1 Transformation de Fourier

1.1 Introduction

La transformée de Fourier, est un outil fondamental pour la compréhension et la mise en oeuvre de nombreuses techniques numériques de traitement des signaux et des images. On la trouve dans des applications directes comme l analyse harmonique des vibrations mais aussi dans des domaines très variés.
Joseph Fourier est né en 1768 à Auxerre. A l'origine, son étude la plus célèbre concerne la Théorie Analytique de la Chaleur (1822). Le principe est que chaque fonction périodique peut être exprimée comme une somme de sinus et cosinus de fréquences différentes, chacune avec un coefficient. Ce sont **les séries de Fourier.** Peut importe la complexité de la fonction, tant qu'elle est périodique, elle peut être représentée par une somme.

Cette découverte était révolutionnaire à l'époque. Les fonctions non périodiques peuvent également être exprimées sous la forme d'une intégrale de sinus et/ou cosinus pondérée par une fonction. C'est **la transformée de Fourier.**

L'une des caractéristiques principales est qu'il est possible, lorsqu'on est dans le domaine des fréquences, de repasser dans le domaine temporel par **la transformée de Fourier inverse** sans aucune perte d'informations. Certains problèmes sont plus facilement solvables dans le domaine fréquentiel !

Lobjectif de ce cours est de donner au lecteur les connaissances aussi bien théoriques que pratiques lui permettant de mettre en application les outils danalyse fréquentielle et de proposer un aperçu de la manière dont ils sont utilisés dans différents domaines.

1.2 Definition

Definition 1 *Soit $f(x)$ une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle x. On appelle la transformée de Fourier de $f(x)$ la fonction complexe de la variable réelle ω définie par*

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \tag{1}$$

1.3 Inversion de la transformation de Fourier

On peut obtenir $f(x)$ à partir de $F(\omega)$ par la transformation dite de Fourier inverse :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{2}$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ désigne la transformée de Fourier inverse.

Exemple 2 *Trouver la ransformée de Fourier de e^{-ax^2} où $a \in \mathbb{R}_+^*$. on a :*

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x - ax^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-a\left(x + \frac{i\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ay^2\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

Voir le graphe de $f(x)$ et sa transformée de Fourier dans la figure 1 pour $a = 1$.

Exemple 3 *Trouver la ransformée de Fourier de $e^{-a|x|}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x| - i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\omega)x} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x} dx\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{(a^2+\omega^2)} \end{aligned}$$

Voir le graphe de $f(x)$ et sa transformée de Fourier dans la figure 2 pour $a = 1$.

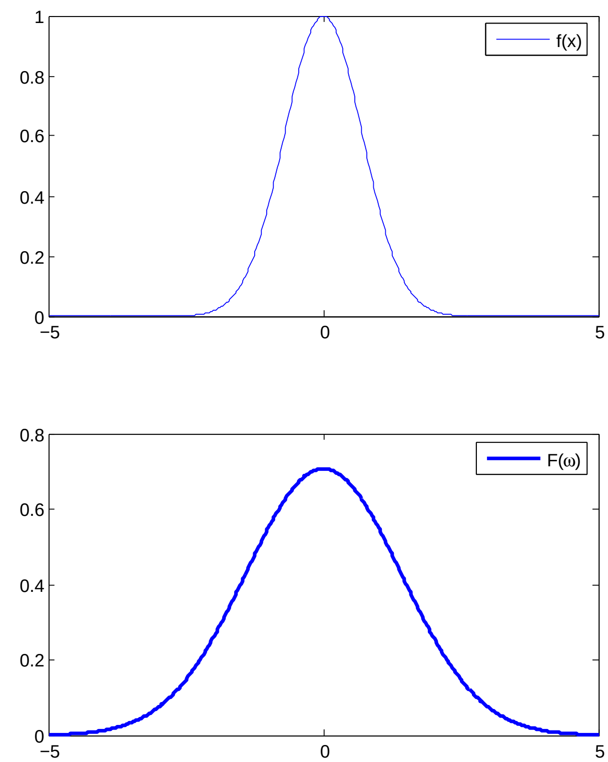

Figure 1: Graphe de e^{-ax^2} et sa transfomée de Fourier $F(\omega)$ pour $a = 1$.

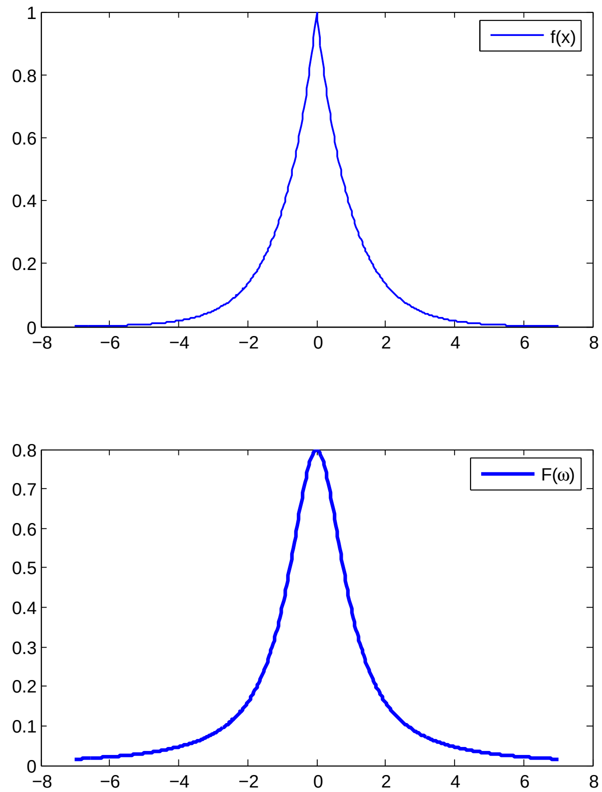

Figure 2: Graphe de $e^{-a|x|}$ et sa transfomée de Fourier $F(\omega)$ pour $a = 1$.

Exemple 4 *Trouver la ransformée de Fourier de*

$$f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) H\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)$$

où $H(x)$ *est la fonction de Heaviside définie par :*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

ou aussi généralement

$$H(x-a) = \begin{cases} 1 & si\ x > a \\ 0 & si\ x < a \end{cases}$$

et $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \cos \omega x dx \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (1-x) \cos a\omega x dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{a\omega x}{2}\right)}{\left(\frac{a\omega}{2}\right)^2} \right] dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2\left(\frac{a\omega x}{2}\right)}{\left(\frac{a\omega}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Exemple 5 *Trouver la transformée Fourier de la fonction caractéristique définie par :*

$$\chi_{[-a,\ \ a]}(x) = H(a - |x|) = \begin{cases} 1 \ si\ \ |x| < a \\ 0 \ si\ \ |x| > a \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a(\omega) = \mathcal{F}\left(\chi_{[-a,\ \ a]}(x)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \chi_{[-a,\ \ a]}(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega} \end{aligned}$$

Le graphe de $f(x) = \chi_{[-a,\ \ a]}(x)$ *et sa transformée de Fourier sont montrés dans la figure 3.*

1.4 Propriétés de la transformée de Fourier

1.4.1 Linéairité

L'intégration étant une opération linéaire, la transformé de Fourier l'est aussi, c-a-d, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{F}\left(\lambda f\left(x\right)+\mu g\left(x\right)\right)=\lambda\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)+\mu\mathcal{F}\left(g\left(x\right)\right) \tag{3}$$

de même pour la transformée inverse, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\lambda f\left(x\right)+\mu g\left(x\right)\right)=\lambda\mathcal{F}^{-1}\left(f\left(x\right)\right)+\mu\mathcal{F}^{-1}\left(g\left(x\right)\right) \tag{4}$$

1.4.2 Translation :

Cherchons la transformée de Fourier de $f\left(x-a\right)$, $a \in \mathbb{R}$.En posant $u = x - a$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(f\left(x-a\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f\left(x-a\right)dx \tag{5}$$

$$=e^{-i\omega a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega u}f\left(u\right)du \tag{6}$$

$$=e^{-i\omega a}\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right) \tag{7}$$

A la translation de $f\left(x\right)$ correspond un déphasage de $F\left(\omega\right)$ proportionnel à ω. La transformé de Fourier de $f\left(x-a\right)$ s'obtient en multipliant $F\left(\omega\right)$ par le facteur de phase $e^{-i\omega a}$.

1.4.3 Modulation

Inversement, la transformée de Fourier de $e^{ik_0x}f\left(x\right)$, $k_0 \in \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}\left(e^{ik_0x}f\left(x\right)\right)=F\left(\omega-k_0\right) \tag{8}$$

A la modulation de $f\left(x\right)$ correspond une translation de $F\left(\omega\right)$.

1.4.4 Changement d'échelle

Changer l'unité pour la variable x revient à multuplier celle-ci par une constante $a \neq 0$. En posant $u = ax$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(f\left(ax\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f\left(ax\right)dx \tag{9}$$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\dfrac{i\omega u}{a}}f\left(u\right)du \tag{10}$$

$$\mathcal{F}\left(f\left(ax\right)\right)=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{11}$$

1.4.5 Conjugaison complexe

La transformée de Fourier du conjugué d'une fonction $f(x)$ noté par $\overline{f(x)}$ est :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\overline{f(x)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}e^{-i\omega x}dx \\ &= \overline{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}f(x)\,dx\right]}\end{aligned} \tag{12}$$

Soit

$$\mathcal{F}\left(\overline{f(x)}\right) = \overline{F(-\omega)} \tag{13}$$

Theorem 6 *Si $f(x)$ est continue, différentiable par morçeau et absolument intégrable. Alors*

i *$F(\omega)$ est bornée, pour $\omega \in \mathbb{R}$.*

ii *$F(\omega)$ est continue, pour $\omega \in \mathbb{R}$.*

Preuve. On a :

i

$$\begin{aligned}|F(\omega)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\left|e^{-i\omega x}\right|dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx = \frac{c}{\sqrt{2\pi}},\end{aligned}$$

où $c = \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ cqfd.

ii On a

$$|F(\omega+h) - F(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\left|e^{-ihx}-1\right|dx$$

puisque $\lim_{h\to 0}\left|e^{-ihx}-1\right| = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\lim_{h\to 0}|F(\omega+h) - F(\omega)| \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\left|e^{-ihx}-1\right|dx = 0$$

ceci montre que $F(\omega)$ est continue.

■

Theorem 7 *(Lemme de Riemann-Lebesgue). Si* $F(\omega) = \mathcal{F}(f(x))$ *, alors*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} |F(\omega)| = 0 \tag{14}$$

Preuve. on a

$$e^{-ihx} = -e^{-ihx-i\pi}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega\left(x+\frac{\pi}{\omega}\right)} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right) e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right) e^{-i\omega x} dx\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right)\right] e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

par consequent

$$|F(\omega)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right)\right| dx$$

d'où

$$\lim_{|\omega|\to\infty} |F(\omega)| \leq \lim_{|\omega|\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(x) - f\left(x-\frac{\pi}{\omega}\right)\right| dx = 0$$

■

1.5 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

Theorem 8 **i** *Si* $f(x)$ *est continue , dérivable et* $f(x) \to 0$ *quand* $|x| \to \infty$*, alors*

$$\mathcal{F}(f'(x)) = (ik)\, \mathcal{F}(f(x)) = ikF(\omega) \tag{15}$$

ii *Si* $f(x)$ *est continue , n-fois dérivables et* $f^{(k)}(x) \to 0$ *quand* $|x| \to \infty$*,pour* $k = 1, 2, ...n-1$*, alors*

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}(x)\right) = (ik)^n\, \mathcal{F}(f(x)) = (ik)^n\, F(\omega) \tag{16}$$

Preuve. *On a par définition*

$$\mathcal{F}\left(f'\left(x\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(x\right)e^{-i\omega x}dx \tag{17}$$

Intégration par parties donne :

$$F\left(\omega\right) = \mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f'\left(x\right)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f\left(x\right)e^{-i\omega x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx \\ &= ikF\left(\omega\right)\end{aligned}$$

■

Remarque 9 *Les formules* (15) *et* (16) *restent vraies pour une fonction à plusieurs variables. Par exemple si* $u\left(x,t\right)$ *est une fonction de variable d' espace* x *et de variable temps* t, *alors*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = ikU\left(\omega,t\right), \qquad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -k^2U\left(\omega,t\right) \tag{19}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial U\left(\omega,t\right)}{\partial t}, \qquad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2 U\left(\omega,t\right)}{\partial t^2} \tag{20}$$

Où

$$U\left(\omega,t\right) = \mathcal{F}\left(u\left(x,t\right)\right) \tag{21}$$

1.6 Dérivation de la transformée de Fourier

La dérivée de $F\left(\omega\right)$ par rapport à la variable ω donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}F\left(\omega\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xf\left(x\right)e^{-i\omega x}dx \\ &= \mathcal{F}\left(-ixf\left(x\right)\right).\end{aligned} \tag{22}$$

Ce résultat se généralise aux dérivées successives de $F(\omega)$ par

$$F^m(\omega) = \mathcal{F}\left((-ix)^m f(x)\right). \tag{23}$$

Ce résultat donne encore une majoration

$$|F^m(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m |f(x)|\, dx \tag{24}$$

1.7 Convolution et transfomation de Fourier

Definition 10 *Le produit de convolution de deux fonctions absolument intégrables $f(x)$ et $g(x)$ est définie par*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi \tag{25}$$

Exemple 11 *Trouver la convolution de*

(a) $f(x) = \cos x$ *et* $g(x) = \exp(-a|x|)$, $a > 0$.

(b) $f(x) = \chi_{[a,\ \ b]}(x)$ *et* $g(x) = x^2$.

a) *on a par définition*

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi & (26)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x-\xi) \exp(-a|\xi|)\, d\xi & (27)\\
&= \int_{-\infty}^{0} \cos(x-\xi) \exp(a\xi)\, d\xi + \int_{0}^{+\infty} \cos(x-\xi) \exp(-a\xi)\, d\xi & (28)\\
&= \int_{0}^{+\infty} \cos(x+\xi) \exp(-a\xi)\, d\xi + \int_{0}^{+\infty} \cos(x-\xi) \exp(-a\xi)\, d\xi & (29)\\
&= 2\cos x \int_{0}^{+\infty} \cos(\xi) \exp(-a\xi)\, d\xi & (30)\\
&= \frac{2a\cos x}{1+a^2} & (31)
\end{aligned}$$

b) *on a*

$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi \tag{32}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a, \quad b]}(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi \tag{33}$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \xi^2 d\xi = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right) \tag{34}$$

Theorem 12 *Si $F(\omega) = \mathcal{F}(f(x))$ et $G(\omega) = \mathcal{F}(g(x))$, alors*

$$\mathcal{F}(f(x)*g(x)) = F(\omega)\, G(\omega) \tag{35}$$

ou

$$f(x)*g(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)\, G(\omega)) \tag{36}$$

ou équivalent :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, G(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega \tag{37}$$

Preuve. on a par définition de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(f(x)*g(x)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-i\omega x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi\right) dx \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\xi} g(\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(x-\xi)} f(x-\xi)\, dx \tag{39}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\xi} g(\xi)\, d\xi\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\eta} f(\eta)\, d\eta\right) \tag{40}$$

$$= G(\omega)\, F(\omega) \tag{41}$$

■

1.8 Théoreme de Parseval- Conservation de la norme

Theorem 13 *Soit la fonction $f(x)$ et $F(\omega)$ sa transformée de Fourier, on a*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega \tag{42}$$

à la condition que les intégrales existent. On générale on a à la condition que les intégrales existent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,\overline{G(\omega)}d\omega \tag{43}$$

Preuve.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{G(\omega)}e^{-i\omega x}d\omega dx \tag{44}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{G(\omega)}e^{-i\omega x}d\omega dx \tag{45}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{G(\omega)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dxd\omega \tag{46}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{G(\omega)}F(\omega)\,d\omega \tag{47}$$

En particulier quand $f(x) = g(x)$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \tag{48}$$

■

1.9 Formule de sommation de Poisson

Theorem 14 *Si $f(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2na) \tag{49}$$

converge absolument pour tout $x \in [-a,\ \ a]$, $a > 0$, et sa somme $g(x)$ est absolument intégrable sur $[-a,\ \ a]$ avec $g(x+2a) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si a_n dénote le coéfficient de Fourier de g, alors

$$a_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} g(x)\,e^{-inx}dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-inx}dx = \frac{1}{2a}F(n) \tag{50}$$

Preuve. on a

$$\sum_{n=-\infty}^{=\infty}\int_{-a}^{a}\left|f\left(x+2na\right)\right|dx = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-a}^{a}\left|f\left(x+2na\right)\right|dx \tag{51}$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\int_{(2n-1)a}^{a(2n+1)}\left|f\left(t\right)\right|dt$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_{-(2N+1)a}^{a(2N+1)}\left|f\left(t\right)\right|dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(t\right)\right|dt < \infty$$

par le théorème de convergence dominé de Lebesgue on a :

$$\int_{-a}^{a}\left[\sum_{n=-\infty}^{=\infty}\left|f\left(x+2na\right)\right|\right]dx = \sum_{n=-\infty}^{=\infty}\int_{-a}^{a}\left|f\left(x+2na\right)\right|dx < \infty \tag{52}$$

par conséquent la série $\sum_{n=-\infty}^{=\infty}\left|f\left(x+2na\right)\right|$ converge absolument sur $[-a,\ \ a]$. Si $g_N\left(x\right) = \sum_{n=-N}^{N} f\left(x+2na\right)$, $\lim_{N\to+\infty} g_N\left(x\right) = g\left(x\right)$, où $g\left(x\right)$ est absolument intégrable sur $[-a,\ \ a]$, et $g\left(x+2a\right) = g\left(x\right)$. par ailleurs

$$\int_{-a}^{a}\left|g\left(x\right)\right|dx = \int_{-a}^{a}\left|\sum_{n=-\infty}^{=\infty} f\left(x+2na\right)\right|dx \tag{53}$$

$$\leq \int_{-a}^{a}\sum_{n=-\infty}^{=\infty}\left|f\left(x+2na\right)\right|dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{=\infty}\int_{-a}^{a}\left|f\left(x+2na\right)\right|dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(x\right)\right|dx < \infty$$

■

On considère la série de Fourier de $g\left(x\right)$ donnée par

$$g\left(x\right) = \sum_{m=-\infty}^{=\infty} c_m \exp\left(im\pi x/a\right) \tag{54}$$

où

$$c_m = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} g\left(x\right)\exp\left(-im\pi x/a\right)dx \tag{55}$$

On remplace $g\left(x\right)$ par la limite de la somme dans l'intégrale

$$g\left(x\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} f\left(x+2na\right) \tag{56}$$

ceci donne

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{2a}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-a}^{a} f\left(x+2na\right)\exp\left(-im\pi x/a\right)dx \qquad (57)\\
&= \frac{1}{2a}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\int_{(2n-1)a}^{(2n+1)a} f\left(y\right)\exp\left(-im\pi y/a\right)dy\\
&= \frac{1}{2a}\lim_{N\to+\infty}\int_{-(2N+1)a}^{(2N+1)a} f\left(y\right)\exp\left(-im\pi y/a\right)dy\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}F\left(\frac{m\pi}{a}\right)
\end{aligned}$$

où $F\left(\frac{m\pi}{a}\right)$ est la transformée de Fourier discrète de f. Finalement on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(x+2na\right) = g\left(x\right) = \sum_{n=-\infty}^{=\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}F\left(\frac{n\pi}{a}\right)\exp\left(in\pi x/a\right) \qquad (58)$$

On pose $x=0$ dans la formule (58) on obtient la formule de sommation de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(2na\right) = \sum_{n=-\infty}^{=\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}F\left(\frac{n\pi}{a}\right) \qquad (59)$$

Pour $a=\pi$ dans (59) la formule devient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(2n\pi\right) = \sum_{n=-\infty}^{=\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\left(n\right) \qquad (60)$$

quand $2a=1$, la formule de sommation de poisson (59) devient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\right) = \sum_{n=-\infty}^{=\infty}\sqrt{2\pi}F\left(2n\pi\right) \qquad (61)$$

Pour obtenir d'autres formules, on suppose que $a>0$, et on pose $g\left(x\right)=f\left(ax\right)\ \forall x$. alors

$$f\left(a\frac{2\pi n}{a}\right) = g\left(\frac{2\pi n}{a}\right) \qquad (62)$$

et on introduit la transformée de Fourier de f sans le coéfficient $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\begin{aligned}
F\left(n\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)\exp\left(-inx\right)dx \qquad (63)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(a\frac{x}{a}\right)\exp\left(-inx\right)dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x}{a}\right)\exp\left(-inx\right)dx\\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(y\right)\exp\left(-iany\right)dy\\
&= aG\left(an\right)
\end{aligned}$$

d'où la formule (63) devient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{=\infty} G\left(an\right) \tag{64}$$

On pose $b = \dfrac{2\pi}{a}$ dans (64) on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(bn\right) = 2\pi b^{-1} \sum_{n=-\infty}^{=\infty} G\left(2\pi b^{-1} n\right) \tag{65}$$

Exemple 15 *calculer la somme des série suivantes :*

(a)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+b^2} \tag{66}$$

(b)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi n^2 t\right) \tag{67}$$

pour la série dans (a), on pose

$$f\left(x\right) = \frac{1}{x^2+b^2} \tag{68}$$

sa transformée de Fourier est

$$F\left(\omega\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{b}\exp\left(-b\left|\omega\right|\right) \tag{69}$$

par la formule de sommation de poisson on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+b^2} &= \sum_{n=-\infty}^{=\infty} \frac{\pi}{b}\exp\left(-2\pi b\left|n\right|\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left[\sum_{n=0}^{=\infty}\exp\left(-2\pi bn\right) + \sum_{n=1}^{=\infty}\exp\left(2\pi bn\right)\right] \end{aligned} \tag{70}$$

on pose $r = \exp\left(-2\pi b\right)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+b^2} &= \sum_{n=-\infty}^{=\infty} \frac{\pi}{b}\exp\left(-2\pi b\left|n\right|\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left[\sum_{n=0}^{=\infty}\exp\left(-2\pi bn\right) + \sum_{n=1}^{=\infty}\exp\left(2\pi bn\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{b}\left[\sum_{n=0}^{=\infty} r^n + \sum_{n=1}^{=\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n\right] = \frac{\pi}{b}\left(\frac{r}{1-r} + \frac{1}{1-r}\right) \\ &= \frac{\pi}{b}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{\pi}{b}\coth\left(\pi b\right) \end{aligned} \tag{71}$$

Pour (b) , on pose $f(x)=\exp(-\pi t x^2)$, sa transformée de Fourier est

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4\pi t}\right) \tag{72}$$

par la formule de poisson on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\pi n^2 t\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right) \tag{73}$$

1.10 Application de la transformée de Fourier pour la résolution des équations différentielles

On considère l 'équation différentielle linéaire d'ordre n à coéfficients constants

$$Ly(x)=f(x) \tag{74}$$

où

$$L=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+........+a_1D^1+a_0 \tag{75}$$

où $a_0,a_1,..........,a_{n-1},a_n$ sont des constantes données, $D=\dfrac{d}{dx}$ et $f(x)$ fonction donnée.

Appliquons la transformée de Fourier à l'équation différentielle (74), on obtient :

$$\left[a_n(i\omega)^n+a_{n-1}(i\omega)^{n-1}+........+a_1(i\omega)+a_0\right]Y(\omega)=F(\omega) \tag{76}$$

où $\mathcal{F}(y(x))=Y(\omega)$ et $\mathcal{F}(f(x))=F(\omega)$

L'équation (76) peut s'écrire dans la forme équivalente à

$$P(i\omega)Y(\omega)=F(\omega) \tag{77}$$

où

$$P(z)=\sum_{r=0}^{n}a_rz^r \tag{78}$$

ainsi (77) devient :

$$Y(\omega)=\frac{F(\omega)}{P(i\omega)}=F(\omega)Q(\omega) \tag{79}$$

où

$$Q(\omega)=\frac{1}{P(i\omega)} \tag{80}$$

Appliquons la propriété de la transformée de Fourier du produit de convolution pour l'équation (79) ceci donne

$$\begin{aligned} y(x)&=\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)Q(\omega)) \qquad (81)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)q(x-\xi)d\xi \end{aligned}$$

où $q(x)=\mathcal{F}^{-1}(Q(\omega))$ connue explicitement.

Exemple 16 *Le courant éléctrique $I(t)$ dans un simple circuit contenant une résistance R et l'induction L vérifie l équation*

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t) \tag{82}$$

où $E(t)$ est une force éléctromagnétique et L et R sont contants avec $E(t)=E_0\exp(-a|t|)$, on applique la transformée de Fourier à (82) , on obtient :

$$(i\omega L+R)\mathcal{F}(I)=E_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2} \tag{83}$$

ou

$$\mathcal{F}(I)=\frac{aE_0}{iL}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\left(\omega-\dfrac{Ri}{L}\right)(a^2+\omega^2)}$$

la transformée inverse donne la solution :

$$I(t)=\frac{aE_0}{i\pi L}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\omega t)}{\left(\omega-\dfrac{Ri}{L}\right)(a^2+\omega^2)}d\omega \tag{84}$$

cette intégrale peut être évaluée par le théorème des résidus de Cauchy. Pour $t>0$

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{aE_0}{i\pi L}2\pi i\left[\operatorname{Re}s(\text{ à }\omega=\frac{Ri}{L})+\operatorname{Re}s(\text{ à }\omega=ia)\right] \\ &= E_0\left[\frac{e^{-at}}{R-aL}-\frac{2aLe^{-\dfrac{R}{L}t}}{R^2-a^2L^2}\right] \end{aligned} \tag{85}$$

de même pour $t<0$, le théorème des résidus donne

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{aE_0}{i\pi L}2\pi i\left[\operatorname{Re}s(\text{ à }\omega=-ia)\right] \\ &= E_0\frac{e^{at}}{R+aL} \end{aligned} \tag{86}$$

a $t=0$, le courant est continue et par conséquent

$$I(0)=\lim_{t\to 0}I(t)=E_0\frac{1}{R+aL} \tag{87}$$

Si $E(t)=\delta(t)$ la fonction de Dirac $\left(\delta(t)=0 \text{ pour } t\neq 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1\right)$.($\mathcal{F}(\delta(t))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, admettre pour le moment et à montrer quand on va introduitre la transformée de Fourier des distributions). Et la solution obtenue en utilisant la transformée inverse :

$$I(t)=\frac{1}{2i\pi L}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\omega t)}{\left(\omega-\dfrac{Ri}{L}\right)}d\omega \tag{88}$$

et par le théorème des Résidus on obtient :

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{1}{L}\left[\operatorname{Re}s(\ \text{à}\ \omega = -iR/L)\right] \\ &= \exp\left(\frac{-Rt}{L}\right) \end{aligned} \tag{89}$$

Exemple 17 *Trouver la solution de l'équation différentielle*

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + a^2u = f(x)\,, \ \ x \in \mathbb{R} \tag{90}$$

par la méthode de la transformée de Fourier. Appliquons la transformée de Fourier à cette équation, on obtient :

$$U(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega^2 + a^2} \tag{91}$$

et par le théorème de convolution, on obtient

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi \tag{92}$$

où

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\omega^2 + a^2}\right) \\ &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp(-a|x|) \end{aligned} \tag{93}$$

et la solution finale

$$u(x) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp(-a|x-\xi|)\, d\xi \tag{94}$$

Exemple 18 *Trouver la solution de l'équation différentielle*

$$-\frac{d^4u}{dx^4} + a^4u = w(x)\,, \ \ x \in \mathbb{R} \tag{95}$$

par la méthode de la transformée de Fourier. Appliquons la transformée de Fourier à cette équation, on obtient :

$$U(\omega) = \frac{W(\omega)}{\omega^4 + a^4} \tag{96}$$

la transformée de Fourier inverse donne

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(\omega)\exp(i\omega x)}{\omega^4 + a^4} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\omega x)}{\omega^4 + a^4} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi) \exp(-i\omega\xi)\, d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi)\, G(\xi, x)\, d\xi \end{aligned} \tag{97}$$

où

$$G(\xi, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\omega(x-\xi))}{\omega^4 + a^4} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos\omega(x-\xi)}{\omega^4 + a^4} d\omega \tag{98}$$

et par le théorème des Résidus on peut évalué cette intégrale ,

$$G(\xi, x) = \frac{1}{2a^3}\exp\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}|x-\xi|\right)\sin\left[\frac{a(x-\xi)}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right] \tag{99}$$

1.11 Solutions des équations intégrales

La transformée de Fourier peut être utilisé pour résoudre les équations intégrale donnée par une opération de convolution. on illustre la méthode par des examples.

on résoud l'équation intégrale de Fredholm avec une covolution avec le noyau de Kernel de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt + \lambda f(x) = u(x) \tag{100}$$

où $g(x)$ et $u(x)$ sont des fonctions données et λ est un paramètre donné. Appliquons la transformée de fourier à l'équation (100), on obtient :

$$\sqrt{2\pi}F(\omega)\,G(\omega) + \lambda F(\omega) = U(\omega) \tag{101}$$

où

$$F(\omega) = \frac{U(\omega)}{\sqrt{2\pi}G(\omega) + \lambda} \tag{102}$$

avec la transformée inverse , on obtient la solution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\omega)\exp(i\omega x)}{\sqrt{2\pi}G(\omega) + \lambda} d\omega \tag{103}$$

En particulier, si $g(x) = \frac{1}{x}$ donc

$$G(\omega) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}sgn\omega \tag{104}$$

alors la solution devient

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\omega)\exp(i\omega x)}{G(\omega)\lambda - i\pi sgn\omega} d\omega \tag{105}$$

Si $\lambda = 1$ et $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|}\right)$ donc

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik} \tag{106}$$

la solution devient

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \frac{U(\omega)\exp(i\omega x)}{1+i\omega} d\omega \tag{107}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(u'(x))\, \mathcal{F}\left(\sqrt{2\pi}e^{-x}\right) \exp(i\omega x)\, d\omega$$
$$= u'(x) * \sqrt{2\pi}e^{-x} = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(\xi)\exp(\xi - x)\, d\xi$$

Exemple 19 *Trouver la solution de l'équation intégrale :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi - x)\, f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{x^2+a^2} \tag{108}$$

Appliquons la transformée de Fourier, ceci donne :

$$\sqrt{2\pi}F(\omega)\,F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\omega|}}{a} \tag{109}$$

ou

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{1}{2}a\,|\omega|\right) \tag{110}$$

la transformée de Fourier inverse donne la solution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\omega x - \frac{1}{2}a\,|\omega|\right) d\omega \tag{111}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left[\int_0^{+\infty} \exp\left\{-\omega\left(ix + \frac{a}{2}\right)\right\} d\omega + \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\omega\left(-ix + \frac{a}{2}\right)\right\} d\omega\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left[\frac{4a}{4x^2+a^2}\right] = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{2}{4x^2+a^2}$$

Exemple 20 *Résoudre l'équation intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + a^2} d\xi = \frac{1}{x^2+b^2}, \quad b > a > 0 \tag{112}$$

Appliquons la transformée de Fourier , on obtient :

$$\sqrt{2\pi}F(\omega)\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-b|\omega|}}{b} \tag{113}$$
$$\sqrt{2\pi}F(\omega)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\omega|}}{a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-b|\omega|}}{b}$$

d' où

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{b}\exp\left(-|\omega|\,(b-a)\right) \tag{114}$$

la transformée inverse conduit à la solution :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{2\pi b}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\omega x-\left|\omega\right|(b-a)\right)d\omega \qquad (115)\\ &= \frac{a}{2\pi b}\left[\int_0^{+\infty}\exp\left[-\omega\left\{ix+(b-a)\right\}\right]d\omega+\int_0^{+\infty}\exp\left[-\omega\left\{-ix+(b-a)\right\}\right]d\omega\right]\\ &= \frac{a}{2\pi b}\left[\frac{1}{(b-a)+ix}+\frac{1}{(b-a)-ix}\right]\\ &= \frac{a}{\pi b}\frac{(b-a)}{(b-a)^2+x^2} \end{aligned}$$

Exemple 21 *Résoudre l'équation intégrale :*

$$f(x)+4\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-a\left|x-\xi\right|\right)f(\xi)\,d\xi=g(x) \qquad (116)$$

Appliquons la transformée de Fourier, ceci donne

$$F(\omega)+4\sqrt{2\pi}F(\omega)\frac{2a}{\sqrt{2\pi}\left(a^2+\omega^2\right)}=G(\omega) \qquad (117)$$

ou

$$F(\omega)=\frac{a^2+\omega^2}{\left(a^2+\omega^2+8a\right)}G(\omega) \qquad (118)$$

la transformée inverse donne la solution :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2+\omega^2}{\left(a^2+\omega^2+8a\right)}G(\omega)\exp i\omega x d\omega \qquad (119)$$

En particulier, si $a=1$ et $g(x)=\exp(|x|)$, donc $G(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$, alos la solution devient

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp i\omega x}{\left(\omega^2+8\right)}d\omega \qquad (120)$$

pour $x>0$ on utilise le demi circulre contour férmé dans le demi plan complexe inférieur (Théoreme des Résidus) pour évaluer cette intégrale, on trouve

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{-3x} \qquad (121)$$

pour $x<0$ on utilise le demi circulre contour férmé dans le demi plan complexe supérieur (Théoreme des Résidus) pour évaluer cette intégrale, on trouve :

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{3x} \qquad (122)$$

finalement la solution est donnée :

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{3|x|} \qquad (123)$$

1.12 Solutions des équations aux dérivées partielles

Dans cette section on illustre comment la méthode de la transformée de Fourier peut être utilisée pour obtenir la solution d' un problème aux limites et de valeur initial pour les équations aux dérivées partielles linéaires.

Exemple 22 *(Problème de Dirichlet dans le demi plan). On considère la solution de l équation de Laplace dans le demi plan*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y \geq 0 \tag{124}$$

avec des conditions aux limites

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty \tag{125}$$

$$u(x, y) \to 0 \quad qd \; |x| \to \infty, \quad y \to +\infty \tag{126}$$

On introduit la transformée de Fourier par rapport à la variable x

$$U(\omega, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x) \, u(x, y) \, dx \tag{127}$$

donc (124) *devient*

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - \omega^2 U = 0 \tag{128}$$

$$U(\omega, 0) = F(\omega), \quad U(\omega, y) \to 0 \quad qd \quad y \to +\infty \tag{129}$$

Ainsi , la solution pour le système de Fourier est :

$$U(\omega, y) = F(\omega) \exp(-|\omega| y) \tag{130}$$

Par application du théorème convolution la solution est donnée par

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \, g(x - \xi) \, d\xi \tag{131}$$

où

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\exp(-|\omega| y)) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{132}$$

par conséquent la solution (131) *devient :*

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \quad y > 0 \tag{133}$$

on obtient la formule intégrale de Poisson dans le demi plan supérieur.

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \lim_{y\to 0^+} \left[\frac{y}{\pi}\frac{1}{(x-\xi)^2+y^2}\right] d\xi \tag{134}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\delta(x-\xi)\,d\xi$$

où la définition de Cauchy pour la fonction de Dirac est

$$\lim_{y\to 0^+} \left[\frac{y}{\pi}\frac{1}{(x-\xi)^2+y^2}\right] = \delta(x-\xi) \tag{135}$$

Exemple 23 *(Problème de Neumann)*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad y \geq 0 \tag{136}$$

avec des conditions aux limites

$$u_y(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty \tag{137}$$

cette dernière équation ségnifie la dérivée normale au bord. On définie une nouvelle fonction $v(x,y) = u_y(x,y)$ *donc*

$$u(x,y) = \int v(x,y)\,dy + C \tag{138}$$

où C *est une constante arbitraire. On a* $v(x,y)$ *vérifie l' équation de Laplace, en effet :*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \tag{139}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

avec la condition aux limites

$$v(x,0) = u_y(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty \tag{140}$$

ainsi $v(x,y)$ *satisfait l'équation de Laplace avec les conditions aux limites de Dirichlet donc d"après l'exemple précédent la solution est donnée par :*

$$v(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2} d\xi, \tag{141}$$

donc la solution $u(x,y)$ *est obtenue par :*

$$u(x,y) = \int v(x,y)\,dy \tag{142}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,d\xi \int \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} dy, \quad y > 0$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \ln\left|(x-\xi)^2+y^2\right| d\xi + C$$

Exemple 24 *(Problème de Cauchy pour l'équation de diffusion). On considère le problème au valeurs initiales pour l'équation de diffusion en une dimension*

$$u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \tag{143}$$

où k est la constante de diffusion avec la condition initiale

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty \tag{144}$$

on résoud le problème avec la transformée de Fourier par rapport à la variable x donnée par

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x)\, u(x,t)\, dx \tag{145}$$

appliquons la transformée de Fourier à (143), *on obtient :*

$$U_t = -k\omega^2 U, \quad t > 0 \tag{146}$$

$$U(\omega,0) = F(\omega) \tag{147}$$

la solution du système de Fourier est

$$U(\omega,t) = F(\omega) \exp\left(-k\omega^2 t\right) \tag{148}$$

la transformée de Fourier inverse donne la solution :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp\left(i\omega x - k\omega^2 t\right) dx \tag{149}$$

et avec le théorème de convolution on a :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi \tag{150}$$

où

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\exp\left(-k\omega^2 t\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2kt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \end{aligned} \tag{151}$$

et la solution devient

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}\right) d\xi \tag{152}$$

Exemple 25 *(Problème de Cauchy pour l'équation des ondes*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \tag{153}$$

avec les conditions initiales

$$u(x,t) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{154}$$

Appliquons la transformée de Fourier à ce système (153-154), on obtient :

$$\frac{d^2U}{dt^2} + c^2\omega^2 U = 0 \tag{155}$$

$$U(\omega,0) = F(\omega), \qquad \left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = G(\omega) \tag{156}$$

la solution pour ce système de Fourier est

$$U(\omega,t) = A\exp(ic\omega t) + B\exp(-ic\omega t) \tag{157}$$

où A et B sont des contantes à détérminé par les conditions initial de Fourier , on :

$$A + B = F(\omega), \qquad A - B = \frac{G(\omega)}{ic\omega} \tag{158}$$

on détérmine A et B par ce système et puis

$$U(\omega,t) = \frac{1}{2}F(\omega)\left(\exp(ic\omega t) + \exp(-ic\omega t)\right) + \frac{G(\omega)}{ic\omega}\left(\exp(ic\omega t) + \exp(-ic\omega t)\right) \tag{159}$$

On applique la transformée inverse on obtient la solution :

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\left\{\exp(i\omega(x+ct)) + \exp(i\omega(x-ct))\right\}d\omega\right] \\ & + \frac{1}{2c}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)}{i\omega}\left\{\exp(i\omega(x+ct)) + \exp(i\omega(x-ct))\right\}d\omega\right] \end{aligned} \tag{160}$$

on utilise les formules de Fourier inverses

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\exp(i\omega x)\,dx \\ g(x) &= \mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\exp(i\omega x)\,dx \end{aligned} \tag{161}$$

on obtient la solution :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi \tag{162}$$

En particulier, si $f(x) = \exp(x^2)$, $g(x) = 0$ *et* $c = 1$, *la solution devient :*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\exp\left((x-t)^2\right) + \exp\left((x-t)^2\right)\right] \tag{163}$$

l'évolution en temps de la solution est montrée dans la figure 3. Si encore en particulier en prend $f(x) = 0$, $g(x) = \delta(x)$ donc

$$F(\omega) = 0 \text{ et } G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{164}$$

la solution pour le système de Fourier est :

$$U(\omega, t) = \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\exp(i\omega ct)}{i\omega} - \frac{\exp(-i\omega ct)}{i\omega} \right] \tag{165}$$

ainsi la transformée inverse donne

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left(\left\{ \frac{\exp(i\omega ct)}{i\omega} - \frac{\exp(-i\omega ct)}{i\omega} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{4c} \left[sgn(x+ct) - sgn(x-ct) \right] \\ &= \frac{1}{4c} H\left(c^2t^2 - x^2\right) \end{aligned} \tag{166}$$

où H est la fonction de Heaviside.

1.13 Transformée de Fourier en sinus et en cosinus

Definition 26 *On définit la transformé de Fourier de sinus et son inverse par*

$$\mathcal{F}_s(f(x)) = F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \omega x f(x)\, dx \tag{167}$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}(F_s(\omega)) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \omega x F_s(\omega)\, d\omega de \tag{168}$$

de même, on définit la transformé de Fourier de cosinus et son inverse par

$$\mathcal{F}_c(f(x)) = F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \omega x f(x)\, dx \tag{169}$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega)) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \omega x F_c(\omega)\, d\omega de \tag{170}$$

avec la fonction f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple 27 *montrer que*

(a)

$$\mathcal{F}_c(\exp(-ax)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{(a^2+\omega^2)} \quad (a > 0) \tag{171}$$

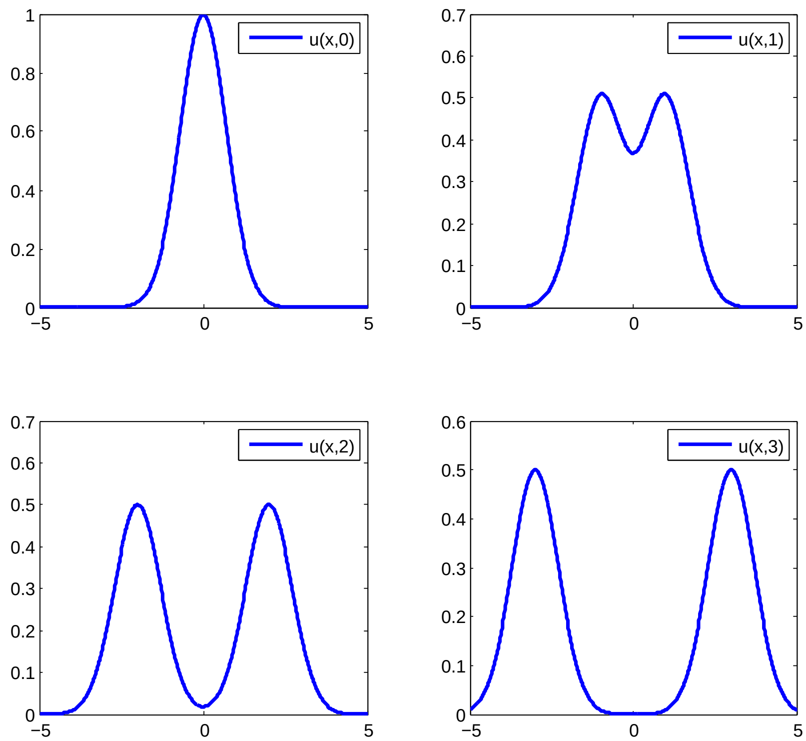

Figure 3: Evolution en temps de la solution $u\,(x,t)$

(b)

$$\mathcal{F}_s\left(\exp\left(-x\right)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)}\ \ (a>0) \tag{172}$$

on a

$$\mathcal{F}_c\left(\exp\left(-ax\right)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\omega x\exp\left(-ax\right)dx \tag{173}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\exp\left(-\left(a-i\omega\right)x\right)+\exp\left(-\left(a+i\omega\right)x\right)\right]dx$$
$$\mathcal{F}_c\left(\exp\left(-ax\right)\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\left(a^2+\omega^2\right)}$$

l'autre résultat est similaire.

Exemple 28 *montrer que*

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left(\frac{1}{k}\exp\left(-sk\right)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\frac{x}{s}\quad s>0 \tag{174}$$

on a

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{F}_s^{-1}\left(\exp\left(-sk\right)\right)=\int_0^{\infty}\exp\left(-sk\right)\sin kxdk \tag{175}$$
$$=\frac{x}{x^2+s^2}$$

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-sk\right)\sin kxdk=\frac{x}{x^2+s^2} \tag{176}$$

on intègre cette dernière équation entre s *et* $+\infty$, *on obtient :*

$$\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(-sk\right)}{k}\sin kxdk \tag{177}$$
$$=\int_s^{\infty}\frac{x}{x^2+s^2}ds$$
$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{x}=\arctan\frac{x}{s}$$

ainsi

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left(\frac{1}{k}\exp\left(-sk\right)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(-sk\right)}{k}\sin kxdk \tag{178}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\frac{x}{s}$$

1.13.1 Propriétées de la transformée de Fourier de cosinus et de sinus

Theorem 29 *Si $\mathcal{F}_c(f(x)) = F_c(\omega)$ et $\mathcal{F}_s(f(x)) = F_s(\omega)$, alors*

$$\mathcal{F}_c\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{a}F_c\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0 \tag{179}$$

$$\mathcal{F}_s\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{a}F_s\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0 \tag{180}$$

sous des conditions apprioris , les propriétées suivante sont vraies :

$$\mathcal{F}_c(f'(x)) = \omega F_c(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) \tag{181}$$

$$\mathcal{F}_c(f''(x)) = -\omega^2 F_c(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) \tag{182}$$

$$\mathcal{F}_s(f'(x)) = -\omega F_c(\omega) \tag{183}$$

$$\mathcal{F}_s(f''(x)) = -\omega^2 F_c(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}\omega}f(0) \tag{184}$$

Theorem 30 *(Théorème de convolution pour la transformée de Fouier de cosinus). Si $\mathcal{F}_c(f(x)) = F_c(\omega)$ et $\mathcal{F}_c(g(x)) = G_c(\omega)$, alors*

$$\mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega)G_c(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\left[g(\xi+x) + g(|x-\xi|)\right]d\xi \tag{185}$$

ou équvalent à

$$\int_0^\infty F_c(\omega)G_c(\omega)\cos\omega x d\omega = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(\xi)\left[g(\xi+x) + g(|x-\xi|)\right]d\xi \tag{186}$$

Preuve. en utilisant la transformée de fourier inverse de cosinus on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega)G_c(\omega)) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega)G_c(\omega)\cos\omega x d\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G_c(\omega)\cos\omega x d\omega\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi d\xi\end{aligned} \tag{187}$$

par suite on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c^{-1}(F_c(\omega)G_c(\omega)) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)d\xi\int_0^\infty G_c(\omega)\cos\omega x\cos\omega\xi d\omega \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)d\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty G_c(\omega)\left[\cos\omega(x+\xi) + \cos\omega(|x-\xi|)\right]d\omega\end{aligned} \tag{188}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\left[g(\xi+x) + g(|x-\xi|)\right]d\xi \tag{189}$$

et par définition de la transformée de Fourier inverse de cosinus on a de manière équivalent :

$$\int_0^\infty F_c(\omega) G_c(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{1}{2} \int_0^\infty f(\xi) [g(\xi + x) + g(|x - \xi|)] d\xi \tag{190}$$

on pose $x = 0$ dans l'équation (190) , on obtient

$$\int_0^\infty F_c(\omega) G_c(\omega) d\omega = \int_0^\infty f(\xi) g(\xi) d\xi = \int_0^\infty f(x) g(x) dx \tag{191}$$

on pose $g(x) = \overline{f(x)}$ donc $G_c(\omega) = \overline{F_c(\omega)}$ et on remplace dans la dérnière équation (191) , on obtient :

$$\int_0^\infty |F_c(\omega)|^2 d\omega = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx \tag{192}$$

on obtient la relation de Parceval pour la transformée de Fourier de cosinus. ■

De manière similaire on obtient :

$$\int_0^\infty F_s(\omega) G_s(\omega) \cos \omega x d\omega \tag{193}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G_s(\omega) \cos \omega x d\omega \int_0^\infty f(\xi) \sin \omega \xi d\xi$$

par interversion de l'ordre d'intégration on obtient :

$$\int_0^\infty F_s(\omega) G_s(\omega) \cos \omega x d\omega \tag{194}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_0^\infty G_c(\omega) \cos \omega x \sin \omega \xi d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty f(\xi) d\xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G_c(\omega) [\sin \omega (x + \xi) + \sin \omega (x - \xi)] d\omega \tag{195}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty f(\xi) [g(\xi + x) + g(x - \xi)] d\xi \tag{196}$$

ainsi on trouve

$$\mathcal{F}_s^{-1}(F_s(\omega) G_s(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(\xi) [g(\xi + x) + g(x - \xi)] d\xi \tag{197}$$

les deux dérnieres formules donnent le théorème de convolution pour la transformée de Fourier de sinus. On pose $x = 0$ dans la formule (197) , on obtient :

$$\int_0^\infty F_s(\omega) G_s(\omega) d\omega = \int_0^\infty f(\xi) g(\xi) d\xi = \int_0^\infty f(x) g(x) dx \tag{198}$$

on pose $g(x) = \overline{f(x)}$ donc $G_s(\omega) = \overline{F_s(\omega)}$ et on remplace dans la dérnière équation (198) , on obtient :

$$\int_0^\infty |F_s(\omega)|^2 d\omega = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx \tag{199}$$

on obtient la relation de Parceval pour la transformée de Fourier de sinus.

1.13.2 Application de la transformmée de Fourier de cosinus et sinus pour les EDP :

Exemple 31 *On considère le problème au valeurs initail pour l' équation de diffusion en une dimension*

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \tag{200}$$

où k est la constante de diffusion avec la condition initiale

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty \tag{201}$$

avec les conditions aux limites

(a)

$$u(0, t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad u(x, t) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty \tag{202}$$

(b)

$$u_x(0, t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad u(x, t) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty \tag{203}$$

ce problème avec les conditions aux limites est résolu avec la transformée de Fourier de sinus

$$U_s(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin \omega x u(x, t) \, dx \tag{204}$$

appliquons la transformée de Fourier à (200) , on obtient :

$$\frac{dU_s}{dt} = -k\omega^2 U_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\omega f(t), \quad t > 0 \tag{205}$$

$$U_s(\omega, 0) = 0 \tag{206}$$

puis la solution de Fourier est donnée par

$$U_s(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\omega \int_0^t f(\tau) \exp\left(k(t-\tau)\omega^2\right) d\tau \tag{207}$$

la transformée inverse donne la solution

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^t f(\tau) \mathcal{F}_s^{-1}\left\{\omega \exp\left(k(t-\tau)\omega^2\right)\right\} d\tau \\ &= \frac{x}{\sqrt{4\pi k}} \int_0^t f(\tau) \exp\left(-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{208}$$

où

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left\{\omega \exp\left(kt\omega^2\right)\right\} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k(t)}\right) \frac{d\tau}{(kt)^{\frac{3}{2}}}$$

en particulier $f(t) = T_0$ =constante , la relation (207) devient

$$U_s(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{T_0}{\omega} \left[1 - \exp\left(-kt\omega^2\right)\right] \tag{209}$$

la transformée inverse donne la solution :

$$u(x,t) = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} \left(1 - \exp\left(-kt\omega^2\right)\right) d\omega \tag{210}$$

on utilisant le résultat suivant :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} \exp\left(-a^2\omega^2\right) d\omega = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a}\right) \tag{211}$$

la solution est :

$$u(x,t) = \frac{2T_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right] \tag{212}$$

$$= T_0 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\right) \tag{213}$$

où $\operatorname{erf}(x)$ est la fonction d'erreur définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\alpha^2\right) d\alpha \tag{214}$$

Exemple 32 *On considère la solution de l'équation de Laplace dans le quart du plan*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < +\infty, \quad y \geq 0 \tag{215}$$

avec des conditions aux limites

$$u(0,y) = a, \quad u(x,0) = 0 \tag{216}$$

$$\nabla u(x,y) \to 0 \quad qd\ r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty, \tag{217}$$

où a une constante . On applique la transformée de Fourier de sinus par rapport à la variable x on trouve :

$$\frac{d^2U_s}{dy^2} - \omega^2 U_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega a = 0 \tag{218}$$

$$U_s(\omega, 0) = 0 \tag{219}$$

Ainsi , la solution pour le système de Fourier est :

$$U(\omega, y) = A \exp(-\omega y) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega} \tag{220}$$

où A est une constante à détérminer avec la condition $U_s(\omega, 0) = 0$. Par conséquent la solution de Fourier est :

$$U(\omega, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega} (1 - \exp(-\omega y)) \tag{221}$$

la transformée inverse donne la solution :

$$u(x,t) = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\omega}(1-\exp(-\omega y))\sin\omega x d\omega \tag{222}$$
$$= \frac{2a}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega - \int_0^\infty \frac{1}{\omega}\exp(-\omega y)\sin\omega x d\omega\right]$$
$$= a - \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{2a}{\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

Exemple 33 *On considère la solution de l'équation de Laplace dans le quart du plan*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad y \geq 0 \tag{223}$$

avec des conditions aux limites

$$u(0,y) = a, \quad u(x,0) = 0 \tag{224}$$

$$\nabla u(x,y) \to 0 \quad qd\ r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty, \tag{225}$$

où a une constante . On applique la transformée de Fourier de sinus par rapport à la variable x on trouve :

$$\frac{d^2U_s}{dy^2} - \omega^2 U_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega a = 0 \tag{226}$$

$$U_s(\omega,0) = 0 \tag{227}$$

Ainsi , la solution pour le système de Fourier est :

$$U(\omega,y) = A\exp(-\omega y) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega} \tag{228}$$

où A est une constante à détérminer avec la condition $U_s(\omega,0) = 0$. Par conséquent la solution de Fourier est :

$$U(\omega,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega}(1-\exp(-\omega y)) \tag{229}$$

la transformée inverse donne la solution :

$$u(x,y) = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\omega}(1-\exp(-\omega y))\sin\omega x d\omega \tag{230}$$
$$= \frac{2a}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega - \int_0^\infty \frac{1}{\omega}\exp(-\omega y)\sin\omega x d\omega\right]$$
$$= a - \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{2a}{\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

Exemple 34 *On considère la solution de l équation de Laplace dans une bande infini avec les conditions de Dirichlet*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < \ y < b \tag{231}$$

avec des conditions aux limites,

$$u(0,y)=0,\quad u(x,y)\to 0 \ qd \ x\to\infty,\ 0< \ y<b \tag{232}$$

$$u(x,b)=0,\quad u(x,0)=f(x),\quad 0<x<+\infty \tag{233}$$

où a une constante . On applique la transformée de Fourier de sinus par rapport à la variable x on trouve :

$$\frac{d^2U_s}{dy^2}-\omega^2U_s=0 \tag{234}$$

$$U_s(\omega,b)=0\ ,\ U_s(\omega,0)=F_s(\omega) \tag{235}$$

Ainsi , la solution pour le système de Fourier est :

$$U(\omega,y)=F_s(\omega)\frac{\sinh[\omega(b-y)]}{\sinh(\omega b)} \tag{236}$$

la transformée inverse donne la solution :

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\omega)\frac{\sinh[\omega(b-y)]}{\sinh(\omega b)}\sin\omega x d\omega \\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(l)\sin\omega l d\omega\right]\frac{\sinh[\omega(b-y)]}{\sinh(\omega b)}\sin\omega x d\omega\end{aligned} \tag{237}$$

1.13.3 Evalution des intégrales définies

La transformée de Fourier peut être utilisée pour calculer la valeur d'une intégrale définie. La méthode sera illustrée par des exemples.

Exemple 35 *Calculer l'intégrale :*

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\quad a>0,\ b>0 \tag{238}$$

si on pose $f(x)=\exp(-a|x|)$ *et* $g(x)=\exp(-b|x|)$ *alors* $F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}$ *et* $G(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b}{\omega^2+b^2}$*, par le théorème de convolution on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)G(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(-x)dx \tag{239}$$

ou équivalent à

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}=\frac{\pi}{2ab}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-|x|(a+b))dx \tag{240}$$

$$=\frac{\pi}{ab}\int_0^{+\infty}\exp(-x(a+b))dx \tag{241}$$

$$=\frac{\pi}{2ab(a+b)} \tag{242}$$

Exemple 36 *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}dx}{(x^2+a^2)} = \frac{\pi}{2}a^{-(p+1)}\sec\left(\frac{\pi p}{2}\right) \tag{243}$$

on pose $f(x) = \exp(-ax)$, *alors* $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}$, $g(x) = x^{p-1}$, *alors* $G_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}k^{-p}\Gamma(p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)$, *on utilise la formule de Parceval pour la transformée de Fourier de cosinus on a*

$$\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\,G_c(\omega)\,d\omega = \int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \tag{244}$$

$$\frac{2a}{\pi}\Gamma(p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)\int_0^{+\infty}\frac{\omega^{-p}}{(\omega^2+a^2)}d\omega = \int_0^{+\infty} x^{p-1}\exp(-ax)\,dx \tag{245}$$

$$= \frac{1}{a^p}\int_0^{+\infty} t^{p-1}\exp(-t)\,dt \tag{246}$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{a^p} \tag{247}$$

ainsi

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^{-p}}{(\omega^2+a^2)}d\omega = \frac{\pi}{2(a^{p+1})}\sec\left(\frac{\pi p}{2}\right) \tag{248}$$

Exemple 37 *Si* $a > 0$, $b > 0$, *montrer que*

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2(a+b)} \tag{249}$$

on considère

$$\mathcal{F}_s(\exp(-ax)) = F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+a^2} \tag{250}$$

$$\mathcal{F}_s(\exp(-bx)) = G_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+b^2} \tag{251}$$

le théorème de convolution pour la transformée de Fourier de sinus

$$\int_0^{\infty} F_s(\omega)\,G_s(\omega)\cos\omega x d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(\xi)\left[g(\xi+x)+g(x-\xi)\right]d\xi \tag{252}$$

pour $x = 0$, *dans (252), on a :*

$$\int_0^{\infty} F_s(\omega)\,G_s(\omega)\,d\omega = \int_0^{\infty} f(\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

ou,

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\exp(-(a+b)\xi)\,d\xi = \frac{\pi}{2(a+b)} \tag{253}$$

Exemple 38 *Montrer que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^4} = \frac{2\pi}{(2a)^5} \tag{254}$$

on pose $f(x) = \dfrac{1}{2(x^2+a^2)}$, *donc* $f'(x) = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^2}$, *et* $\mathcal{F}(f(x)) = F(\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2a}\exp(-a|\omega|)$, *appliquons la formule de Parceval pour* $f'(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f'(x))|^2 d\omega \tag{255}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |i\omega\mathcal{F}(f(x))|^2 d\omega$$

ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^4} = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \frac{1}{(2a)^2} \exp(-2a|\omega|)\, d\omega \tag{256}$$

$$= \frac{\pi}{(2a)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \exp(-2a\omega)\, d\omega \tag{257}$$

$$= \frac{2\pi}{(2a)^5} \tag{258}$$

2 Transformée de Fourier des distributions

2.1 L'espace $\boldsymbol{D}(\Omega)$

Definition 39 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *non vide. On appelle* $D(\Omega)$ *l 'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans* Ω.

Exemple 40

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & si\ \ |x| < 1 \\ 0 & si\ non \end{cases} \tag{259}$$

$\Omega\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *et support de* $\varphi = [-1, \ \ 1]$, *alos* $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

2.2 L'espace $\boldsymbol{D}'(\Omega)$

Definition 41 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *non vide. On appelle distribution sur* Ω *une forme linéaire continue sur* $D(\Omega)$. *L' espace des distributions est noté* $D'(\Omega)$.

$T \in D'(\Omega)$, $\varphi \in D(\Omega)$, $T(\varphi) = <T, \varphi>$ crochet de dualité entre $D(\Omega)$ et $D'(\Omega)$.
Continue ségnifie :
Si une suite $\varphi_j \in D(\Omega)$ et telle que

(i) Il existe un compact K fixe indépendant de j tel que support de $\varphi_j \subset K, \forall j$

(ii) $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\;\; D^{\alpha}\varphi_j\to 0$ uniformement quand $j\to+\infty$, alors $<T,\varphi_j>\to 0$, quand $j\to+\infty$.

Theorem 42 *T est une distribution sur Ω si et seulement si T est une forme linéaire sur $D(\Omega)$ telle que : $\forall K\subset\Omega,\;K$ compact, $\exists c>0,\;\exists k\in\mathbb{N}$ tels que :*

$$|<T,\varphi>|\le c\sup_{|\alpha|\le k,\;x\in K}|D^{\alpha}\varphi|\quad,\forall\varphi\in D\left(\Omega\right) \tag{260}$$

Exemple 43 *Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n,\mu$ une mesure sur Ω, alors $\mu\in D'\left(\Omega\right)$, en particulier la fonction de Dirac est une distribution ie $\delta\in D'\left(\Omega\right)$.*

Exemple 44 *On considère l'espace*

$$L^1_{loc}\left(\Omega\right)=\left\{f:\;\Omega\to\mathbb{C},\;f\quad\text{mesurable},\;\forall K,\;\text{compact}\subset\Omega,\;\int\limits_K|f\left(x\right)|\,dx<\infty\right\} \tag{261}$$

pour $f\in L^1_{loc}\left(\Omega\right)$, on définit T_f en posant :

$$<T_f,\varphi>=\int_{\Omega}f\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx \tag{262}$$

alors $T_f\in D'\left(\Omega\right)$.

2.3 L'espace $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}^n)$

Definition 45 *On appelle espace des fonctions à décroissance rapide l' espace noté S des fonctions appartenant à $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ telle que $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\forall\beta\in\mathbb{N}^*$, $x^{\alpha}\varphi^{(\beta)}\in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)\Longleftrightarrow\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\forall\beta\in\mathbb{N}^*$, $\quad\left|x^{\alpha}\varphi^{(\beta)}\right|\to 0,\quad|x|\to\infty$*

Exemple 46

$$\varphi\left(x\right)=\exp\left(-\left|x\right|^2\right)\in S\left(\mathbb{R}^n\right) \tag{263}$$

Proposition 47 *Soit $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}\left(\varphi\right)\in S(\mathbb{R}^n)$, de plus $\mathcal{F}$ est continue de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$.*

Theorem 48 *Si $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ et $\psi\in S(\mathbb{R}^n)$, alors*

1. $\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}\left(\varphi\right)\psi dx=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\mathcal{F}\left(\psi\right)dx$
2. $\mathcal{F}\left(\varphi*\psi\right)=\mathcal{F}\left(\varphi\right)\mathcal{F}\left(\psi\right)$
3. $\mathcal{F}\left(\varphi\psi\right)=\dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\varphi\right)*\mathcal{F}\left(\psi\right)$

2.4 L'espace S'

Definition 49 *On appelle distribution tempérée une forme linéaire continue sur S. L' espace des distributions tempérés est noté S'*

Proposition 50 *1. Si μ est une mesure bornée alors $\mu \in S'$.*

2. Si $f \in L^P$, alors $f \in S'$.

3. $\delta \in S'$

4. $T \in S'$, alors $PT \in S'$ $\forall P$ polynôme

5. Si $T \in S'$,alors $D^\alpha T \in S'$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$< D^\alpha T, \varphi >_{S' \times S} = (-1)^\alpha < T, D^\alpha \varphi >_{S' \times S} \tag{264}$$

6. $D(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a injection continue et densité de plus on a

$$E' \hookrightarrow S' \hookrightarrow D' \tag{265}$$

Theorem 51 *Soit $T \in S'$, on définit $\mathcal{F}(T)$, en posant :*

$$< \mathcal{F}(T), \varphi > = < T, \mathcal{F}(\varphi) >, \quad \forall \varphi \in S$$

et $\mathcal{F}(T)$ est une distribution tempérée et $\mathcal{F}$un isomorphisme sur S et on a les formules suivantes :

$$\mathcal{F}\left(T^{(\alpha)}\right) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T) \tag{266}$$

$$\mathcal{F}\left((-i\xi)^\alpha T\right) = (\mathcal{F}(T))^\alpha \tag{267}$$

Theorem 52 *Si $T \in$ E', alors $\mathcal{F}(T)$ se prolonge en un$\mathbb{R}$e fonction analytique sur $\mathbb{C}^n$ et on a :*

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = < T_x, e^{-i\xi x} >_{E' \times E} \tag{268}$$

Exemple 53 **i)** $\delta_0, \quad \mathcal{F}(\delta_0) = < \delta_0, e^{-i\xi x} >_{E' \times E} = 1$

ii) $\mathcal{F}\left(\delta_0^{(m)}\right) = (i\xi)^m$

iii) $\delta_a, \quad \mathcal{F}(\delta_a) = e^{-i\xi a}$

Theorem 54 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on a*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{269}$$

donc $\mathcal{F}$ est un isomorphisme isométrique à $\left(\sqrt{2\pi}\right)^n$ prés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 55 *Soit $T \in S'$ et soit $S \in E'$, alors $T * S \in S'$ et $\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$*

Exemple 56 *Sur $\mathbb{R}$ on se propose de chercher une solution élémentaire E tempéré de l'quation :*

$$E'' - a^2 E = \delta_0 \quad a > 0 \tag{270}$$

par la mérhode de Fourier. $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de S, résoudre l'équation revient à résoudre :

$$\mathcal{F}(E'') - a^2 \mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(\delta_0) \tag{271}$$

$$\left(-\xi^2 - a^2\right) \mathcal{F}(E) = 1 \tag{272}$$

$$\mathcal{F}(E) = \frac{-1}{\xi^2 + a^2} \tag{273}$$

$\mathcal{F}(E) \in S'$ alors

$$E = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{-1}{\xi^2 + a^2}\right) \tag{274}$$

$$E = \frac{1}{2a} \exp\left(-a\,|x|\right) \tag{275}$$

on a encore

$$E_1 = H(x) \frac{shax}{a} \tag{276}$$

est également solution élémentaire , $E_1 \notin S'$, support de E_1 est égale à $[0, \quad +\infty[$ et le support de E est égale à $\mathbb{R}$.

2.5 Formule sommatoire de Poisson

Pour toute fonction $\varphi \in S$, on a :

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\varphi)(n) \tag{277}$$

Preuve. Soit

$$S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n \in S' \tag{278}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\delta_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} < \delta_n, e^{-i\xi x} > \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\xi n} \\ &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi} \end{aligned} \tag{279}$$

on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} < e^{-i\xi n}, \varphi > = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} < \delta_{2n\pi}, \varphi > \tag{280}$$

ou ■

Exemple 57

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-t\frac{x^2}{2}\right),\ t > 0 \tag{281}$$

$\varphi \in S$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\left(\exp\left(-t\frac{x^2}{2}\right)\right)(n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-t2n^2\pi^2\right) \tag{282}$$

mais

$$\mathcal{F}\left(\exp\left(-tx^2\right)\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2t}\right) \tag{283}$$

d'où

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{n^2}{2t}\right) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-2t\left(\pi n\right)^2\right) \tag{284}$$