_0^t\left(c\omega+x-ct+\omega\right)d\omega=\sin\left(x-ct\right)-c+\left[\tfrac{c+1}{2}\omega^2+\left(x-ct\right)\omega\right]_{\omega=0}^{\omega=t}\\&=\sin\left(x-ct\right)-c+\tfrac{1-c}{2}t^2+xt.\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant considérer le problème

$$u_t - cu_x = \sin(x-ct) - c + \tfrac{1-c}{2}t^2 + xt \quad \text{avec comme condition initiale} \quad u(x,0) = x.$$

Encore en utilisant le résultat de l'exercice 2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x+ct) + \int_0^t h(-c\omega + x + ct, \omega)\, d\omega \\
&= x + ct + \int_0^t \left(\sin(-2c\omega + x + ct) - c + \tfrac{1-3c}{2}\omega^2 + (x+ct)\,\omega\right) d\omega \\
&= x + ct + \left[\frac{1-3c}{6}\omega^3 + \frac{1}{2}(x+ct)\,\omega^2 - c\omega + \frac{1}{2c}\cos(-2c\omega + x + ct)\right]_{\omega=0}^{\omega=t} \\
&= x + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{2}xt^2 + \tfrac{1}{2c}\cos(x-ct) - \tfrac{1}{2c}\cos(x+ct) \\
&= x + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{2}xt^2 + \tfrac{1}{c}\sin x \sin(ct).
\end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier que cette fonction est bien une solution du problème. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \tfrac{1}{2}t^2 + xt + \sin x \cos(ct), \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= t + x - c \sin x \sin(ct), \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= 1 + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{c}\cos x \sin(ct) \quad \text{et} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\tfrac{1}{c}\sin x \sin(ct).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t + x - c\sin x \sin(ct) + c \sin x \sin(ct) = t + x,$$

avec

$$u(x,0) = x \quad \text{et} \quad u_t(x,0) = \left.\frac{1}{2}t^2 + xt + \sin x \cos(ct)\right|_{t=0} = \sin x.$$

Chapitre 3

Équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

3.1 Exercices

Exercice 3.1

Déterminer pour quels points (x, y) du plan, chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes est **a)** hyperbolique, **b)** parabolique et **c)** elliptique.

i) $xu_{xx} - xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 3u_x = 0,$ **ii)** $xu_{xx} + xyu_{xy} + yu_{yy} - (x+3)\,u_y = u,$

iii) $e^x u_{xx} + xyu_{xy} - u_{yy} + 5yu_x = e^x,$ **iv)** $x^2u_{xx} + 2\,(x-y)\,u_{xy} + u_{yy} = 0,$

v) $u_{xx} - 5u_{xy} - (x+y)\,u_{yy} + 4u_x - xu_y = \sin x.$

Exercice 3.2

Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes

a) déterminer les points du plan xy où ces équations sont hyperboliques,

b) déterminer les coordonnées caractéristiques de ces équations sur le domaine où celles-ci sont hyperboliques,

c) effectuer le changement de coordonnées pour celles trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

i) $2y^2u_{xx} - xyu_{xy} - x^2u_{yy} + 4yu_x - 3u = 0,$ **ii)** $x^2u_{xx} - xyu_{xy} - 6y^2u_{yy} + u_x = 0.$

Exercice 3.3

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante.

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - u_x = 0,$$

a) déterminer les points du plan xy où cette équation est parabolique,

b) déterminer les coordonnées caractéristiques de cette équation sur le domaine où celle-ci est parabolique,

c) effectuer le changement de coordonnées pour les coordonnées trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

Exercice 3.4

Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 ci-dessous, déterminer le type de l'équation, les équations caractéristiques, les coordonnées caractéristiques et ensuite réduire l'équation sous sa forme canonique

a) $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - 3u = 0,$ **b)** $u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0.$

3.2 Solution des exercices

Exercice 3.1

Déterminer pour quels points (x, y) du plan, chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes est **a)** hyperbolique, **b)** parabolique et **c)** elliptique.

i) $xu_{xx} - xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 3u_x = 0$, **ii)** $xu_{xx} + xyu_{xy} + yu_{yy} - (x+3)\,u_y = u$,

iii) $e^x u_{xx} + xyu_{xy} - u_{yy} + 5yu_x = e^x$, **iv)** $x^2u_{xx} + 2\,(x-y)\,u_{xy} + u_{yy} = 0$,

v) $u_{xx} - 5u_{xy} - (x+y)\,u_{yy} + 4u_x - xu_y = \sin x$.

Solution de l'exercice 3.1.

i) Pour l'équation $xu_{xx} - xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 3u_x = 0$ on a $A = x, B = -xy$ et $C = y^2$, alors

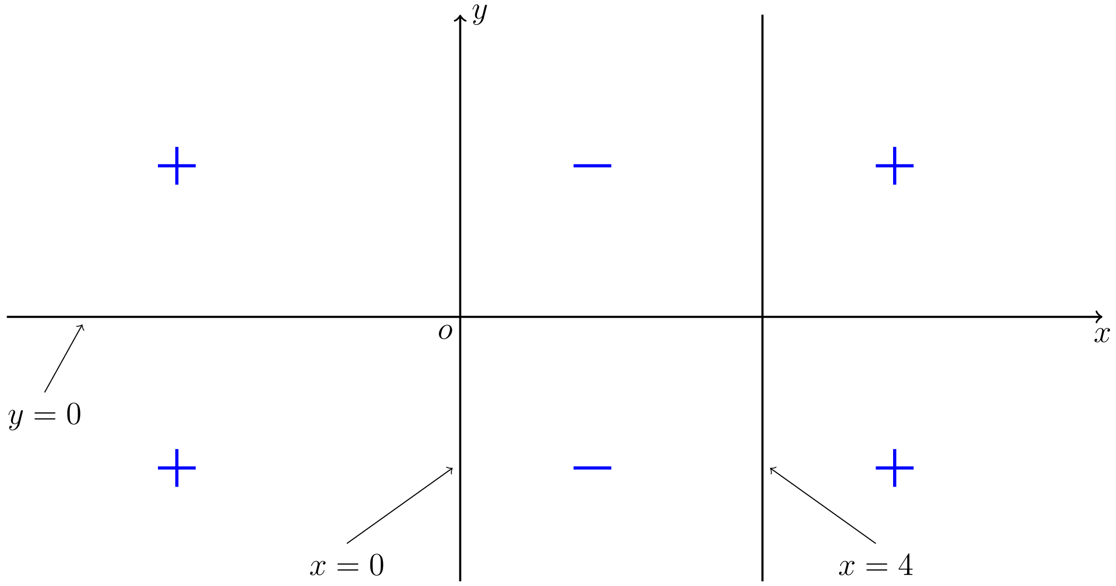
$$B^2 - 4AC = (-xy)^2 - 4xy^2 = xy^2\,(x-4)\,.$$

Pour déterminer le signe de $B^2 - 4AC$, il nous faut premièrement déterminer les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $B^2 - 4AC = xy^2\,(x-4) = 0$. Nous obtenons ainsi que soit $x = 0$, soit $y = 0$ ou soit $x = 4$.

Pour chacune des régions de

$$\mathbb{R}^2 \Big\backslash \Big(\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; x = 0\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; y = 0\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; x = 4\big\} \Big),$$

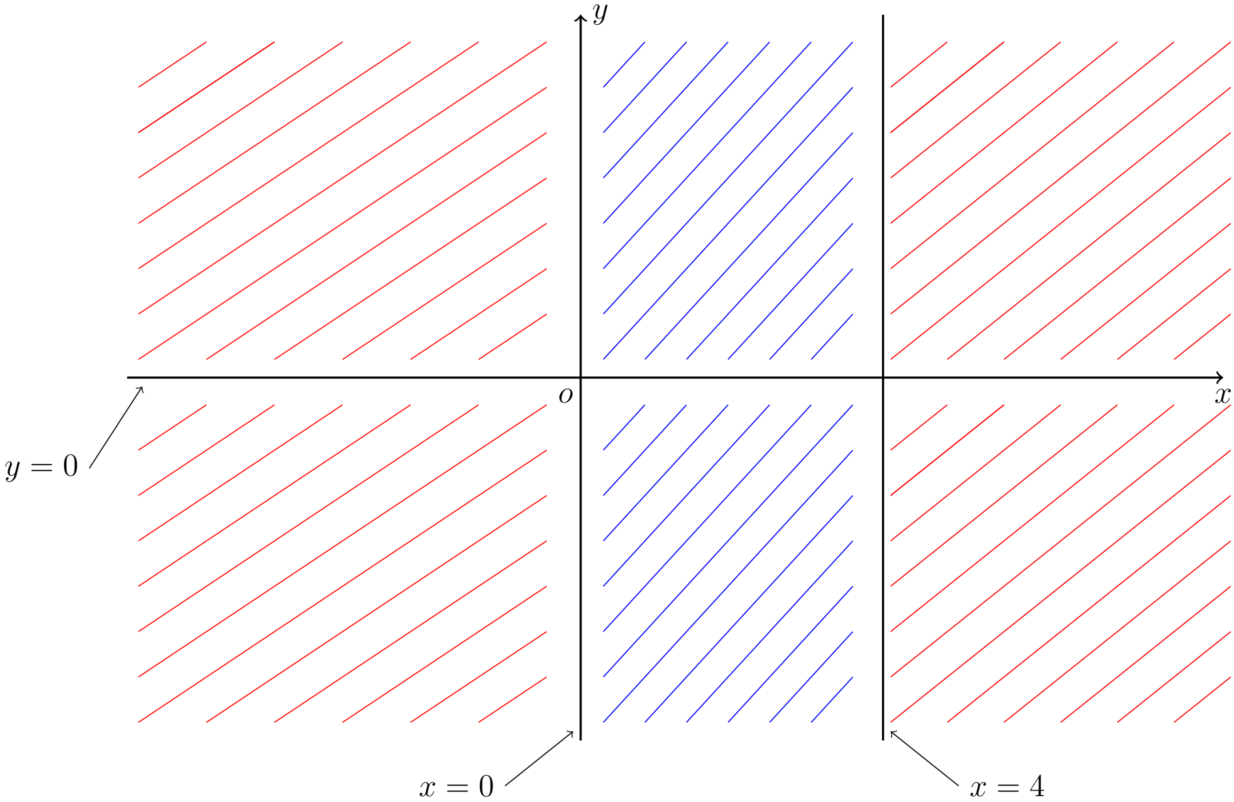
nous pouvons déterminer les signes de $B^2 - 4AC$. Nous avons indiqué ces signes ci-dessous.



L'équation est hyperbolique sur la région hachurée en rouge ci-dessous

L'équation est elliptique sur la région hachurée en bleu ci-dessous.

L'équation est parabolique sur les deux droites verticales : $x = 0$ et $x = 4$, ainsi que sur la droite horizontale $y = 0$.



ii) Pour l'équation $xu_{xx}+xyu_{xy}+yu_{yy}-(x+3)\,u_y = u$, on a $A = x, B = x$ et $C = y$, alors

$$B^2 - 4AC = (xy)^2 - 4xy = xy\,(xy-4)\,.$$

Pour déterminer le signe de B^2-4AC, il nous faut premièrement déterminer les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

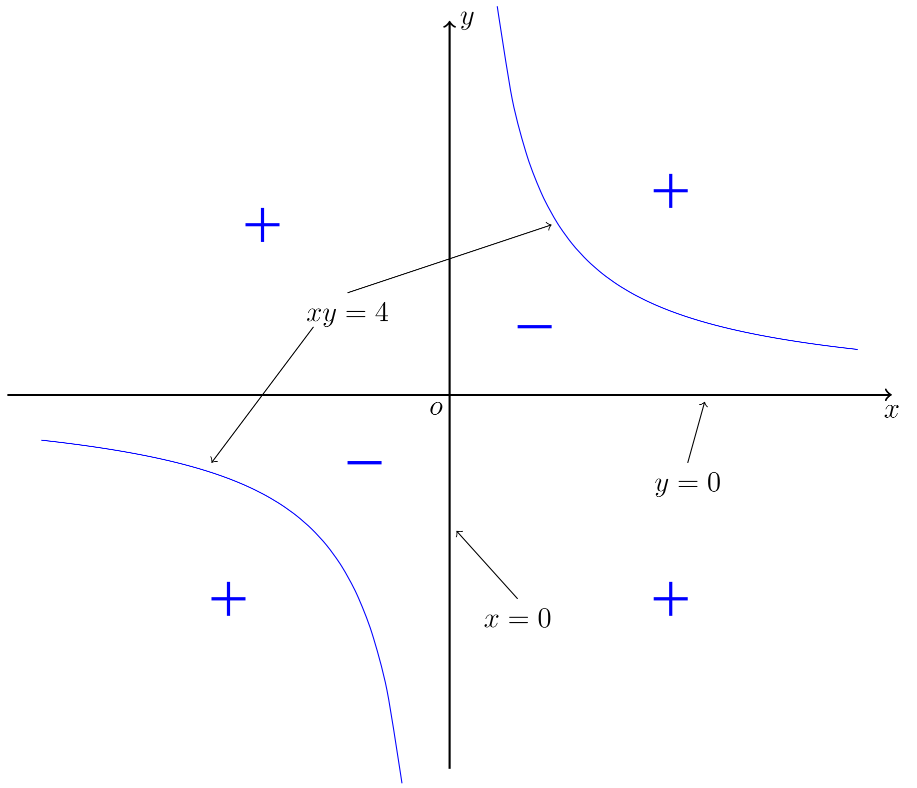
$$B^2 - 4AC = xy\,(xy-4) = 0.$$

Nous obtenons ainsi que soit $x = 0$, soit $y = 0$ ou soit $xy = 4$. Les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $xy = 4$ est une hyperbole dont les asymptotes sont les axes des x et des y.

Pour chacune des régions de

$$\mathbb{R}^2 \Big\backslash \Big(\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\;\; x=0\big\} \cup \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\;\; y=0\big\} \cup \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\;\; xy=4\big\} \Big),$$

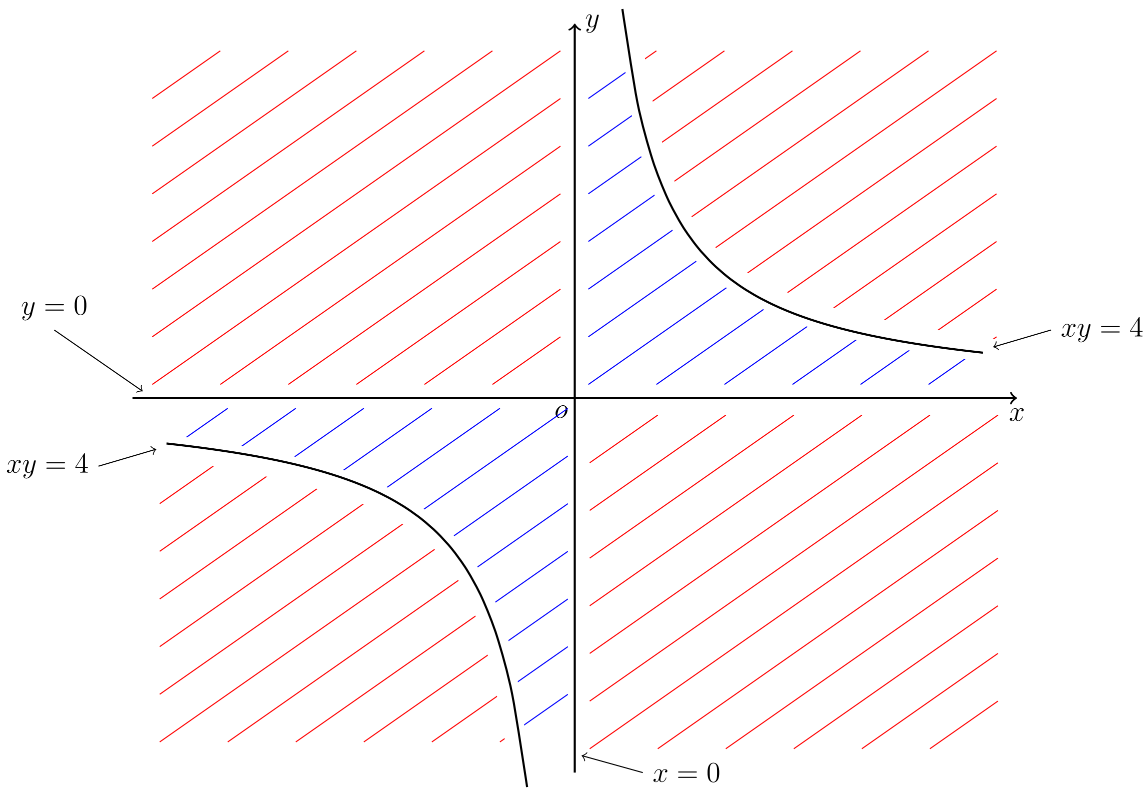
nous pouvons déterminer les signes de B^2-4AC. Nous avons indiqué ces signes ci-dessous.



L'équation est hyperbolique sur la région hachurée en rouge ci-dessous

L'équation est elliptique sur la région hachurée en bleu ci-dessous.

L'équation est parabolique sur la droite verticale $x = 0$, la droite horizontale $y = 0$, ainsi que sur l'hyperbole $xy = 4$.



iii) Pour l'équation $e^x u_{xx} + xyu_{xy} - u_{yy} + 5yu_x = e^x$, on a $A = e^x, B = xy$ et $C = -1$, alors

$$B^2 - 4AC = (xy)^2 - 4e^x(-1) = 4e^x + x^2y^2 > 0 \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

car $x^2y^2 \geq 0$ et $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Donc l'équation est hyperbolique sur tout le plan $\mathbb{R}^2$.

iv) Pour l'équation $x^2u_{xx} + 2(x-y)u_{xy} + u_{yy} = 0$, on a $A = x^2, B = 2(x-y)$ et $C = 1$, alors

$$B^2 - 4AC = (2(x-y))^2 - 4x^2 = -8xy + 4y^2 = 4y(y-2x).$$

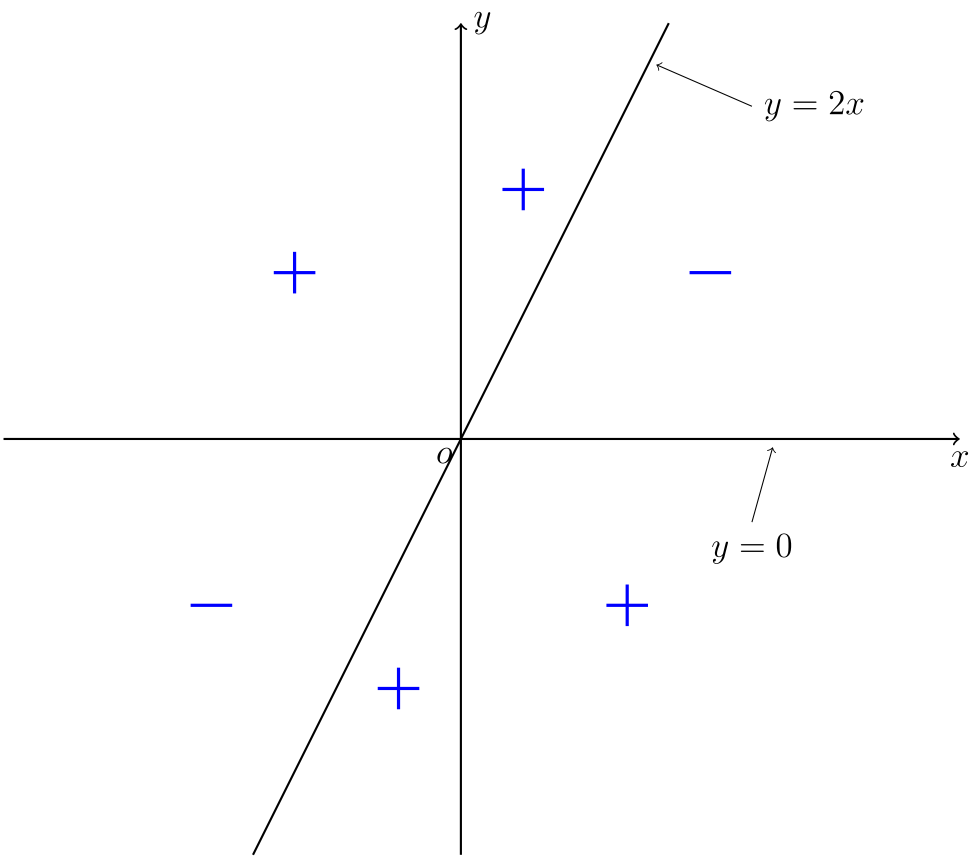
Pour déterminer le signe de $B^2 - 4AC$, il nous faut premièrement déterminer les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$B^2 - 4AC = 4y(y-2x) = 0.$$

Nous obtenons ainsi que soit $y = 0$, ou soit $y = 2x$. Pour chacune des régions de

$$\mathbb{R}^2 \Big\backslash \left(\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ \ y = 0 \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ \ y = 2x \right\} \right),$$

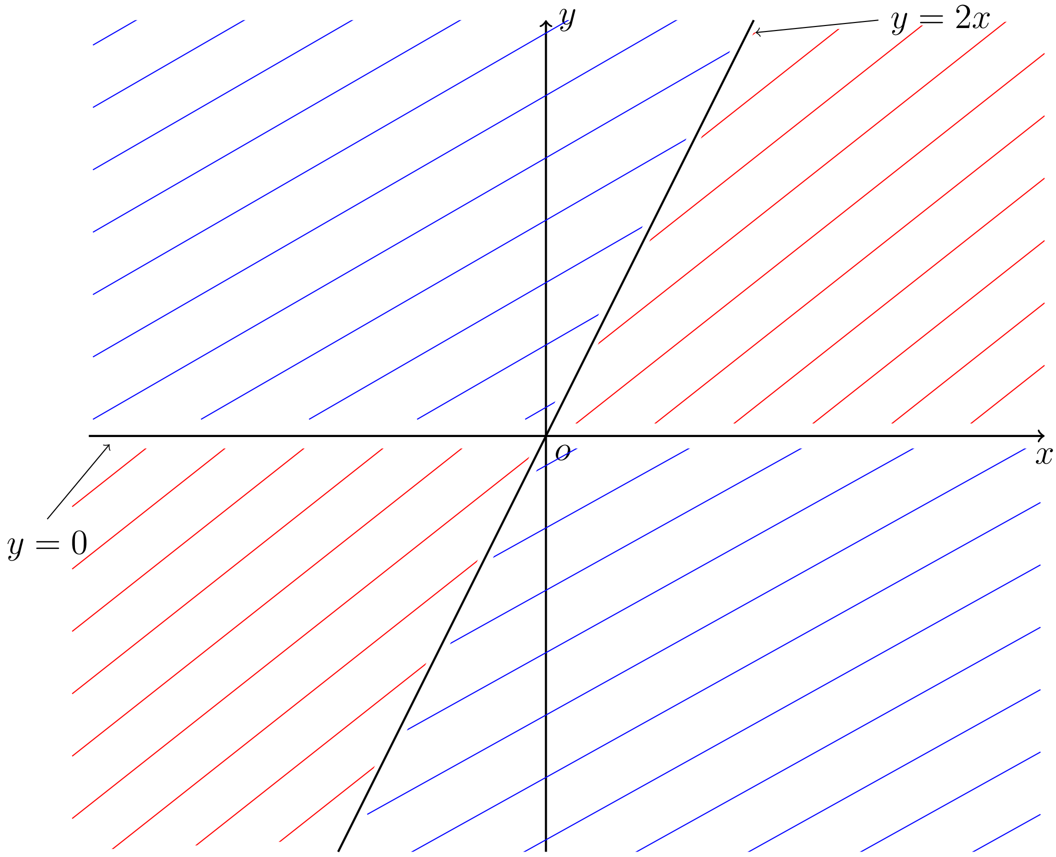
nous pouvons déterminer les signes de $B^2 - 4AC$. Nous avons indiqué ces signes ci-dessous.



L'équation est hyperbolique sur la région hachurée en rouge ci-dessous

L'équation est elliptique sur la région hachurée en bleu ci-dessous.

L'équation est parabolique sur la droite horizontale $y = 0$, ainsi que sur la droite $y = 2x$.



v) Pour l'équation $u_{xx} - 5u_{xy} - (x+y)\,u_{yy} + 4u_x - xu_y = \sin x$, on a $A = 1, B = -5$ et $C = -(x+y)$, alors

$$B^2 - 4AC = (-5)^2 - 4\,(-(x+y)) = 25 + 4\,(x+y)\,.$$

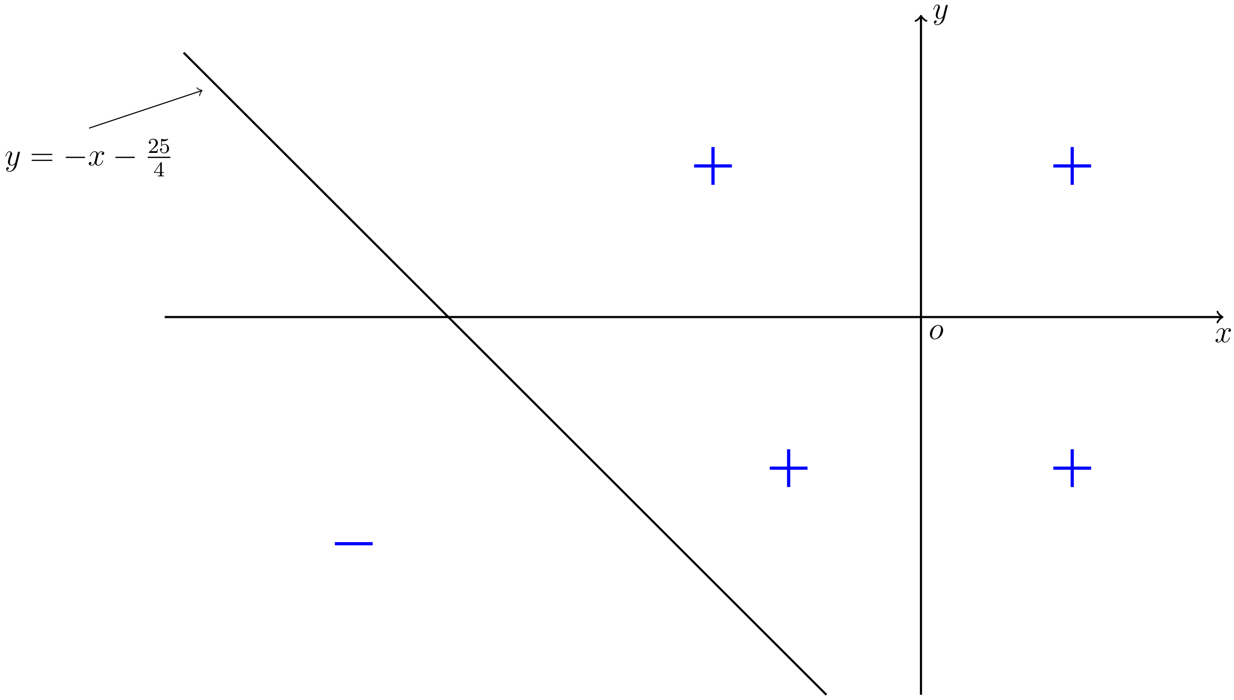
Pour déterminer le signe de $B^2 - 4AC$, il nous faut premièrement déterminer les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$B^2 - 4AC = 25 + 4\,(x+y) = 0.$$

Nous obtenons ainsi la droite $y = -x - \frac{25}{4}$. Pour chacune des régions de

$$\mathbb{R}^2 \Big\backslash \left(\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; y = -x - \frac{25}{4} \right\} \right),$$

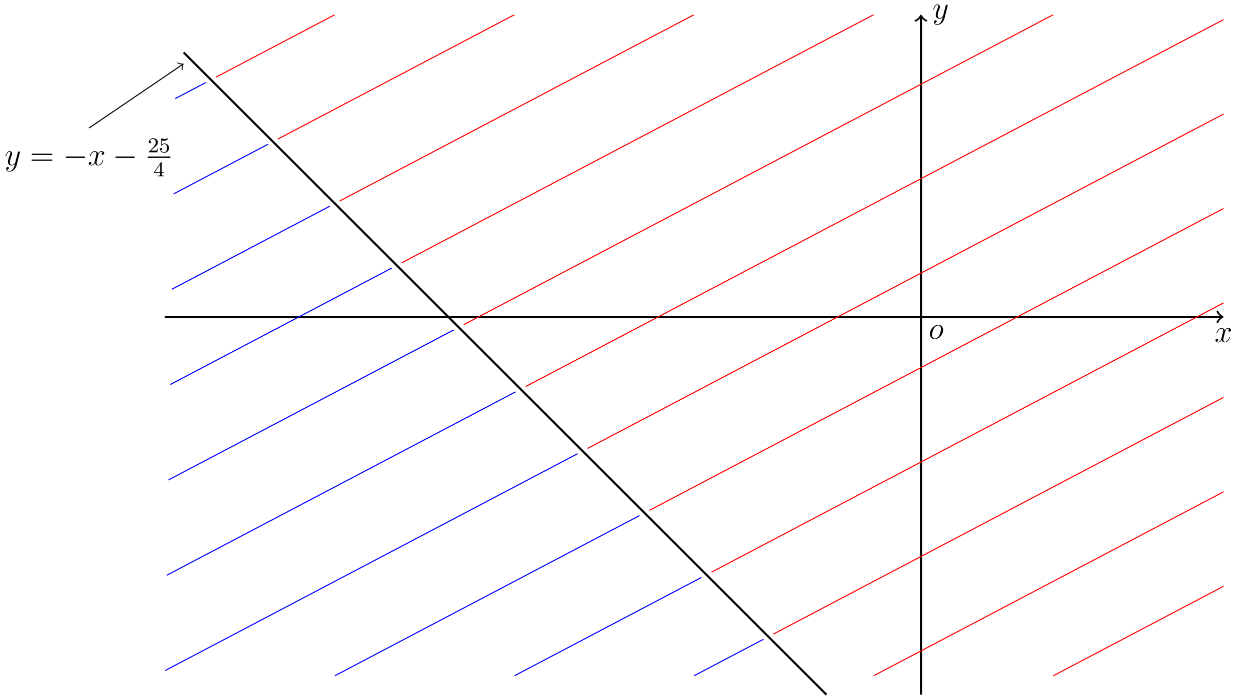
nous pouvons déterminer les signes de $B^2 - 4AC$. Nous avons indiqué ces signes ci-dessous.



L'équation est hyperbolique sur la région hachurée en rouge ci-dessous

L'équation est elliptique sur la région hachurée en bleu ci-dessous.

L'équation est parabolique sur la droite $y = -x - \frac{25}{4}$.



Exercice 3.2

Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes

a) déterminer les points du plan xy où ces équations sont hyperboliques,

b) déterminer les coordonnées caractéristiques de ces équations sur le domaine où celles-ci sont hyperboliques,

c) effectuer le changement de coordonnées pour celles trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

i) $2y^2u_{xx} - xyu_{xy} - x^2u_{yy} + 4yu_x - 3u = 0,$ **ii)** $x^2u_{xx} - xyu_{xy} - 6y^2u_{yy} + u_x = 0.$

Solution de l'exercice 3.2.

i)

a) Pour l'équation $2y^2u_{xx} - xyu_{xy} - x^2u_{yy} + 4yu_x - 3u = 0$ nous avons

$$B^2 - 4AC = (-xy)^2 - 4\left(2y^2\right)\left(-x^2\right) = 9x^2y^2.$$

Donc $B^2 - 4AC = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. De plus comme $9x^2y^2 \geq 0$, alors $B^2 - 4AC > 0$ si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Donc l'équation est hyperbolique aux points (x, y) où $x \neq 0$ et $y \neq 0$. En d'autres mots, l'équation est hyperbolique pour tous les points qui ne sont pas sur les axes des x et des y.

b) Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-xy) + \sqrt{9x^2y^2}}{2\left(2y^2\right)} = \frac{x}{2y}$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-xy) - \sqrt{9x^2y^2}}{2\left(2y^2\right)} = -\frac{x}{y}.$$

Nous pouvons résoudre ces deux équations différentielles ordinaires en utilisant la méthode de séparation de variables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \Rightarrow 2ydy = xdx \Rightarrow \int 2ydy = \int xdx \Rightarrow y^2 = \tfrac{1}{2}x^2 + c$$

et

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow \int ydy = -\int xdx \Rightarrow \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + c.$$

c) Nous pouvons donc considérer les coordonnées caractéristiques

$$\xi = y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{et} \quad \eta = \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}x^2.$$

Nous pouvons maintenant effectuer le changement de variables. Par les formules de dérivation composée, nous avons

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -xu_\xi + xu_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = 2yu_\xi + yu_\eta,$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -u_\xi - x\left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right) + u_\eta + x\left(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right) \\ &= x^2 u_{\xi\xi} - 2x^2 u_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta} - u_\xi + u_\eta \end{aligned}$$

$$u_{xy} = -x\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y\right) + u_\eta + y\left(u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right) = -2xyu_{\xi\xi} + xyu_{\xi\eta} + xyu_{\eta\eta}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= 2u_\xi + 2y\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y\right) + u_\eta + y\left(u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right) \\ &= 4y^2 u_{\xi\xi} + 4y^2 u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta. \end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'équation, nous obtenons

$$-9x^2y^2 u_{\xi\eta} + \left(-2y^2 - 2x^2 - 4xy\right) u_\xi + \left(2y^2 - x^2 + 4xy\right) u_\eta - 3u = 0,$$

ou encore

$$u_{\xi\eta} + \frac{2\left(x+y\right)^2}{9x^2y^2} u_\xi - \frac{\left(2y^2 - x^2 + 4xy\right)}{9x^2y^2} u_\eta + \frac{1}{3x^2y^2} u = 0.$$

Noter que $x^2 = \frac{2}{3}\left(-\xi + 2\eta\right)$ et $y^2 = \frac{2}{3}\left(\xi + \eta\right)$. Nous allons maintenant décrire l'équation canonique pour le premier quadrant du plan, à savoir les points (x, y) tels que $x > 0$ et $y > 0$. Donc

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}\left(-\xi + 2\eta\right)} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\xi + \eta\right)}.$$

Pour les autres quadrants, il suffit d'ajuster les signes devant les radicaux. Finalement

$$u_{\xi\eta} + \frac{\left(\sqrt{2\eta - \xi} + \sqrt{\xi + \eta}\right)^2}{3\left(2\eta - \xi\right)\left(\xi + \eta\right)} u_\xi - \frac{3\xi + 4\sqrt{\left(2\eta - \xi\right)\left(\xi + \eta\right)}}{6\left(2\eta - \xi\right)\left(\xi + \eta\right)} u_\eta + \frac{3}{4\left(2\eta - \xi\right)\left(\xi + \eta\right)} u = 0.$$

Si nous avions utilisé les coordonnées $\alpha = \xi + \eta = \frac{3}{2}y^2$ et $\beta = \xi - \eta = \frac{1}{2}y^2 - x^2$, alors nous obtiendrions la deuxième forme de l'équation canonique. Dans ce cas, nous aurions

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha} u_\alpha + \frac{\sqrt{\alpha - 3\beta} + 8\sqrt{2\alpha}}{6\alpha\sqrt{\alpha - 3\beta}} u_\beta + \frac{3}{2\alpha\left(\alpha - 3\beta\right)} u = 0.$$

ii)

a) Pour l'équation $x^2 u_{xx} - xyu_{xy} - 6y^2 u_{yy} + u_x = 0$ nous avons

$$B^2 - 4AC = \left(-xy\right)^2 - 4\left(x^2\right)\left(-6y^2\right) = 25x^2y^2.$$

Donc $B^2 - 4AC = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. De plus comme $25x^2y^2 \geq 0$, alors $B^2 - 4AC > 0$ si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Donc l'équation est hyperbolique aux points (x, y) où $x \neq 0$ et $y \neq 0$. En d'autres mots, l'équation est hyperbolique pour tous les points qui ne sont pas sur les axes des x et des y.

b) Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-xy) + \sqrt{25x^2y^2}}{2x^2} = \frac{2y}{x}$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{(-xy) - \sqrt{25x^2y^2}}{2x^2} = -\frac{3y}{x}.$$

Nous pouvons résoudre ces deux équations différentielles ordinaires en utilisant la méthode de séparation de variables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln\left(x^2\right) + c_1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = c$$

et

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-3dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-3dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln\left(x^3\right) + c_1 \Rightarrow yx^3 = c.$$

c) Nous pouvons donc considérer les coordonnées caractéristiques

$$\xi = \frac{y}{x^2} \quad \text{et} \quad \eta = yx^3.$$

Nous pouvons maintenant effectuer le changement de variables. Par les formules de dérivation composée, nous avons

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\frac{2y}{x^3} u_\xi + 3yx^2 u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{x^2} u_\xi + x^3 u_\eta,$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{6y}{x^4} u_\xi - \frac{2y}{x^3}\left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right) + 6xyu_\eta + 3yx^2\left(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right) \\ &= \frac{4y^2}{x^6} u_{\xi\xi} - \frac{12y^2}{x} u_{\xi\eta} + 9x^4y^2 u_{\eta\eta} + \frac{6y}{x^4} u_\xi + 6xyu_\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= -\frac{2}{x^3} u_\xi - \frac{2y}{x^3}\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y\right) + 3x^2 u_\eta + 3x^2 y\left(u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right) \\ &= \frac{-2y}{x^5} u_{\xi\xi} + yu_{\xi\eta} + 3yx^5 u_{\eta\eta} - \frac{2}{x^3} u_\xi + 3x^2 u_\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \frac{1}{x^2}\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y\right) + x^3\left(u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right) \\ &= \frac{1}{x^4} u_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} + x^6 u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'équation, nous obtenons

$$-25xy^2u_{\xi\eta} + \left(\frac{8y}{x^2} - \frac{2y}{x^3}\right)u_\xi + \left(3yx^3 + 3yx^2\right)u_\eta = 0,$$

ou encore

$$u_{\xi\eta} - \frac{2\,(4x-1)}{25x^4y}u_\xi - \frac{3x\,(x+1)}{25y}u_\eta = 0.$$

Noter que $x^5 = \dfrac{\eta}{\xi}$ et $y^5 = \xi^3\eta^2$. Nous pouvons substituer dans l'équation ci-dessus. L'équation canonique correspondante est

$$u_{\xi\eta} - \frac{2\left(4\eta^{1/5} - \xi^{1/5}\right)}{25\eta^{6/5}}u_\xi - \frac{3\left(\eta^{1/5} + \xi^{1/5}\right)}{25\xi\eta^{1/5}}u_\eta = 0.$$

Il existe aussi une deuxième forme de l'équation canonique en considérant les coordonnées $\alpha = \xi + \eta = \frac{y}{x^2} + yx^3$ et $\beta = \xi - \eta = \frac{y}{x^2} - yx^3$. Nous laissons aux étudiants le soin de calculer cette dernière.

Exercice 3.3

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante.

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - u_x = 0,$$

a) déterminer les points du plan xy où cette équation est parabolique,

b) déterminer les coordonnées caractéristiques de cette équation sur le domaine où celle-ci est parabolique,

c) effectuer le changement de coordonnées pour les coordonnées trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

Solution de l'exercice 3.3.

a) Pour l'équation $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - u_x = 0$ nous avons

$$B^2 - 4AC = (-2xy)^2 - 4x^2y^2 = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette équation est parabolique sur tout le plan $\mathbb{R}^2$.

b) Dans le cas parabolique, il n'y a qu'une seule équation caractéristique

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{B}{2A} = \frac{-2xy}{2x^2} = \frac{-y}{x}.$$

Nous pouvons résoudre cette équation par séparation de variables

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-dx}{x} \Rightarrow \ln(y) = -\ln(x) + c_1 \Rightarrow xy = c.$$

Une des coordonnées caractéristiques est $\xi = xy$. Comme autre coordonnée caractéristique, il suffit de choisir une fonction $\eta(x, y)$ telle que

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \neq 0.$$

Il y a beaucoup de choix, par exemple $\eta = x$ satisfait cette propriété si nous nous restreignons au domaine obtenu en prenant le complément de l'axe des y dans le plan. Nous allons par la suite utiliser $\eta = x$ sur ce domaine.

c) Nous pouvons donc considérer les coordonnées caractéristiques

$$\xi = xy \quad \text{et} \quad \eta = x.$$

Nous obtenons donc par les formules de dérivation composée

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = y u_\xi + u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = x u_\xi,$$

$$u_{xx} = y\left(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\right) + \left(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right) = y^2 u_{\xi\xi} + 2y u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_\xi + y\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y\right) + \left(u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y\right) = xy u_{\xi\xi} + x u_{\xi\eta} + u_\xi,$$

$$u_{yy} = x\left(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y\right) = x^2 u_{\xi\xi}.$$

En substituant dans l'EDP, nous obtenons

$$x^2 u_{\eta\eta} - (2xy + y) u_\xi - u_\eta = 0,$$

ou encore

$$u_{\eta\eta} - \frac{y(2x+1)}{x^2} u_\xi - \frac{1}{x^2} u_\eta = 0.$$

Noter que $x = \eta$ et $y = \dfrac{\xi}{\eta}$. L'équation canonique est alors

$$u_{\eta\eta} - \frac{\xi(2\eta+1)}{\eta^3} u_\xi - \frac{1}{\eta^2} u_\eta = 0.$$

Exercice 3.4

Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 ci-dessous, déterminer le type de l'équation, les équations caractéristiques, les coordonnées caractéristiques et ensuite réduire l'équation sous sa forme canonique

a) $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - 3u = 0$, **b)** $u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0$.

Solution de l'exercice 3.4.

a)

i) Pour l'équation $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - 3u = 0$ nous avons

$$B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4\,(1)\,(2) = -4 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette équation est elliptique sur tout le plan $\mathbb{R}^2$.

ii) Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-2 + \sqrt{-4}}{2} = -1 + i$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-2 - \sqrt{-4}}{2} = -1 - i.$$

Nous résolvons ces deux équations différentielles ordinaires nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = -1 + i \Rightarrow dy = (-1 + i)\,dx \Rightarrow \int dy = \int (-1 + i)\,dx \Rightarrow y - (-1 + i)\,x = c$$

et

$$\frac{dy}{dx} = -1 - i \Rightarrow dy = (-1 - i)\,dx \Rightarrow \int dy = \int (-1 - i)\,dx \Rightarrow y - (-1 - i)\,x = c.$$

iii) Nous pouvons donc considérer les coordonnées caractéristiques

$$\varphi = y + (1 - i)\,x \quad \text{et} \quad \psi = y + (1 + i)\,x.$$

Ces deux fonctions φ et ψ ne sont pas des fonctions réelles. Dans le cas elliptique, nous pouvons pallier à ceci en prenant les parties réelle et imaginaire de φ (ou encore de ψ). En d'autres mots, nous considérons les coordonnées

$$\xi = \frac{\varphi + \psi}{2} = \operatorname{Re}\varphi = x + y \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\varphi - \psi}{2i} = \operatorname{Im}\varphi = -x.$$

En utilisant les formules de dérivation composée, nous obtenons

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi - u_\eta, \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$

$$u_{xx} = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) - (u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y) - (u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y) = u_{\xi\xi}.$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons l'équation canonique

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\xi - u_\eta - 3u = 0.$$

b)

i) Pour l'équation $u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0$ nous avons

$$B^2 - 4AC = (4)^2 - 4\,(1)\,(2) = 8 \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette équation est hyperbolique sur tout le plan $\mathbb{R}^2$.

ii) Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Nous résolvons ces deux équations différentielles ordinaires nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow dy = \left(2 + \sqrt{2}\right) dx \Rightarrow \int dy = \int \left(2 + \sqrt{2}\right) dx \Rightarrow y - \left(2 + \sqrt{2}\right) x = c$$

et

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow dy = \left(2 - \sqrt{2}\right) dx \Rightarrow \int dy = \int \left(2 - \sqrt{2}\right) dx \Rightarrow y - \left(2 - \sqrt{2}\right) x = c.$$

iii) Nous pouvons donc considérer les coordonnées caractéristiques

$$\xi = y - \left(2 + \sqrt{2}\right) x \quad \text{et} \quad \eta = y - \left(2 - \sqrt{2}\right) x.$$

En utilisant les formules de dérivation composée, nous obtenons

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\left(2 + \sqrt{2}\right) u_\xi - \left(2 - \sqrt{2}\right) u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\left(2 + \sqrt{2}\right) (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) - \left(2 - \sqrt{2}\right) (u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \\ &= \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 u_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\eta\xi}\eta_x) + (u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \\ &= -\left(2+\sqrt{2}\right)u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} - \left(2-\sqrt{2}\right)u_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

$$u_{yy} = (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y) + (u_{\xi\eta}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons l'équation canonique

$$u_{\xi\eta} + \frac{2+\sqrt{2}}{8}u_\xi + \frac{2-\sqrt{2}}{8}u_\eta = 0.$$

Si nous avions utilisé les coordonnées $\alpha = \xi + \eta = 2y - 4x$ et $\beta = \xi - \eta = -2\sqrt{2}x$, alors nous obtiendrions la deuxième forme de l'équation canonique

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \frac{1}{2}u_\alpha + \frac{\sqrt{2}}{4}u_\beta = 0.$$