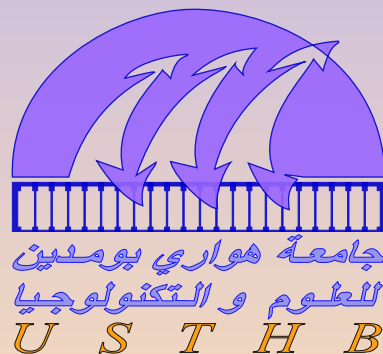


UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE⁽¹⁾

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

DÉPARTEMENT D'ANALYSE



Notes de Cours du module Analyse Complexe

Par

LAADJ Toufik⁽²⁾

Pour

Deuxième année Licence Math

Février 2016

⁽¹⁾USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.

⁽²⁾Page Web : <http://perso.usthb.dz/~tlaadj/>

Table des matières

Table des matières	iii
Description du Cours	iv
0 Les nombres complexes	1
0.1 L'ensemble des nombres complexes	1
0.1.1 Opérations sur les nombres complexes	2
0.1.2 Valeur absolue (ou module)	3
0.2 Représentation graphique des nombres complexes	3
0.2.1 Courbes dans le plan complexe	4
0.3 Forme polaire des nombres complexes	4
0.3.1 Formule de De Moivre	5
0.3.2 Formule d'Euler	5
0.3.3 Racines d'un nombre complexe	5
0.4 Propriétés topologiques de $\mathbb{C}$	6
0.5 Exercices	8
1 Fonctions complexes	10
1.1 Fonctions complexes	11
1.1.1 Fonctions uniformes et multiformes	11
1.1.2 Fonctions inverses	12
1.1.3 Transformations	12
1.1.4 Limites	13
1.1.5 Continuité	15

1.2	Fonctions élémentaires	15
1.2.1	Les fonctions polynômiales	15
1.2.2	Les fractions rationnelles	16
1.2.3	Les fonctions exponentielles	16
1.2.4	Fonctions trigonométriques	16
1.2.5	Les fonctions hyperboliques	17
1.2.6	Fonctions logarithmiques	17
1.2.7	La fonction $z \mapsto z^\alpha$	18
1.2.8	Fonctions trigonométriques inverses	19
1.2.9	Fonctions hyperboliques inverses	19
1.3	Exercices	19
2	Dérivation dans le domaine complexe	21
2.1	Domaines dans le plan complexe	21
2.2	Fonctions holomorphes	23
2.2.1	Dérivées	24
2.2.2	Conditions de Cauchy-Riemann	25
2.2.3	Fonctions harmoniques	29
2.2.4	Règles de dérivation	31
2.2.5	Règle de l'Hôpital	31
2.2.6	Points singuliers	32
2.3	Exercices	34
3	Intégration dans le domaine complexe	36
3.1	Chemins et courbes dans le plan complexe	36
3.2	Intégration le long d'une courbe	39
3.2.1	Propriétés	42
3.3	Théorèmes de Cauchy	44
3.3.1	Domaines simplement ou multiplement connexes	44
3.3.2	Théorème de Cauchy	45
3.3.3	Primitives et intégration	49
3.4	Formule intégrale de Cauchy	54
3.4.1	Quelques théorèmes importants	57
3.5	Exercices	63

4	Fonctions analytiques	66
4.1	Séries de fonctions	66
4.1.1	Généralités	66
4.1.2	Séries entières	71
4.1.3	Séries de Taylor	73
4.2	Fonctions analytiques	74
4.3	Prolongement analytique, principe des zéros isolés	77
4.4	Exercices	80
5	Séries de Laurent, Théorème des résidus	83
5.1	Séries de Laurent	83
5.1.1	Classification des singularités	86
5.2	Résidus	88
5.2.1	Calcul des résidus	89
5.3	Le théorème des résidus	91
5.4	Application du théorème des résidus	93
5.4.1	Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales	93
5.4.2	Application aux transformées de Fourier	94
5.4.3	Calcul d'intégrales définies diverses	97
5.5	Exercices	103
	Références	106

Description du Cours

Objectif du Cours

L'objectif du module Analyse Complexe est de maîtriser les concepts et les résultats fondamentaux de la théorie des fonctions complexes de variables complexes de manière à pouvoir les utiliser dans d'autres cours.

Ces notes de cours donnent les principales définitions et les résultats fondamentaux, illustrés par des exemples.

Contenu du Cours

- Les nombres complexes
- Fonctions complexes
- Dérivation complexe, équations de Cauchy-Riemann
- Intégration complexe, Théorème de Cauchy
- Fonctions analytiques
- Séries de Laurent, Théorème des résidus

Résultats d'apprentissage

À la fin du cours, l'étudiant doit avoir une bonne compréhension de la théorie des fonctions complexes à variable complexe et devrait être en mesure d'appliquer ces connaissances pour résoudre les exercices dans une variété de contextes.

En particulier, l'étudiant doit être capable de :

- Comprendre ce qu'une dérivation complexe est.
- Citer, tirer et appliquer les équations de Cauchy-Riemann.
- Effectuer l'intégration curviligne de fonctions complexes.
- Comprendre et appliquer le théorème de Cauchy et la formule intégrale de Cauchy.
- Étudier les propriétés de convergence d'une série de puissance complexe.
- Appliquer les théorèmes de Taylor et de Laurent pour obtenir des développements en série de puissance.
- Identifier et classer les singularités de fonctions complexes et trouver des résidus.
- Tirer et appliquer le théorème des résidus pour calculer des intégrales réelles en utilisant des résidus.

Chapitre 0

Les nombres complexes

Sommaire

0.1	L'ensemble des nombres complexes	1
0.1.1	Opérations sur les nombres complexes	2
0.1.2	Valeur absolue (ou module)	3
0.2	Représentation graphique des nombres complexes	3
0.2.1	Courbes dans le plan complexe	4
0.3	Forme polaire des nombres complexes	4
0.3.1	Formule de De Moivre	5
0.3.2	Formule d'Euler	5
0.3.3	Racines d'un nombre complexe	5
0.4	Propriétés topologiques de $\mathbb{C}$	6
0.5	Exercices	8

0.1 L'ensemble des nombres complexes

Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$.

Réponse : Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

Définition 1

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique :

$$z = x + iy \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels,}$$

et i est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.

- Le nombre x est appelée la partie réelle de z , on note $x = \operatorname{Re}(z)$.
- Le nombre y est appelée la partie imaginaire de z , on note $y = \operatorname{Im}(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque 2

a) Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z').$$

b) Si $y = 0$ on dit que z est réel, si $x = 0$ on dit que z est un **imaginaire pur**.

c) Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z .

0.1.1 Opérations sur les nombres complexes

- Addition : $(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$.
- Soustraction : $(x + yi) - (u + vi) = (x - u) + (y - v)i$.
- Multiplication : $(x + yi)(u + vi) = xu + xvi + yui + yvi^2 = xu - yv + (xv + yu)i$.
- Division : $\frac{x + yi}{u + vi} = \frac{x + yi}{u + vi} \cdot \frac{u - vi}{u - vi} = \frac{xu - xvi + yui - yvi^2}{u^2 + v^2} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}i$.

Remarque 3

Soient z et w deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

$$(1) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad (2) \overline{z\bar{w}} = \bar{z} w \quad (3) \overline{\bar{z}} = z \quad (4) z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \quad (5) z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)i.$$

0.1.2 Valeur absolue (ou module)

Définition 4

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définie par

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple 1

$$|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \blacksquare$$

Si z et w sont deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

- (1) $|zw| = |z||w|$ (2) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$ (3) $|\bar{z}| = |z|$ (4) $z\bar{z} = |z|^2$.
 (5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (inégalité triangulaire) (6) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

Remarque 5

On a les propriétés suivantes :

- (1) $\sqrt{x^2} = |x|$ et $x^2 = |x|^2$ si $x \in \mathbb{R}$ (2) $z^2 \neq |z|^2$ si $\text{Im}(z) \neq 0$.
 (3) $|z| = 0 \iff z = 0$ (4) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Remarque 6

Si z et w sont deux nombres complexes tels que $w \neq 0$, alors on a :

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

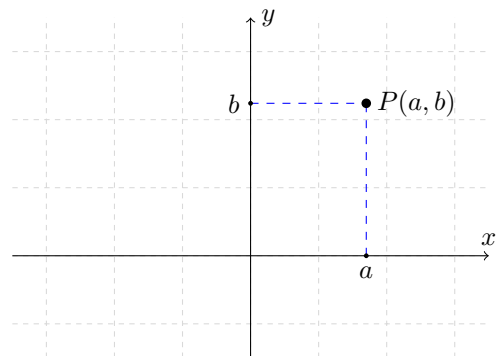
Exemple 2

$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 2i)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{-4}{5} + \frac{7}{5}i. \blacksquare$$

0.2 Représentation graphique des nombres complexes

Un nombre complexe $a + ib$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points d'un plan des xy appelé **plan complexe**.

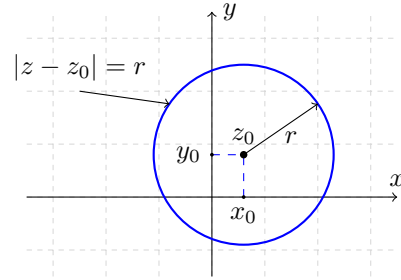
À chaque nombre complexe $z = a + ib$ correspond un point $P(a, b)$ du plan.



0.2.1 Courbes dans le plan complexe

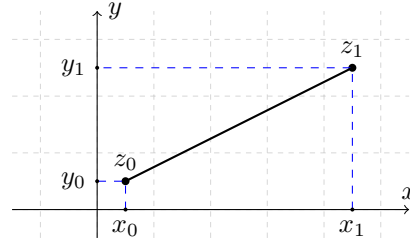
Cercle

Le cercle de rayon r et de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ est défini par l'équation $|z - z_0| = r$.



Segments

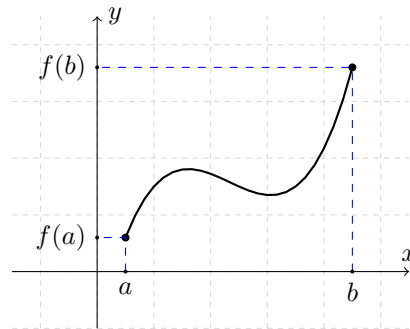
Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points $\{z \in \mathbb{C} \mid z = (1-t)z_0 + tz_1, t \in [0, 1]\}$.



Courbes

En général, une courbe $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ où f est une fonction continue, correspond à l'ensemble de points

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = x + if(x) = (x, f(x)), x \in [a, b]\}.$$



0.3 Forme polaire des nombres complexes

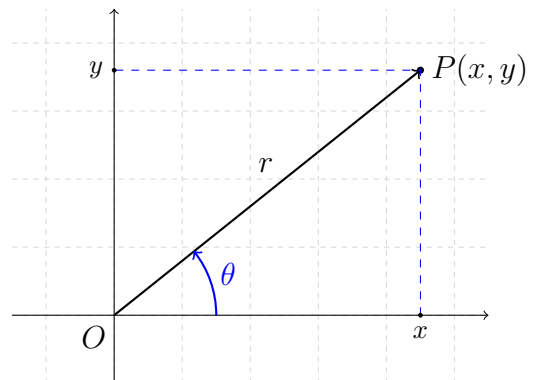
Si $P(x, y)$ désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe $z = x + iy$, nous voyons que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ est le module ou la valeur absolue de $z = x + iy$, et θ est appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x + iy$, noté $\arg z$, est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le demi-axe positif Ox .

On en tire

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$



qui est appelée la **forme polaire** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe z .

Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors l'angle θ est appelé l'**argument principal**, noté par $\text{Arg } \theta$. On a

$$\arg z = \text{Arg } \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

0.3.1 Formule de De Moivre

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) \}, \quad (0.1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2) \}.$$

Une généralisation de (0.1) conduit à

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \{ \cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \},$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \{ r (\cos \theta + i \sin \theta) \}^n = r^n \{ \cos (n\theta) + i \sin (n\theta) \},$$

qui est appelée formule de De Moivre.

0.3.2 Formule d'Euler

En supposant que le développement en série entière $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ de l'analyse élémentaire conserve un sens quand $x = i\theta$, nous parvenons au résultat $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $e = 2,71828\dots$, qui est appelé formule d'Euler. Avec ces notations, la formule de De Moivre se réduit à $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

0.3.3 Racines d'un nombre complexe

Un nombre z est appelé racine n -ième d'un nombre complexe $a + ib$ si $z^n = a + ib$, et nous écrivons $z = (a + ib)^{\frac{1}{n}}$ ou $z = \sqrt[n]{a + ib}$. D'après la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} z &= (a + ib)^{\frac{1}{n}} = \{ r (\cos \theta + i \sin \theta) \}^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

D'où il résulte qu'il y a n racines n -ièmes différentes de $a + ib$ pourvu que $a + ib \neq 0$.

Exemple 3

Calculer les racines quatrièmes de 1.

On a $\sqrt[4]{1} = \{\cos(0 + 2k\pi) + i \sin(0 + 2k\pi)\}^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Pour $k = 0$, $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$; $k = 1$, $z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$;

$k = 2$, $z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$; $k = 3$, $z_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$. ■

Exemple 4

Calculer $\sqrt[3]{1-i}$.

On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1-i} &= (1-i)^{\frac{1}{3}} = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{2}^{\frac{1}{3}} \left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right\} \\ &= \sqrt[6]{2} \left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, $z_0 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right\}$; $k = 1$, $z_1 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right\}$;

$k = 2$, $z_2 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right\}$. ■

0.4 Propriétés topologiques de $\mathbb{C}$

Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est la norme euclidienne du vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Cette norme induit sur $\mathbb{R}^2$ une topologie qui se transporte sans difficulté pour faire de $\mathbb{C}$ un espace topologique. Tous les théorèmes usuels de topologie obtenus en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ s'appliquent sans modification.

Rappelons ici, quelques définitions et propriétés topologiques fondamentales. Nous renvoyons au cours de topologie pour les démonstrations.

- La distance entre deux nombres complexes z_1 et z_2 est $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.
- Pour tous z_1, z_2 et z_3 , on a $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$.
- Une suite $\{z_n\}$ de nombres complexes converge vers un nombre complexe z si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - z| = 0.$$

- En vertu des inégalités $\sup\{| \operatorname{Re} z |, | \operatorname{Im} z |\} \leq |z| \leq | \operatorname{Re} z | + | \operatorname{Im} z |$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z.$$

En conséquence, les règles de calcul concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient restent valables.

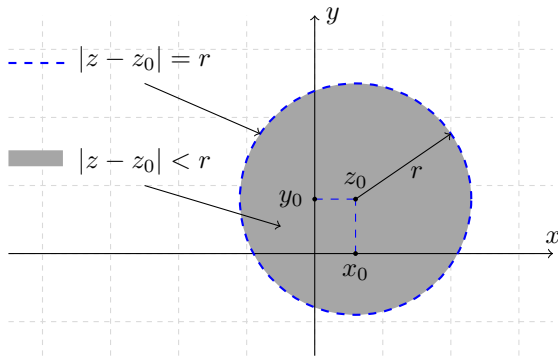
Notations. Soit r un réel positif et z_0 dans $\mathbb{C}$.

On note $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r\}$.

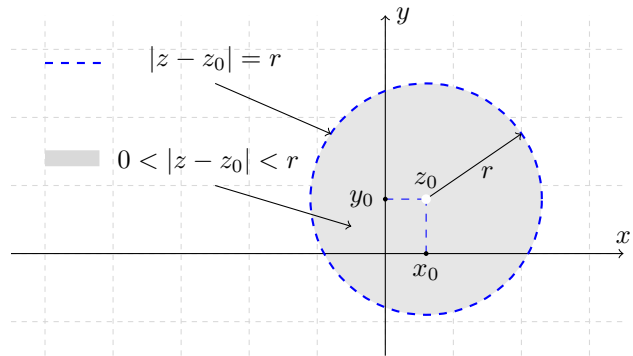
$D_r(z_0)$ est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r .

On note $\tilde{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < r\}$.

$\tilde{D}_r(z_0)$ est appelé disque ouvert pointé de z_0 .



Disque ouvert de centre z_0



Disque ouvert pointé de z_0

- **Ensembles ouverts.** Un ensemble E de $\mathbb{C}$ est dit ouvert si chaque point z de E peut être entouré par un disque ouvert centré en ce point et tous les points du disque sont contenus dans E .
- **Voisinages.** Une partie V de $\mathbb{C}$ est un voisinage de z_0 si V contient un disque ouvert $D_r(z_0)$.
- **Points limites.** Un point z_0 est appelé point limite ou point d'accumulation d'un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ si tout disque ouvert $D_r(z_0)$ contient des points de $E \setminus \{z_0\}$.
- **Ensembles fermés.** Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit fermé si son complémentaire $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ est ouvert. Un ensemble fermé contient tous ses points d'accumulation.
- **Ensembles bornés.** Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit borné si l'on peut trouver une constante $M > 0$ telle que $|z| < M$ pour tout point z de E .
- **Ensembles compacts.** Un ensemble qui est à la fois fermé et borné est appelé compact.
- **Intérieur et points frontières.** Un point z_0 est appelé point intérieur d'un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ si l'on peut trouver un disque ouvert $D_r(z_0)$ dont tous les points appartiennent à E .

E . Si tout disque ouvert $D_r(z_0)$ contient des points appartenant à E et aussi des points n'appartenant pas à E , alors z_0 est dit point frontière.

- **Ensembles connexes.** Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit connexe s'il n'admet aucune partition par deux ouvert non vides (E n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints).

Les deux théorèmes suivants sont importants dans la théorie des ensembles de points.

Théorème 7 (de Bolzano-Weierstrass)

Un ensemble E de $\mathbb{C}$ est compact si et seulement si toute suite $\{z_n\}$ de points de E contient une sous-suite $\{z_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ qui converge vers un point de E .

Théorème 8 (de Heine-Borel)

Un ensemble E de $\mathbb{C}$ est compact si et seulement si tout recouvrement de E par des ensembles ouverts $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ contient un sous-recouvrement fini.

0.5 Exercices

Exercice 0.1

Écrire les nombres complexes suivants sous forme $x + iy, x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{(2-i)(1+3i)}{2+3i}$, b) $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$, c) $\frac{a+ib}{a-1+ib}, a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 0.2

Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

a) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$, b) $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, c) $z = \cos \alpha - i \sin \alpha, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 0.3

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z = 1 - \sin \alpha + i \cos \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, b) $z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Exercice 0.4

Déterminer les parties réelle et imaginaire de

a) $z = (1+i)^{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$, b) $z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \beta + i \sin \beta}, \alpha, \beta \in]0, \pi[$.

Exercice 0.5

Calculer $i^{\frac{1}{6}}$ et représenter les résultats dans le plan complexe.

Exercice 0.6

Calculer les sommes suivantes : a) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$, b) $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$.

Exercice 0.7

Résoudre les équations : **a)** $(z - 1)^1 = 1$, **b)** $z^4 + 2 = 0$, **c)** $z^5 - 1 = i$.

Exercice 0.8

Si $\alpha + i\beta$ est racine de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$ où $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n, \alpha, \beta$ sont réels et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\alpha - i\beta$ est aussi racine. Ce résultat est souvent énoncé sous la forme suivante : les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées.

Exercice 0.9

Si $\operatorname{Im} z > 0$, montrer que $\operatorname{Im} \left(\frac{z}{1 + z^2} \right) > 0$ si et seulement si $|z| < 1$.

Exercice 0.10

Montrer que si $z^2 = \bar{z}^2$, alors $\operatorname{Re} z = 0$ ou bien $\operatorname{Im} z = 0$.

Exercice 0.11

Montrer que les nombres z_1, z_2 et z_3 sont alignés si et seulement si $\operatorname{Im} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right) = 0$.

Exercice 0.12

Soient z_1 et z_2 deux éléments dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que si $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ou bien si $||z_1| - |z_2|| = |z_1 - z_2|$, alors $z_1 = k z_2$ avec $k > 0$.

Exercice 0.13

Démontrer l'identité $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

En donner une interprétation géométrique.

Exercice 0.14

Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.

- a)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| < 3\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| > 3\}$, **c)** $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im} z < 1\}$,
d) $\{z \in \mathbb{C} / |z - 3i| \leq |z - 3|\}$, **e)** $\{z \in \mathbb{C} / |z^2 - z| \leq 1\}$,
f) $\{z \in \mathbb{C} / |1 - z| \leq 3(1 - |z|)\}$.

Exercice 0.15

Parmi les ensembles suivants, trouver ceux qui sont ouverts, fermés, connexes, bornés, compacts.

- a)** $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im} z > 0\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| \geq 3\}$, **c)** $\{1, i, -2, 1 + 3i\}$, **d)** $\mathbb{C}$,
e) $\{z \in \mathbb{C} / |z - 1| < |z + 1|\}$, **f)** $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} / |z - 1| < 1\}$.

Chapitre 1

Fonctions complexes

Sommaire

1.1	Fonctions complexes	11
1.1.1	Fonctions uniformes et multiformes	11
1.1.2	Fonctions inverses	12
1.1.3	Transformations	12
1.1.4	Limites	13
1.1.5	Continuité	15
1.2	Fonctions élémentaires	15
1.2.1	Les fonctions polynômiales	15
1.2.2	Les fractions rationnelles	16
1.2.3	Les fonctions exponentielles	16
1.2.4	Fonctions trigonométriques	16
1.2.5	Les fonctions hyperboliques	17
1.2.6	Fonctions logarithmiques	17
1.2.7	La fonction $z \mapsto z^\alpha$	18
1.2.8	Fonctions trigonométriques inverses	19
1.2.9	Fonctions hyperboliques inverses	19
1.3	Exercices	19

1.1 Fonctions complexes

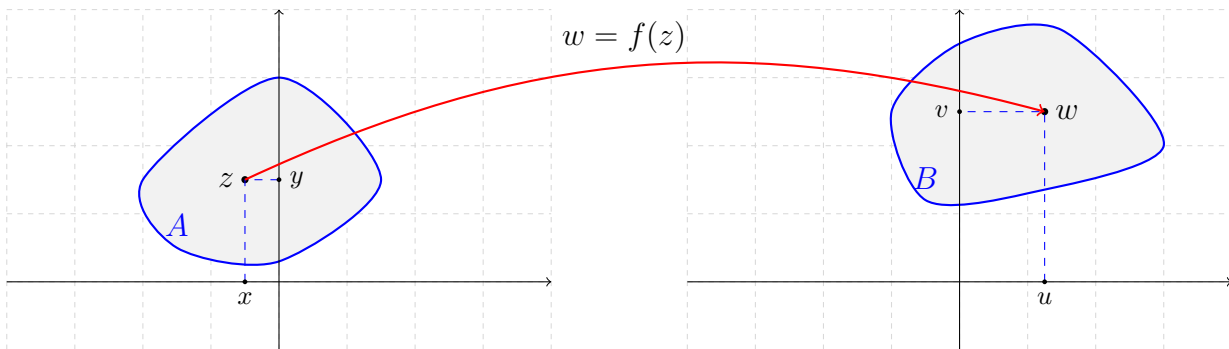
Définition 9

Soient A et B deux ensembles non vides dans $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in B$, on dit que w est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ ou

$$f : A \longrightarrow B$$

$$z \longmapsto w = f(z).$$

La fonction $z \mapsto w = f(z)$ définit une correspondance entre deux plans complexes.



Exemple 5

$z \mapsto w = f(z) = z^2$. Par exemple, la valeur de f en $z = 2i$ est $f(2i) = (2i)^2 = -4$. ■

1.1.1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 10

- Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z on dira que w est une fonction **uniforme** de z ou que $f(z)$ est uniforme.
- Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z , on dira que w est une fonction **multiforme** de z .

Remarque 11

- Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une **branche** de la fonction.
- On choisit habituellement un élément comme **branche principale**, ainsi est appelée **détermination principale**.

Exemple 6

Si $w = f(z) = z^2$, à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w . Donc $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z . ■

Exemple 7

Si l'on considère la fonction $z \mapsto w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w . Donc $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme de z . ■

1.1.2 Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w , ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f .

Exemple 8

La fonction $z \mapsto g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est la fonction inverse de la fonction $z \mapsto f(z) = z^2$. ■

1.1.3 Transformations**Définition 12**

Si $z = x + iy$, on peut écrire $f(z)$ comme $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = w$. Les fonctions u et v sont appelées, respectivement, **partie réelle** et **partie imaginaire** de f . On note

$$u = \operatorname{Re}(f) \quad \text{et} \quad v = \operatorname{Im}(f).$$

Nous dirons que le point $P(x, y)$ dans le plan de la variable z , est transformé en $P'(u, v)$ du plan de la variable w , par cette transformation et appellerons P' l'image de P .

L'ensemble des équations $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$ [ou ce qui est équivalent, $w = f(z)$] est appelé une **transformation**.

Nous appellerons (x, y) les coordonnées rectangulaires correspondant au point P du plan de la variable z et (u, v) les coordonnées curvilignes de P .

Exemple 9

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3yx^2 - y^3)i.$$

Les parties réelle et imaginaire sont $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ et $v(x, y) = 3yx^2 - y^3$. ■

1.1.4 Limites

Soit f une fonction complexe à une variable complexe z , définie dans un voisinage de $z = z_0$ sauf peut-être en $z = z_0$, c'est-à-dire définie dans un disque ouvert pointé de z_0 .

Définition 13

On dit que f admet une limite l quand z tend vers $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

On dit également que $f(z)$ tend vers l quand z tend vers z_0 et on écrit $f(z) \rightarrow l$ quand $z \rightarrow z_0$. La limite est indépendante de la manière dont z tend vers z_0 .

Exemple 10

$$\text{Soit } f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq i \\ 0 & \text{si } z = i \end{cases}.$$

Alors quand z tend vers $z_0 = i$, $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$ et on écrit $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = -1$.

Pour le prouver, on doit montrer que $\varepsilon > 0$ étant donné on peut trouver δ (dépendant en général de ε) tel que $|z^2 - i^2| < \varepsilon$ pourvu que $0 < |z - i| < \delta$.

Si $\delta \leq 1$, alors $0 < |z - i| < \delta$ implique que

$$|z^2 - i^2| = |z - i| |z + i| < \delta |z - i + 2i| \leq \delta (|z - i| + 2) \leq \delta (1 + 2) = 3\delta.$$

Choisissant $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3} \right\}$, nous avons alors $|z^2 - i^2| < \varepsilon$ dès que $0 < |z - i| < \delta$, ce qui établit le résultat demandé.

On notera que la limite de $f(z)$ quand $z \rightarrow z_0$ n'a rien à voir avec la valeur de $f(z)$ en i . ■

Les propriétés concernant les opérations algébriques (somme, produit, quotient) sur les limites des fonctions de la variable complexe, sont analogues à celles des fonctions de la variable réelle.

Proposition 14

Posons $l = a + ib$ et $f = u + iv$ où a, b, u et v sont des réels, alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \left\{ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = a \text{ et } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = b \right\}.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition découle directement de l'inégalité suivante : $|f(z) - l| = |u(x,y) - a + (v(x,y) - b)i| \leq |u(x,y) - a| + |v(x,y) - b|$. ■

Proposition 15

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique.

Démonstration. On doit montrer que si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l_1$ et $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l_2$, alors $l_1 = l_2$.

Par hypothèse quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|f(z) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ quand } 0 < |z - z_0| < \delta$$

$$\text{et } |f(z) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ quand } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

D'où

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(z) + f(z) - l_2| \leq |l_1 - f(z)| + |f(z) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

i.e. $|l_1 - l_2|$ est plus petit que tout nombre positif ε (arbitrairement petit) et doit donc être nul. Alors $l_1 = l_2$. ■

Exemple 11

Montrer que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas.

Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

Si $z \rightarrow 0$ le long de l'axe des x , alors $y = 0$ et $z = x + iy = x$, $\bar{z} = x - iy = x$; la limite cherchée est donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$.

Si $z \rightarrow 0$ le long de l'axe des y , alors $x = 0$ et $z = x + iy = iy$, $\bar{z} = x - iy = -iy$; la limite cherchée est $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1$.

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \rightarrow 0$, il n'y a pas donc de limite. ■

Remarque 16

Si la fonction f est multiforme la limite de f quand $z \rightarrow z_0$ peut dépendre de la branche choisie.

Point à l'infini

Par la transformation $w = \frac{1}{z}$, le point $z = 0$ est transformé en $w = \infty$ appelé point à l'infini du plan de la variable w . De la même façon nous noterons par $z = \infty$ le point à l'infini du plan de la variable z . Pour étudier le comportement de $f(z)$ à $z = \infty$, il suffira de poser $z = \frac{1}{w}$ et d'étudier le comportement de $f\left(\frac{1}{w}\right)$ à $w = 0$.

1.1.5 Continuité

Définition 17

Soit f une fonction complexe uniforme définie dans un voisinage de $z = z_0$ et en z_0 . La fonction f est dite continue en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Une fonction f est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région.

Notons que pour que f soit continue en $z = z_0$, les trois conditions suivantes doivent être simultanément remplies.

1) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ doit exister. 2) $f(z_0)$ doit exister, *i.e.* $f(z)$ est définie en z_0 . 3) $l = f(z_0)$.

Exemple 12

Soit f la fonction définie par $f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq i \\ 0 & \text{si } z = i \end{cases}$.

Quand z tend vers i , $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$, *i.e.* $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = i^2 = -1$. Mais $f(i) = 0$.

Donc $\lim_{z \rightarrow i} f(z) \neq f(i)$ et la fonction n'est pas continue en $z = i$. ■

Remarque 18

La fonction $f = u + iv$ est continue dans un domaine si et seulement si la partie réelle u et la partie imaginaire v sont continues.

Les propriétés des fonctions continues de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ sont analogues à celles des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. La plupart de ces dernières admettent une extension simple à des fonctions de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$.

1.2 Fonctions élémentaires

1.2.1 Les fonctions polynômiales

Les fonctions polynômiales sont définies par $f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, où $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le **degré** du polynôme $P(z)$.

1.2.2 Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes. Le cas particulier $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, où $ad-bc \neq 0$ est appelé transformation **homographique**.

1.2.3 Les fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont définies par

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens, $e \simeq 2,718$. Si a est réel et positif on définit

$$a^z = e^{z \operatorname{Log} a}.$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelles. Ainsi par exemple $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$.

1.2.4 Fonctions trigonométriques

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou **circulaires**, $\sin z$, $\cos z$, etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$, ...

Remarque 19

Contrairement au cas de la variable réelle, les fonctions de la variable complexe $z \mapsto \sin z$ et $z \mapsto \cos z$ ne sont pas bornées car $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} |\sin(i|y|)| = \lim_{|y| \rightarrow +\infty} |\cos(i|y|)| = +\infty$.

1.2.5 Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} & \operatorname{coth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2, \dots$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(iz) &= i \operatorname{sh} z & \cos(iz) &= \operatorname{ch} z & \operatorname{tg}(iz) &= i \operatorname{th} z \\ \operatorname{sh}(iz) &= i \sin z & \operatorname{ch}(iz) &= \cos z & \operatorname{th}(iz) &= i \operatorname{tg} z. \end{aligned}$$

1.2.6 Fonctions logarithmiques

La fonction $z \mapsto f(z) = \operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^z .

$$w = \operatorname{Log} z \Leftrightarrow z = e^w.$$

Question : Pour un nombre complexe z donné, le nombre w qui vérifie $z = e^w$ est-il unique?

Réponse : Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$. On a

$$\begin{aligned} z = e^w &\Leftrightarrow x + iy = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v) \\ &\Leftrightarrow \{|z| = e^u \text{ et } v = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

D'où w n'est pas unique car

$$w = \operatorname{Log} z = u + iv = \ln |z| + i (\operatorname{Arg} z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 20

La fonction $z \mapsto \operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} z &= \ln |z| + i \arg z \\ &= \ln |z| + i (\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.\end{aligned}$$

Remarque 21

La détermination **principale** ou valeur principale de $\operatorname{Log} z$ est souvent définie par

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad \text{où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi \text{ ou } 0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi.$$

Exemple 13

$$\operatorname{Log}(-1) = \ln |-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour la détermination principale, $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$. ■

Les propriétés suivantes sont vérifiées (modulo $2\pi i$) :

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}(z^n) = n \operatorname{Log} z.$$

Exemple 14

Utilisons la détermination principale du logarithme :

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln |1+i| + i \operatorname{Arg}(1+i) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i,$$

$$\operatorname{Log}(-1) = \ln |-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = \pi i,$$

$$\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(-1-i) = \ln |-1-i| + i \operatorname{Arg}(-1-i) = \ln \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i.$$

On remarque que $\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(1+i) + \operatorname{Log}(-1) - 2\pi i$. ■

1.2.7 La fonction $z \mapsto z^\alpha$

La fonction $z \mapsto z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}.$$

De même si $z \mapsto f(z)$ et $z \mapsto g(z)$ sont deux fonctions données, de z , on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \operatorname{Log} f(z)}.$$

En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple 15

$$i^{-i} = e^{-i \operatorname{Log} i} = e^{-i(\ln|i| + i \arg(i))} = e^{-i^2(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

La détermination principale est $i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$. ■

Remarque 22

On a $(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ dans le cas général si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Exemple 16

On a $((-i)^2)^i = (-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(\ln|-1| + i \arg(-1))} = e^{i^2(\pi + 2k\pi)} = e^{-\pi - 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(-i)^{2i} = e^{2i \operatorname{Log}(-i)} = e^{2i(\ln|-i| + i \arg(-i))} = e^{2i^2(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{\pi - 4k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

1.2.8 Fonctions trigonométriques inverses

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \quad \operatorname{Arcos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \quad \operatorname{Arcotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{z + i}{z - i}\right).$$

1.2.9 Fonctions hyperboliques inverses

$$\operatorname{Argsh} z = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad \operatorname{Argch} z = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \quad \operatorname{Argcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right).$$

1.3 Exercices**Exercice 1.1**

Soit $w = f(z) = z^2$.

- Montrer que la droite joignant les points $z_1 = -2 + i$ et $z_2 = 1 - 3i$ est transformée par $w = f(z) = z^2$ en une courbe passant par $f(z_1)$ et $f(z_2)$ dont on déterminera l'équation.
- Si c_1 et c_2 sont des constantes réelles quelconques, déterminer les ensembles de points du plan de la variable z qui sont transformés en les droites (1) $u = c_1$, (2) $v = c_2$ du plan de la variable w , au moyen de la fonction f .

Exercice 1.2

Soit $f(z) = z^3$, en utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = -i$.

Exercice 1.3

Soit $w^5 = z$ et supposons que pour la valeur particulière $z = z_1$ nous ayons $w = w_1$.

- a) Si partant du point z_1 dans le plan de la variable z on décrit dans le sens direct un contour fermé entourant l'origine, montrer que la valeur de w après retour en z_1 est $w_1 e^{\frac{2\pi i}{5}}$.
- b) Quelles sont les valeurs de w en z_1 après 2, 3, ..., tours complets autour de l'origine ?
- c) Traiter a) et b) si le contour n'entoure pas l'origine.

Exercice 1.4

Calculer les limites suivantes : a) $\lim_{z \rightarrow -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$, b) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{2n} + 1}{z - i}$.

Exercice 1.5

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \frac{(\operatorname{Re}(z^2))^2}{|z^2|}$ si $z \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 1.6

Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = f(x + iy) = \text{le nombre des racines complexes du polynôme } p(t) = t^2 + xt + y.$$

Exercice 1.7

Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

- a) $f(z) = e^{-z}$, b) $f(z) = \sin z$, c) $f(z) = \operatorname{Ch} z$, d) $f(z) = 2^{z^2}$, e) $f(z) = z^{2-i}$.

Exercice 1.8

Démontrer les relations suivantes :

- a) $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 y - \cos^2 x}$, b) $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x}$,
 c) $|\operatorname{Sh} z| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - \cos^2 y}$, d) $|\operatorname{Ch} z| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - \sin^2 y}$.

Exercice 1.9

Démontrer que si $|\sin z| \leq 1$ pour tout z , alors z est réel.

Exercice 1.10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $\operatorname{Im}(\sin z) = 0$, b) $\operatorname{Re}(\operatorname{Sh} z) = 0$, c) $\sin z = \frac{4}{3}i$, d) $\operatorname{Sh} z = \frac{i}{2}$, e) $e^z = -2$.

Exercice 1.11

Démontrer que $e^{(\operatorname{Log} z)} = z$ et montrer que l'égalité $\operatorname{Log}(e^z) = z$ n'est pas toujours vérifiée.

Exercice 1.12

Calculer a) $\operatorname{Log}(1 + i)$, b) i^i , c) $(1 - i)^{3-3i}$.

Chapitre 2

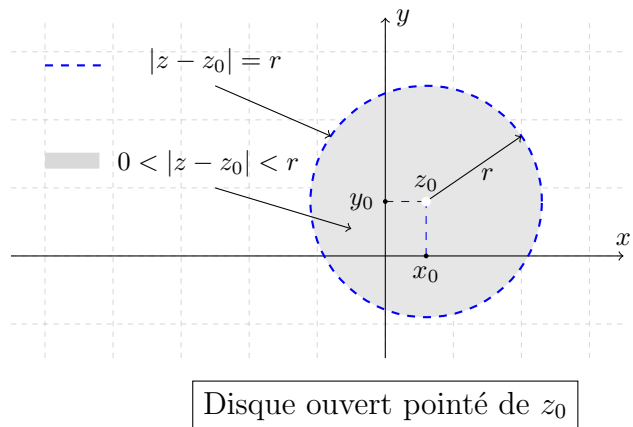
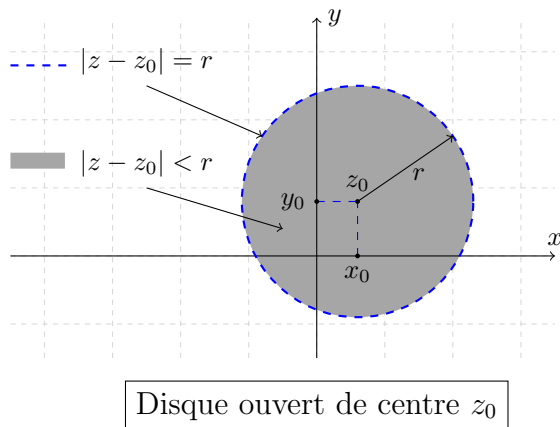
Dérivation dans le domaine complexe

Sommaire

2.1	Domaines dans le plan complexe	21
2.2	Fonctions holomorphes	23
2.2.1	Dérivées	24
2.2.2	Conditions de Cauchy-Riemann	25
2.2.3	Fonctions harmoniques	29
2.2.4	Règles de dérivation	31
2.2.5	Règle de l'Hôpital	31
2.2.6	Points singuliers	32
2.3	Exercices	34

2.1 Domaines dans le plan complexe

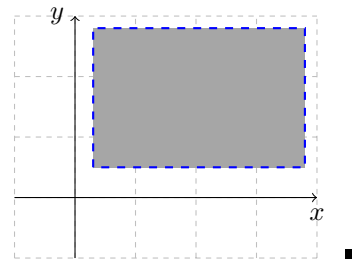
Rappelons qu'on note $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r, r > 0\}$ un disque ouvert de centre z_0 et de rayon r et $\tilde{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < r, r > 0\}$ un disque ouvert pointé de z_0 .


Définition 23

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit **ouvert** si chaque point z_0 de E peut être entouré par un disque ouvert $D_r(z_0)$ tel que tous les points du disque sont contenus dans E .

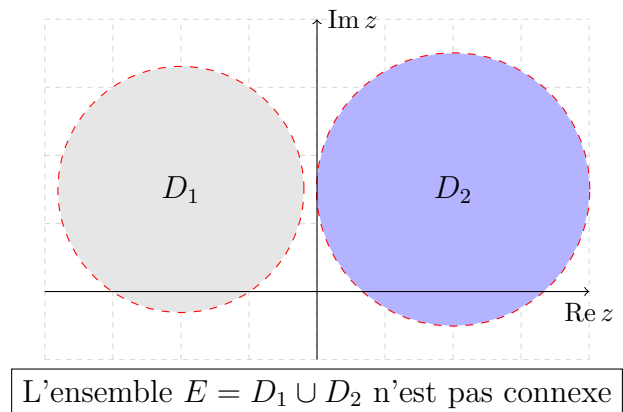
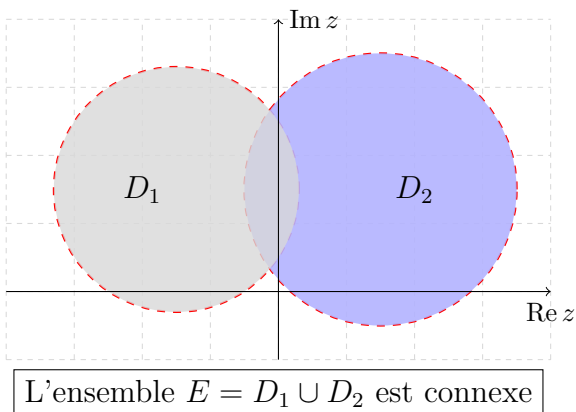
Exemple 17

Un rectangle sans ses arêtes est un ensemble ouvert.


Définition 24

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit **connexe** s'il n'admet aucune partition par deux ouverts non vides (E n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints).

Intuitivement, un ensemble est connexe s'il est fait d'un seul morceau.



Définition 25

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit **connexe par lignes polygonales** si deux points quelconques de E peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites (i.e. un contour polygonal) dont tous les points appartiennent à E .

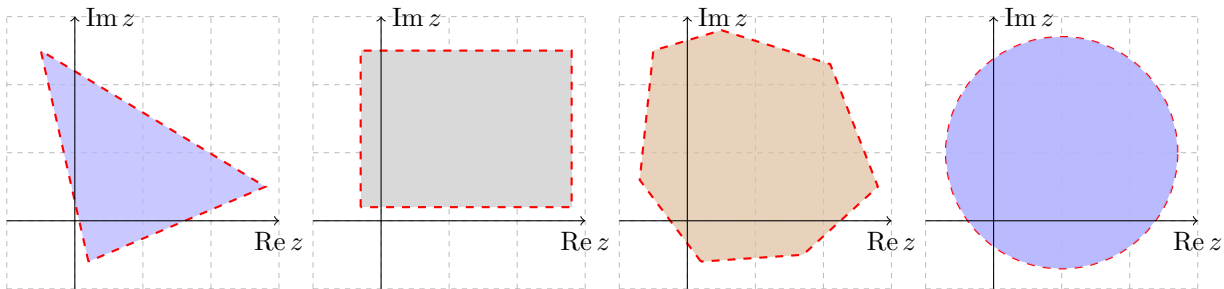
Il peut être démontré qu'un ensemble connexe par lignes polygonales est connexe. L'inverse, cependant, est fausse en général. Par exemple, l'ensemble des points $z = x + iy$ avec $y = x^2$ est clairement connexe mais n'est connexe par lignes polygonales puisque l'ensemble ne contient pas de segments de ligne droite. D'autre part, **pour les ensembles ouverts, la connexité et la connexité par lignes polygonales sont équivalentes.**

Définition 26

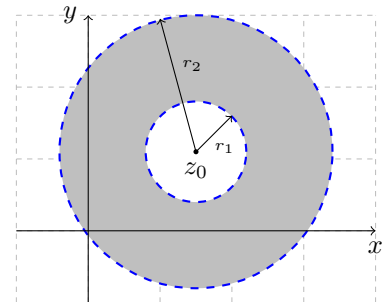
Un **domaine** dans le plan complexe est un ensemble connexe ouvert.

Exemple 18

Les triangles, les rectangles, les polygones et les disques ouverts sont des domaines

**Exemple 19**

La couronne de centre z_0 et de rayons r_1 et r_2 est un domaine.



2.2 Fonctions holomorphes

Malgré la possibilité de considérer un nombre complexe z comme un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mais il y avait une différence essentielle entre la fonction considérée comme une fonction de la variable complexe z ou des variables réelles x et y . Cette différence est particulièrement apparaît dans la dérivation.

2.2.1 Dérivées

Par analogie avec le cas des fonctions réelles, on définit la dérivée d'une fonction complexe f de la variable complexe z .

Définition 27

Soit D un domaine dans le plan complexe. Soit f une fonction uniforme de D dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in D$.

La dérivée de f en z_0 est définie par $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ pourvu que cette limite existe. Dans ce cas on dit que f est dérivable en z_0 .

On utilise souvent l'écriture analogue $f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.

Définition 28

Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D , alors f est dite **holomorphe** dans D .

Une fonction f est dite **holomorphe** en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0 .

Exemple 20

La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ■

Exemple 21

La fonction $z \mapsto f(z) = \operatorname{Re}(z)$ n'est pas dérivable en aucun point. ■

Proposition 29

Si la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable au point $z_0 \in D$ alors elle est continue au point z_0 .

Démonstration. Remarquer que pour tout nombre complexe $z \in D \setminus \{z_0\}$ on peut écrire

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0).$$

Comme $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe par hypothèse, on aura

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

Donc $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$ ou $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, ce qui montre que f est continue en z_0 . ■

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie, en effet, la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}$ est continue en tout $z_0 \in \mathbb{C}$, mais elle n'est pas dérivable en aucun point.

Définition 30

Une fonction f est dite **entière** si elle est dérivable dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

Exemple 22

Les polynômes $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, les fonctions $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \sin z$ et $z \mapsto \cos z$ sont des fonctions entières. ■

2.2.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$ et $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$.

Proposition 31

Si f est holomorphe dans D , alors les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent en tout point de D , et vérifient les **équations de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Démonstration. Puisque $f = u + iv$ est holomorphe, en tout point $z_0 = x_0 + iy_0$ de D , on a

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

En choisissant $y = y_0$, $x \rightarrow x_0$, on obtient

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

et en choisissant $x = x_0$, $y \rightarrow y_0$, on obtient

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Alors $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$. On en déduit que u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann. ■

Il est légitime de se demander si la réciproque de cette proposition est vraie ou fausse. La réponse est dans la proposition suivante.

Proposition 32

Si les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ **continues** dans D , et vérifient les **équations de Cauchy-Riemann**, alors la fonction $z \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans D .

Démonstration. Soit $z = x + iy \in D$ et soit $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}^*$ tel que $z + h \in D$. Les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ étant supposées continues, alors en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1, on obtient

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y) + i[v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)] \\ &= h_1 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + ih_1 \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + ih_2 \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(h_1 + ih_2), \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quand $h_1 \rightarrow 0$ et $h_2 \rightarrow 0$.

D'après les équations de Cauchy-Riemann, on aura

$$f(z+h) - f(z) = (h_1 + ih_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i(h_1 + ih_2) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(h_1 + ih_2).$$

D'où en divisant par $h = h_1 + ih_2$ et faisant tendre h vers 0, on voit que

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \quad \blacksquare$$

Ces conditions peuvent paraître très fortes, mais l'existence des dérivées partielles en un point ne suffit pas pour l'existence de la dérivée comme dans l'exemple suivant.

Exemple 23

Soit la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{z^4}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

La dérivée en $z = 0$ suivant la droite $y = x$ n'est pas définie. En effet, on a $(x + ix)^4 = x^4(1 + i)^4 = -4x^4$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + ix) - f(0)}{x + ix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}} - 0}{x(1 + i)} = \frac{1}{1 + i} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}}}{x} = \infty.$$

Cependant, les dérivées partielles de u et v en $(0, 0)$ sont toutes égales à zéro. Par exemple,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^4}}}{x} = 0. \quad \blacksquare$$

Corollaire 33

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$. Si $f = u + iv$ est holomorphe dans D , alors la dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad z \in D.$$

Exemple 24

On considère la fonction définie par $f(z) = z^2$. On a $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, d'où $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La fonction f est donc holomorphe dans $\mathbb{C}$, et $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z$. ■

Remarque 34

1. En multipliant la deuxième condition de (2.1) par i et l'ajouter à la première, les conditions de Cauchy-Riemann peuvent être reformulées comme

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

2. En notant que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Les coordonnées $(z, \bar{z})$ qui déterminent un point sont appelées coordonnées complexes conjuguées, ou plus brièvement coordonnées conjuguées.

Exemple 25

Soit la fonction définie par $f(z) = z^2 + z \operatorname{Re} z$. On a $\operatorname{Re} z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, alors $f(z) = z^2 + z \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z\bar{z}$, et donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}z \neq 0$. D'où la fonction f ne peut pas être holomorphe en aucun domaine. ■

Exercice 2.1

Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Proposition 35

Une fonction f holomorphe sur un domaine (ouvert connexe) $D \subset \mathbb{C}$, de dérivée identiquement nulle, est constante dans ce domaine.

Démonstration. Soit a fixé dans D et soit b dans D . Comme D est un ouvert connexe, il existe un chemin formé de segments de droites (i.e. une ligne polygonale) qui joint a et b . Soient z_1 et z_2 les extrémités d'un côté de cette ligne polygonale. Le segment qui joint z_1 et z_2 est

$$[z_1, z_2] = \{z(t) \in \mathbb{C} \mid z = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]\}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(z_1 + t(z_2 - z_1))$ est alors dérivable sur $[0, 1]$ avec

$$\varphi'(t) = (z_2 - z_1) f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) = 0$$

et en conséquence φ est constante sur $[0, 1]$. On a donc f constante pour tout z dans le segment $[z_1, z_2]$. De même manière on démontre que la fonction f est constante sur les autres côtés de cette ligne polygonale avec $f(a) = f(b)$. Comme b est arbitraire dans D il en résulte que f est constante sur le domaine D entier, qui est le résultat demandé. ■

De manière plus générale si f est holomorphe sur un ouvert D de dérivée identiquement nulle, la fonction f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert D .

Dérivées d'ordre supérieur

Si f est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, sa dérivée est notée f' . Si f' est holomorphe également dans le même domaine, sa dérivée est notée f'' . De la même façon la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f sera notée $f^{(n)}$.

Si f ne contient pas le terme $\bar{z}$, il en est de même pour sa dérivée. Donc d'après la condition de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, la fonction f' est aussi dérivable. D'où le résultat très important.

Proposition 36

Si f est holomorphe dans un domaine D , alors $f', f'', \dots$ sont également holomorphes dans D , i.e. les dérivées de tous ordres existent dans D .

On n'a pas un résultat analogue pour les fonctions réelles.

2.2.3 Fonctions harmoniques

Une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω , (on note $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$), si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ existent et continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 37

Soit u une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω . On dit que u est **harmonique** si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Notation. La fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est notée Δu et est appelée **laplacien** de u . ■

Exemple 26

Soit la fonction u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(x, y) = e^y \cos x$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^y \sin x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y \cos x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \cos x.$$

La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ et on a $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \cos x + e^y \cos x = 0$, d'où la fonction u est harmonique. ■

Proposition 38

Soit $z \mapsto f(z) = u(x, y) + iu(x, y)$ une fonction holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Si les deux fonctions réelles u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D , alors elles sont harmoniques dans D .

Démonstration. Notons que puisque $f(z) = u(x, y) + iu(x, y)$ est holomorphe sur D les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann dans D . i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \text{ pour tous } x + iy \in D.$$

Ainsi, comme les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D , on pourra écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

D'où $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Donc, la partie réelle u et la partie imaginaire v de f sont harmoniques dans D . ■

Exemple 27

On reprend l'exemple $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ où $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Alors $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$ et $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$. D'où les fonctions u et v sont harmoniques. ■

Noter que si f est holomorphe dans un domaine D , toutes ses dérivées existent et sont continues dans D . Les restrictions apportées ci-dessus sur u et v qu'elles soient de classe $\mathcal{C}^2$ sur D , ne sont donc pas nécessaires.

Définition 39

Soit u une fonction harmonique dans $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors une fonction v est dite **harmonique conjuguée** de u si les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

Proposition 40

Soit u une fonction harmonique dans $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors il existe une fonction f holomorphe de $A \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\operatorname{Re} f = u$. La fonction f est unique à une constante près.

Démonstration. Pour la démonstration voir par exemple [5]. ■

Exemple 28

Soit la fonction définie par $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Alors $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y. \tag{2.3}$$

En intégrant l'équation (2.2) par rapport à y , il vient

$$v = 2xy + y + C_1(x), \quad (2.4)$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x .

Par substitution de (2.4) dans (2.3) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx}C_1(x) = 2y \rightarrow \frac{d}{dx}C_1(x) = 0 \rightarrow C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.4), $v = 2xy + y + c$. ■

2.2.4 Règles de dérivation

Les règles de dérivation concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions réelles.

Les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

Exemple 29

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{de^z}{dz} = e^z, \dots \quad \blacksquare$$

2.2.5 Règle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine contenant le point z_0 et supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors la règle de L'Hôpital permet d'affirmer que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Exemple 30

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^6 + 1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{6z^5}{2z} = 3i^4 = 3. \quad \blacksquare$$

2.2.6 Points singuliers

Définition 41

Un point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un **point singulier** ou une singularité de f .

Définition 42

Le point $z = z_0$ est appelé **singularité isolée**, ou point singulier isolé de f , si l'on peut déterminer $\delta > 0$ tel que le disque $|z - z_0| \leq \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0 . Si l'on ne peut trouver une telle valeur δ , on dit que z_0 est une **singularité non isolée**.

Exemple 31

La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ a des singularités en $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$ et en $z_0 = 0$.

Comme nous pouvons entourer chacune des singularités $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$ par un cercle de rayon δ_k n'en contenant pas d'autres singularités, on en déduit qu'elles sont isolées.

De plus comme tout cercle de rayon δ centré en $z_0 = 0$ contient d'autres singularités que $z_0 = 0$, on en déduit que $z_0 = 0$ est une singularité non isolée. ■

Il existe des types variés de singularités.

Singularités apparentes

Le point singulier z_0 est appelé singularité **apparente** de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

Exemple 32

Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{\sin z}{z}$ puisque $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. ■

Pôles

Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, alors z_0 est appelé un **pôle d'ordre n** . Si $n = 1$, z_0 est appelé un **pôle simple**.

Exemple 33

La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{3z - 1}{(z - 1)^2 (z + 4)}$ a un pôle double en $z = 1$ et un pôle simple en $z = -4$. ■

Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, où $f(z_0) \neq 0$ et n est un entier positif, $z = z_0$ est appelé un zéro d'ordre n de $z \mapsto g(z)$. Si $n = 1$ on dit que z_0 est un zéro simple. Dans un tel cas z_0 est un pôle d'ordre n de la fonction $z \mapsto \frac{1}{g(z)}$.

Points de branchement

Soit z_0 un point singulier isolé de f . Le point z_0 est un **point de branchement** lorsque l'image par f d'au moins d'une courbe fermée entourant z_0 est une courbe non fermée. Le point est dit d'ordre n s'il faut au plus n tours autour de z_0 pour refermer la courbe image. Si la courbe ne se referme jamais quel que soit le nombre de tours effectués autour de z_0 , on dit que le point de branchement est transcendant ou logarithmique.

Exemple 34

La fonction $z \mapsto f(z) = \sqrt{z-3}$ a un point de branchement en $z = 3$. ■

Exemple 35

La fonction $z \mapsto f(z) = \text{Log}(z^2 + z - 2)$ a un point de branchement pour les valeurs de z telles que $z^2 + z - 2 = 0$, i.e. en $z = 1$ et $z = -2$. ■

Singularités essentielles

Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée **singularité essentielle**.

Exemple 36

La fonction $z \mapsto f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ a une singularité essentielle en $z = 1$. ■

Singularités à l'infini

La nature d'une singularité de $z \mapsto f(z)$ à $z = \infty$ [le point à l'infini] est la même que celle de $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right)$ à $w = 0$.

Exemple 37

La fonction $z \mapsto f(z) = z^3$ a un pôle triple à $z = \infty$ car $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$ a un pôle triple en $z = 0$. ■

On verra plus tard comment classer les singularités à l'aide des séries.

2.3 Exercices

Exercice 2.2

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = |z|^2$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que la limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas.

b) Montrer que pour tout $z \neq z_0$ on a $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \bar{z} + z_0 \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \right)$.

c) En déduire que f n'est pas dérivable en aucun point sauf en $z = 0$.

Exercice 2.3

Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

a) $f(z) = \bar{z}$, pour $z \in \mathbb{C}$ b) $f(z) = \operatorname{Re} z$, pour $z \in \mathbb{C}$, c) $f(z) = \operatorname{Im} z$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.4

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

a) $f(z) = (\bar{z} + i)^2$, sur $\mathbb{C}$, b) $f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$, sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) $f(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{z}{z-1} \right)$, sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, d) $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$, sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.5

Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ de partie réelle $|z|^2$.

Exercice 2.6

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann au point $(0, 0)$.

b) La fonction f est-elle dérivable au point $(0, 0)$?

c) Discuter le résultat.

Exercice 2.7

Supposons que f est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ et que à chaque point $z \in D$, soit $f(z) = 0$ ou bien $f'(z) = 0$. Montrer que f est constante sur D .

Exercice 2.8

Supposons que f est une fonction entière de la forme $f(z) = u(x) + iv(y)$.

Montrer que f est un polynôme linéaire.

Exercice 2.9

Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Exercice 2.10

Montrer que la fonction u définie ci-dessous est harmonique.

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2.11

Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes ?

$$\text{a) } f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)}, \quad \text{c) } f(z) = \frac{\text{Log}(z-2)}{(z^2+2z+2)^4}.$$

C^haPⁱt^re 3

Intégration dans le domaine complexe

Sommaire

3.1	Chemins et courbes dans le plan complexe	36
3.2	Intégration le long d'une courbe	39
3.2.1	Propriétés	42
3.3	Théorèmes de Cauchy	44
3.3.1	Domaines simplement ou multiplement connexes	44
3.3.2	Théorème de Cauchy	45
3.3.3	Primitives et intégration	49
3.4	Formule intégrale de Cauchy	54
3.4.1	Quelques théorèmes importants	57
3.5	Exercices	63

3.1 Chemins et courbes dans le plan complexe

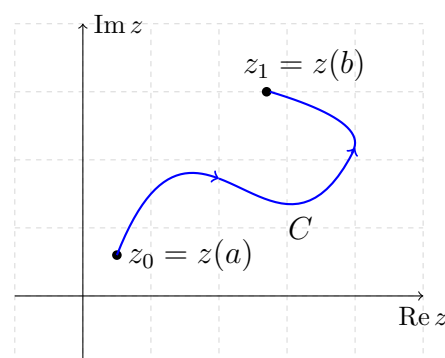
Définition 43

Un **chemin** ou **arc** de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{C}$ est défini comme étant une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle réel $I = [a, b]$, $a < b$, vers le plan complexe $\mathbb{C}$.

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t).$$

Ses points initial et final sont $z_0 = z(a)$ et $z_1 = z(b)$.



1. La fonction $t \mapsto z(t)$ est souvent notée $t \mapsto \gamma(t)$ ou $t \mapsto \phi(t)$.
2. On note un chemin ϕ par (I, ϕ) .
3. Les points initial $z_0 = \phi(a)$ et final $z_1 = \phi(b)$ sont appelés respectivement l'origine et l'extrémité de ϕ .

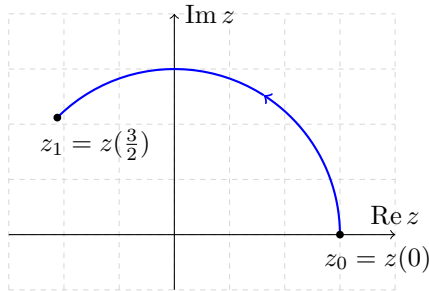
Définition 44

L'image $C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [a, b]\}$ s'appelle support de ϕ ou **courbe** dans le plan complexe $\mathbb{C}$ paramétrée par la fonction $\phi : t \mapsto z(t)$.

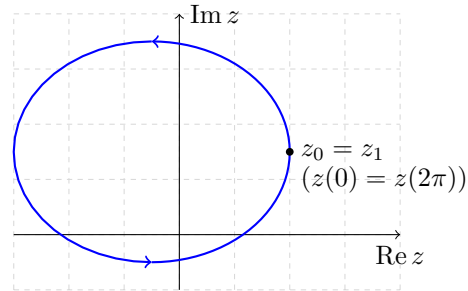
Souvent on confond le chemin avec son support et on dit que C est un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple 38

Les fonctions $z(t) = 3 \cos t + 3i \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ et $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cos t + i(\frac{3}{2} + \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ définies des chemins dans le plan complexe.



$$z(t) = 3 \cos t + 3i \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}.$$



$$z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cos t + i\left(\frac{3}{2} + 2 \sin t\right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad \blacksquare$$

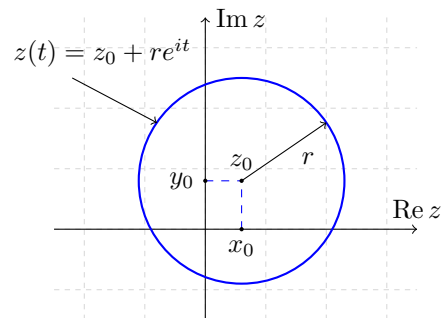
Exemple 39

Le cercle de centre z_0 et de rayon r est une courbe paramétrée par la fonction

$$t \mapsto z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ou

$$t \mapsto z(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



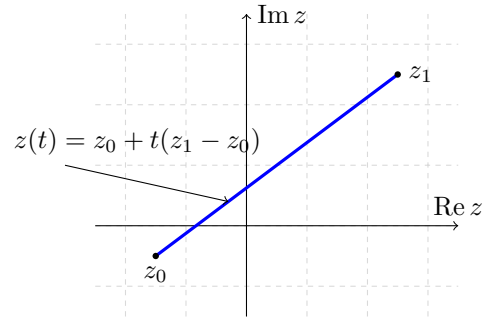
Cercle de centre z_0 et de rayon r ■

Exemple 40

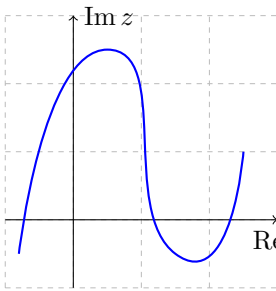
Le segment d'extrémités z_0 et z_1 noté $[z_0, z_1]$ est une courbe paramétrée par la fonction

$$t \mapsto z(t) = z_0(1-t) + tz_1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

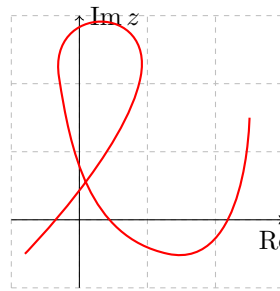
ou $t \mapsto z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad 0 \leq t \leq 1.$


 Segment d'extrémités z_0 et z_1
Définition 45

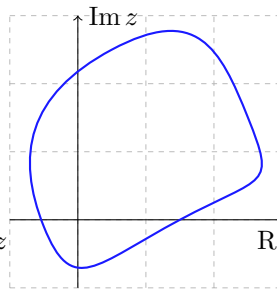
1. Si les points initial et final d'un chemin coïncident, il est appelé **chemin fermé** ou **lacet**.
2. On dit qu'un chemin est **simple** si ne se recoupe pas lui-même *i.e.* il n'a pas de points doubles.
3. Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de **Jordan**.

Exemple 41


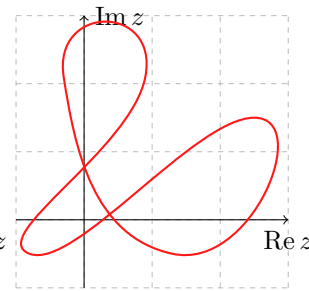
Chemin non fermé et simple



Chemin non fermé et non simple



Chemin fermé et simple



Chemin fermé et non simple

Définition 46

Une courbe de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux ou un chemin est obtenue en recollant un nombre fini de courbes ou chemin $([a_i, b_i], \phi_i), i = 1, \dots, m$ de classe $\mathcal{C}^k$ dont l'extrémité $\phi_i(b_i)$ de l'un coïncide avec l'origine du suivant $\phi_{i+1}(a_{i+1})$.

Définition 47

- On dit que deux chemins (I, ϕ) et (J, ψ) sont $\mathcal{C}^k$ -équivalents s'il existe une bijection $g : I \rightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^k$, ainsi que sa réciproque, telle que $\phi = \psi \circ g$.
- La fonction g , qui est strictement monotone, est appelée changement de paramètre.
- On dit que g est un changement de paramètre admissible de $C = \phi(I)$ si $k \geq 1$.
- Si la fonction g est strictement croissante, on dit que les chemins (I, ϕ) et (J, ψ) sont de même orientation.

Exemple 42

Soit C la courbe paramétrée par le chemin

$$\begin{aligned}\phi : [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \phi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t.\end{aligned}$$

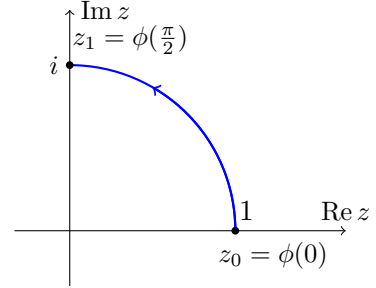
Le sens de l'orientation de C induite par ϕ est de $z_0 = \phi(0)$ vers $z_1 = \phi(\frac{\pi}{2})$.

Le chemin

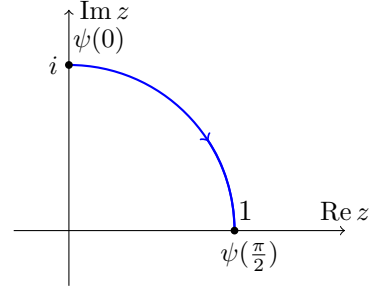
$$\begin{aligned}\psi : [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \psi(t) = ie^{-it} = \sin t + i \cos t\end{aligned}$$

admet le même support que celui de ϕ , i.e. $\phi([0, \frac{\pi}{2}]) = \psi([0, \frac{\pi}{2}])$, mais l'orientation définie par ϕ est opposée à l'orientation définie par ψ .

Le changement de paramètre $g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$ est défini par $g(t) = \frac{\pi}{2} - t$. ■



$$\phi(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$



$$\psi(t) = ie^{-it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

3.2 Intégration le long d'une courbe

Soit D un domaine non vide du plan complexe $\mathbb{C}$ et soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{aligned}\phi : [a, b] &\rightarrow D \\ t &\mapsto \phi(t) = z(t) = x(t) + iy(t).\end{aligned}$$

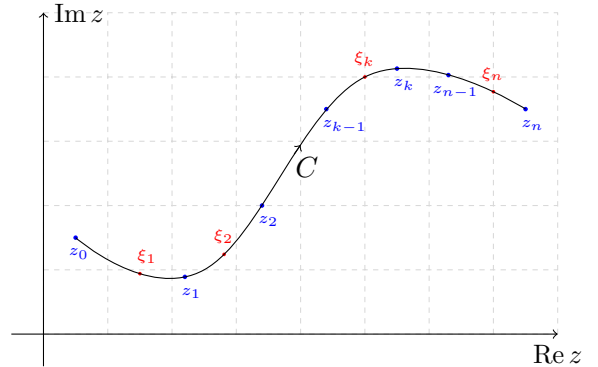
Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe définie sur D et continue en tout point de C .

Partageons $[a, b]$ en n intervalles au moyen des points $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$, arbitrairement choisis et posons

$$z_0 = \phi(a), z_1 = \phi(t_1), \dots, z_n = \phi(b).$$

Sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k [où k varie de 1 à n] choisissons un point ξ_k . Formons la somme

suivante qui s'appelle somme de Riemann de longueur $n \in \mathbb{N}$ associée à la fonction f et au chemin ϕ subdivisé en n portions de chemins pointées par les $\xi_k \in \phi([t_{k-1}, t_k])$:



$$S_n(f, \phi, \xi) = f(\xi_1)(z_1 - z_0) + \dots + f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) + \dots + f(\xi_n)(z_n - z_{n-1}).$$

En posant $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$, ceci devient

$$S_n(f, \phi, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k.$$

Si l'on fait croître le nombre n des subdivisions de façon que la longueur $|\Delta z_k|$ de la plus grande des cordes tende vers zéro, alors la somme S_n tend vers une limite indépendante du mode de subdivision.

Définition 48

La limite de la suite des sommes de Riemann

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \sup_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0}} S_n(f, \phi, \xi) = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \sup_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$$

s'appelle **intégrale** de la fonction f le long de la courbe C et se note $\int_C f(z) dz$.

Remarque 49

1. L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un **chemin**, ou intégrale **curviligne** complexe.
2. Si la courbe est fermée et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre $\curvearrowright$ on note $\oint_C f(z) dz$ au lieu de $\int_C f(z) dz$.
3. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est aussi appelé le sens positif ou sens direct.

Observons que si on suppose le chemin ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ on pourra alors approcher Δz_k par $\phi'(t_k) \Delta t_k$ donc en passant à la limite on déduit la proposition importante suivante.

Proposition 50

Soit D un domaine non vide dans $\mathbb{C}$. Si C est une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{aligned} \phi : [a, b] &\rightarrow D \\ t &\mapsto \phi(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue en tout point de C , alors

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Ce résultat est souvent pris comme définition de l'intégrale de f le long de la courbe C .

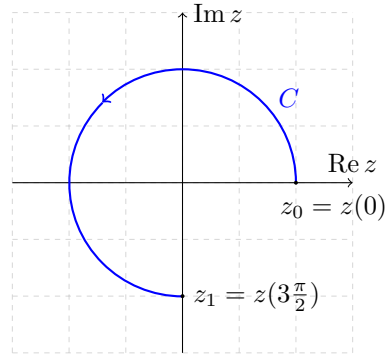
Exemple 43

Soit C l'arc $\{z(t) \in \mathbb{C} \text{ tel que } z(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\}$.

Évaluons l'intégrale $\int_C z^2 dz$.

On a $dz = z'(t) dt = 2ie^{it} dt$. Alors

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (2e^{it})^2 2ie^{it} dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8ie^{3it} dt \\ &= \left[\frac{8}{3} e^{3it} \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{8}{3} e^{\frac{9}{2}i\pi} - \frac{8}{3} e^0 = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3}i. \end{aligned}$$

**Proposition 51**

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $z(t) = x(t) + iy(t)$, l'intégrale $\int_C f(z) dz$ peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (udx - vdy) + i(vdx + udy) \\ &= \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\} dt \\ &\quad + i \int_a^b \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\} dt. \end{aligned}$$

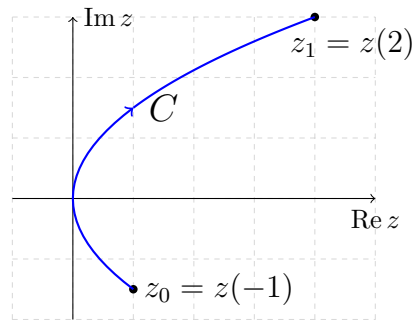
Exemple 44

Calculer $\int_C f(z) dz$ où $f(z) = i\bar{z} = y + ix$ et

$$C = \{z(t) = t^2 + \frac{3}{2}it \in \mathbb{C}, t \in [-1, 2]\}.$$

On a $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{3}{2}t$ et

$$dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t)) dt = (2t + \frac{3}{2}i) dt.$$



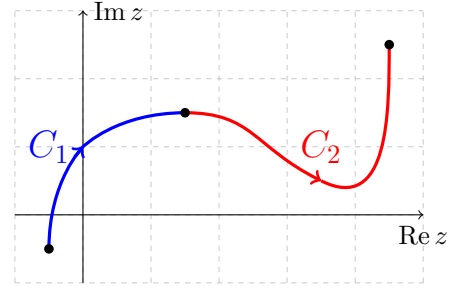
Alors

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{t=-1}^{t=2} (y(t) + ix(t)) (x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_{-1}^2 \left(\frac{3}{2}t + it^2\right) \left(2t + \frac{3}{2}i\right) dt = \int_{-1}^2 \left(\frac{3}{2}t^2 + i\left(2t^3 + \frac{9}{4}t\right)\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^3 + i\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{9}{8}t^2\right)\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} + \frac{87}{8}i. \end{aligned}$$

3.2.1 Propriétés

Soit C une courbe dans le plan complexe. On note par $-C$, la courbe C orientée dans son sens inverse. On suppose que $C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coïncide avec le point initial de la courbe C_2 .

Si f et g sont continues le long de C , alors les propriétés ci-dessous se démontrent à l'aide des sommes de Riemann.

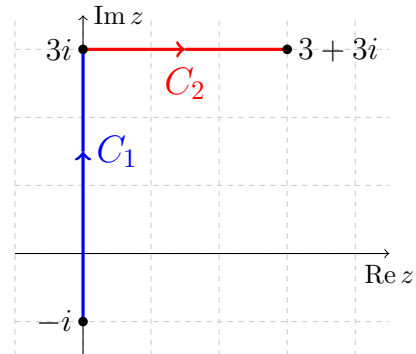


1. $\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$
2. $\int_C \alpha f(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz$ où α est une constante dans $\mathbb{C}$.
3. $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$
4. $\int_C f(z) dz = \int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$

Exemple 45

Évaluer $\int_C \bar{z} dz$ où C est la courbe formée des segments joignant $-i$ à $3i$ et $3i$ à $3 + 3i$.

Soit $C_1 = \{(4t - 1)i \in \mathbb{C}, 0 \leq t \leq 1\}$ le segment joignant $-i$ à $3i$ et $C_2 = \{3t + 3i \in \mathbb{C}, 0 \leq t \leq 1\}$ le segment joignant $3i$ à $3 + 3i$.



Sur le segment C_1 , on a $z(t) = (4t - 1)i$, $dz = z'(t) dt = 4idt$ et

$$\int_{C_1} \bar{z} dz = \int_0^1 -(4t - 1)i (4idt) = \int_0^1 (16t - 4) dt = [8t^2 - 4t]_0^1 = 4.$$

Sur le segment C_2 , on a $z(t) = 3t + 3i$, $dz = z'(t) dt = 3dt$ et

$$\int_{C_2} \bar{z} dz = \int_0^1 (3t - 3i) (3dt) = \int_0^1 (9t - 9i) dt = \left[\frac{9}{2}t^2 - 9it \right]_0^1 = \frac{9}{2} - 9i.$$

Le résultat demandé est $\int_C \bar{z} dz = \int_{C_1} \bar{z} dz + \int_{C_2} \bar{z} dz = 4 + \frac{9}{2} - 9i = \frac{17}{2} - 9i$. ■

Longueur d'une courbe

Soit C une courbe paramétrée par un chemin de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} z : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto z(t) = x(t) + iy(t). \end{aligned}$$

La **longueur** L_C de la courbe C est définie comme étant

$$L_C = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

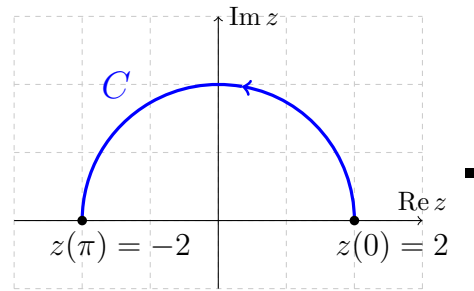
Exemple 46

Trouver la longueur du demi-cercle

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C} \text{ où } z(t) = 2e^{it}, t \in [0, \pi]\}.$$

On a $z'(t) = 2ie^{it}$ et donc $|z'(t)| = |2ie^{it}| = 2$.

$$\text{D'où } L_C = \int_0^\pi 2 dt = [2t]_0^\pi = 2\pi.$$



Théorème d'estimation

Soit f une fonction complexe continue définie sur un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z). \end{aligned}$$

Soit C une courbe paramétrée par un chemin de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} z : [a, b] &\rightarrow D \\ t &\mapsto z(t), \end{aligned}$$

tel que $|f(z(t))| \leq M, \forall t \in [a, b]$, i.e. $|f(z)|$ est bornée sur C par une constante réelle M .

Alors

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq M \cdot L_C, \quad (3.1)$$

où, par définition,

$$\int_C |f(z)| |dz| = \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt$$

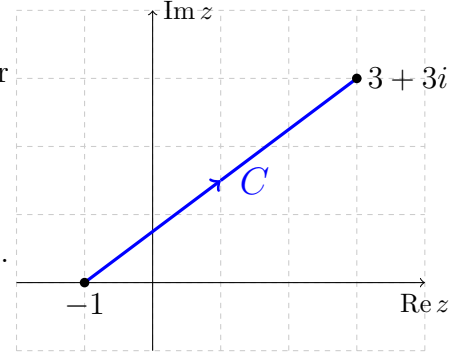
et $L_C = \int_a^b |z'(t)| dt$ est la longueur de la courbe C .

Exemple 47

Soit C le segment d'extrémités -1 et $3+3i$ qui est définie par

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 1] \text{ où } z(t) = -1 + 4t + 3it\}.$$

Vérifier le théorème d'estimation pour $f(z) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z = xy$.



On a $dz = z'(t) dt = (4 + 3i) dt$ et donc d'une part

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_0^1 (-1 + 4t)(3t)(4 + 3i) dt \right| = \left| 10 + \frac{15}{2}i \right| = \frac{25}{2} = 12,5.$$

D'autre part

$$\int_C |f(z)| |dz| = \int_0^1 |f(z(t))| |z'(t)| dt = \int_0^1 |(-1 + 4t)(3t)| (5) dt = \frac{205}{16} = 12,8125.$$

Ainsi $M = \sup_{0 \leq t \leq 1} |(-1 + 4t)(3t)| = 9$ et $L_C = 5$.

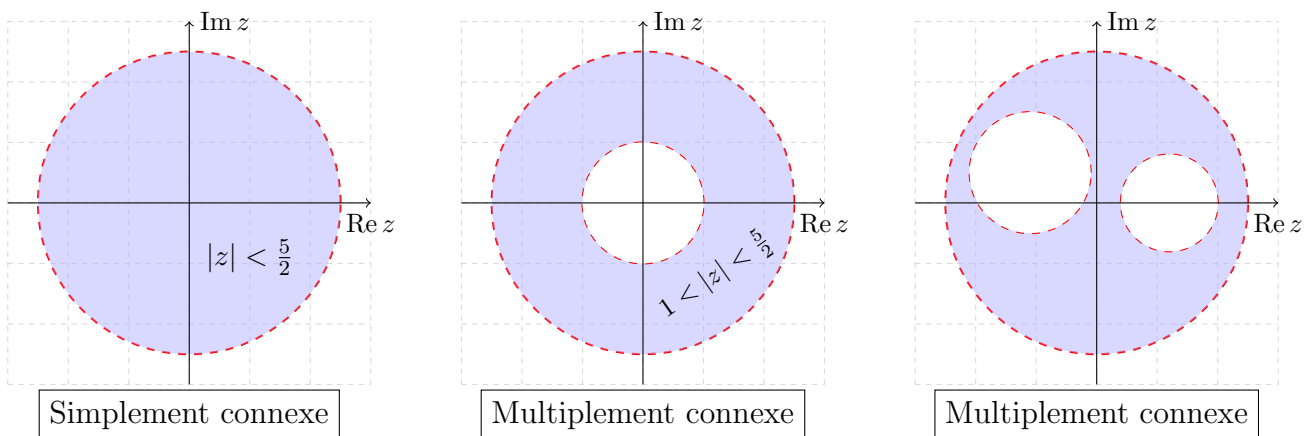
Alors le théorème d'estimation est vérifié car $12,5 \leq 12,8125 \leq 45$. ■

3.3 Théorèmes de Cauchy

3.3.1 Domaines simplement ou multiplement connexes

Un domaine D du plan complexe est dit **simplement connexe** si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D .

Dans le cas contraire D est dit **multiplement connexe**.

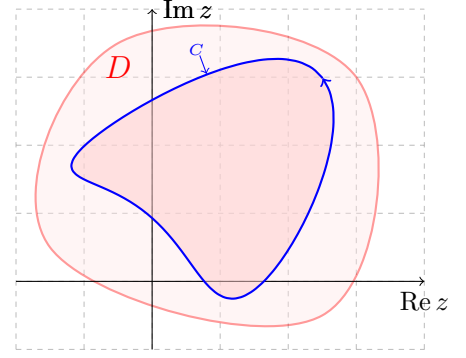


Intuitivement, un domaine sans trous est simplement connexe mais s'il possède au moins un seul trou il est multiplement connexe.

3.3.2 Théorème de Cauchy

Soient f une fonction **holomorphe** dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée contenue ainsi que son intérieure dans D . Alors

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$



Ce théorème fondamental est souvent appelé **théorème de Cauchy**, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiconnexes.

Il existe deux démonstrations différentes de ce théorème. Il fut d'abord démontré à l'aide de la formule de Green-Riemann, ce qui nécessite l'introduction des formes différentielles et l'intégrale double, dont seront enseignées dans le cours du calcul différentiel. Plus tard Édouard Goursat en proposa une autre démonstration, que nous allons présenter ici, c'est pourquoi on l'appelle quelquefois théorème de Cauchy-Goursat.

Démonstration.

Soit $I = \left| \oint_C f(z) dz \right|$. Considérons d'abord le cas où C est un triangle. Au moyen des milieux de ses côtés, subdivisons-le en quatre autres triangles C_1, C_3 et C_4 comme le montre la figure ci-contre. Les segments parcourus deux fois le sont dans des sens opposés de telle sorte que

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \oint_{C_k} f(z) dz.$$

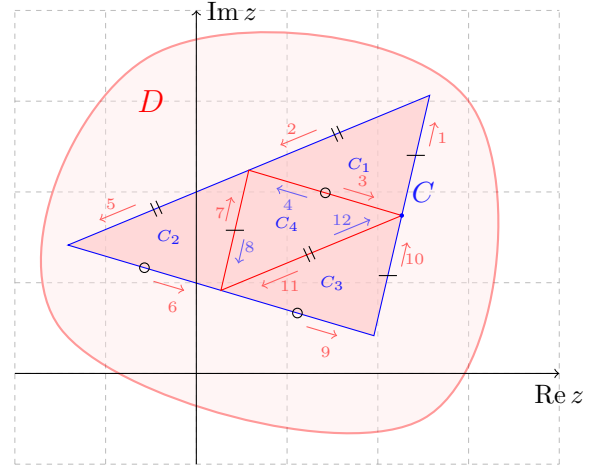
Comme

$$I = \left| \oint_C f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \oint_{C_k} f(z) dz \right| \leq 4 \sup_{1 \leq k \leq 4} \left| \oint_{C_k} f(z) dz \right|,$$

alors pour au moins l'un de ces triangles, appelons-le T_1 , on a $I \leq 4 \left| \oint_{T_1} f(z) dz \right|$. Le périmètre de ce triangle est $L_{T_1} = \frac{L_C}{2}$, où L_C est le périmètre du triangle C .

En recommençant ce procédé, on obtient une suite de triangles emboîtés T_n tels que

$$I \leq 4^n \left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| \quad \text{et} \quad L_{T_n} = \frac{L_C}{2^n}.$$



Comme ces triangles sont emboîtés et que leurs périmètres tend vers 0, alors leur intersection est un point unique z_0 où f est holomorphe.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \text{ pourvu que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Si on choisit n assez grand tel que $L_{T_n} = \frac{L_C}{2^n} < \delta$, alors pour tout $z \in T_n$:

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0| \leq \varepsilon \frac{L_C}{2^n}.$$

D'autre part, un calcul simple montre que $\oint_{T_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz = 0$. Alors

$$\begin{aligned} I &\leq 4^n \left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| = 4^n \left| \oint_{T_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \\ &\leq 4^n \oint_{T_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| |dz| \\ &\leq 4^n \varepsilon \frac{L_C}{2^n} \oint_{T_n} |dz| = 4^n \varepsilon \frac{L_C}{2^n} \left(\frac{L_C}{2^n} \right) = \varepsilon (L_C)^2. \end{aligned}$$

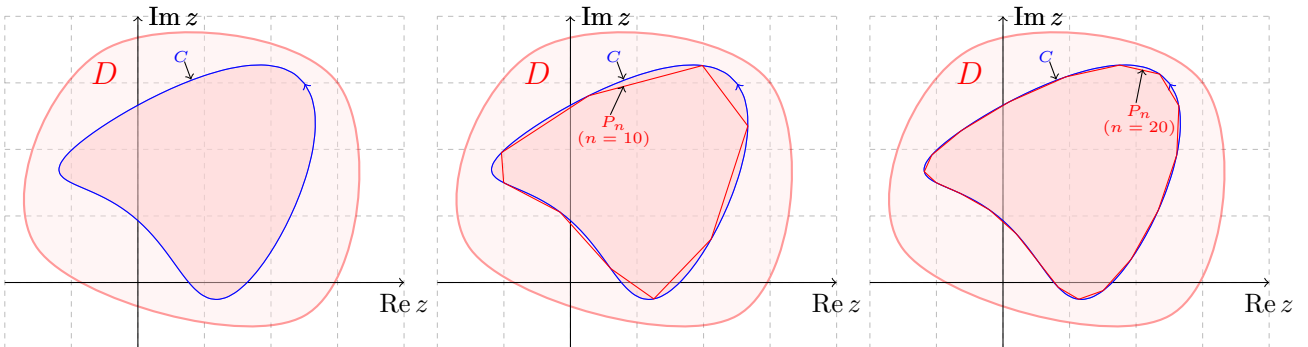
Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on doit avoir $I = 0$ et donc $\oint_C f(z) dz = 0$.

Le cas où C est un polygone se déduit du cas précédent par triangulation.

Dans le cas général, la fonction f étant continue et donc par définition, l'intégrale $\oint_C f(z) dz$

est la limite de la suite des sommes $S_n = \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1})$, lorsque la distance maximale ($\Delta_n = \sup_{1 \leq k \leq n} |z_k - z_{k-1}|$) entre deux points consécutifs z_{k-1} et z_k de C tend vers 0 (noter que $z_n = z_0$). D'autre part, l'intérieur du polygone P_n de sommets $z_0, z_1, \dots, z_n = z_0$ sera entièrement contenu dans D dès que Δ_n sera suffisamment petit. Comme $\oint_{P_n} f(z) dz = 0$, alors

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C f(z) dz - S_n + S_n - \oint_{P_n} f(z) dz.$$



Donc pour tout $\varepsilon > 0$ avec Δ_n suffisamment petit on aura

$$\begin{aligned}
 I &= \left| \oint_C f(z) dz \right| \leq \left| \oint_C f(z) dz - S_n \right| + \left| S_n - \oint_{\tilde{P}_n} f(z) dz \right| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) (z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \int_{[z_{k-1}, z_k]} f(z) dz \right| \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{k=1}^n \int_{[z_{k-1}, z_k]} f(z_k) - f(z) dz \right| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n \int_{[z_{k-1}, z_k]} |f(z) - f(z_k)| |dz| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2L_C} L_C = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

en vertu de la continuité uniforme de f . Ceci qui implique $I = 0$ et donc $\oint_C f(z) dz = 0$, ce qui établit le résultat demandé. ■

Exemple 48

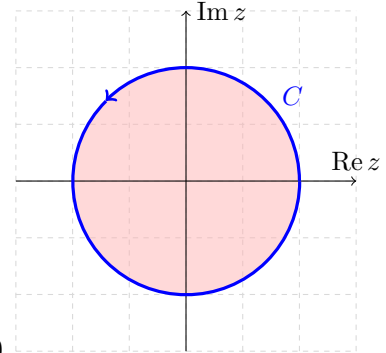
Soit le cercle de centre 0 et de rayon 2,

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2e^{it}\}.$$

Vérifier que $\oint_C z dz = 0$.

On a $dz = z'(t) dt = 2ie^{it} dt$, alors

$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} 2e^{it} (2ie^{it} dt) = 4i \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = [2e^{2it}]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0.$$

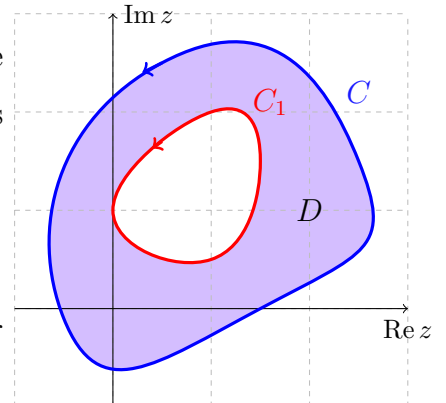


Théorème 52

Soit f une fonction **holomorphe** dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz.$$

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



Ce résultat montre que si nous désirons intégrer f le long d'une courbe C nous pouvons remplacer C par toute courbe C_1 pourvu que f soit holomorphe dans l'ouvert connexe compris entre C et C_1 .

Démonstration.

Effectuons la coupure E_1E_2 . La fonction f étant holomorphe dans D , nous avons d'après le théorème de Cauchy

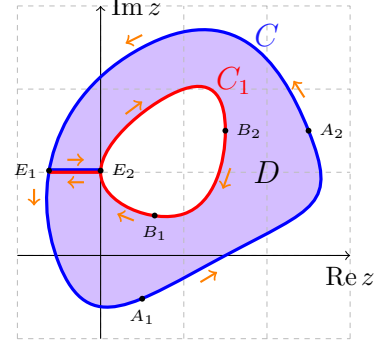
$$\oint_{E_1A_1A_2E_1E_2B_2B_1E_2E_1} f(z) dz = 0$$

ou

$$\oint_{E_1A_1A_2E_1} f(z) dz + \int_{E_1E_2} f(z) dz + \oint_{E_2B_2B_1E_2} f(z) dz + \int_{E_2E_1} f(z) dz = 0.$$

Comme $\int_{E_1E_2} f(z) dz = - \int_{E_2E_1} f(z) dz$, on déduit que

$$\oint_{E_1A_1A_2E_1} f(z) dz = - \oint_{E_2B_2B_1E_2} f(z) dz = \oint_{E_2B_1B_2E_2} f(z) dz \quad \text{ou} \quad \oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz. \quad \blacksquare$$



Exemple 49

Calculer $\oint_C \frac{1}{z} dz$, où C est l'ellipse définie par

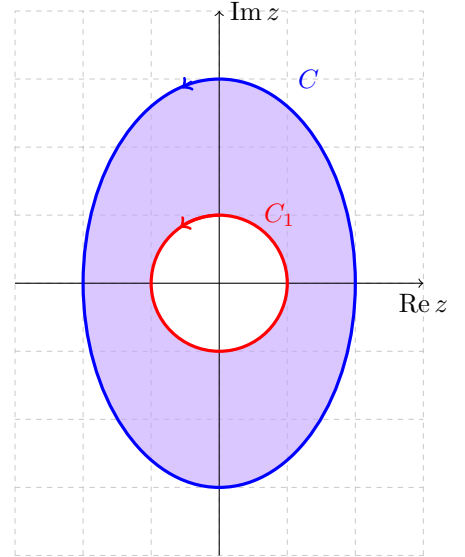
$$C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2 \cos t + 3i \sin t\}.$$

La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe dans le domaine limité par les courbes C et C_1 et sur ces courbes, où C_1 est le cercle de centre 0 et de rayon 1

$$C_1 = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = e^{it}\}.$$

Alors d'après la proposition précédente

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} d(e^{it}) = \int_0^{2\pi} i dt = [it]_0^{2\pi} = 2\pi i. \quad \blacksquare$$



Indice d'un point par rapport à une courbe fermée

Soient C une courbe fermée paramétrée par un chemin $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \notin C$. On appelle indice du point z_0 par rapport à C , le nombre

$$\text{Ind}(z_0, C) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Proposition 53

L'indice du point z_0 par rapport à courbe fermée C est toujours un nombre entier, i.e. $\text{Ind}(z_0, C) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On distingue deux cas possibles. Le premier cas, z_0 à l'extérieur de C . Dans ce cas la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C . Alors d'après le théorème de Cauchy $\text{Ind}(z_0, C) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z - z_0} dz = 0 \in \mathbb{Z}$.

Le deuxième cas, z_0 intérieur à C . Supposons que C fait k tours autour de z_0 et soit Γ_r un cercle de rayon r , centré en $z = z_0$, tel que Γ_r soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé car $z = z_0$ est un point intérieur].

D'après le théorème précédent

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma_r} \frac{1}{z - z_0} dz. \quad (3.2)$$

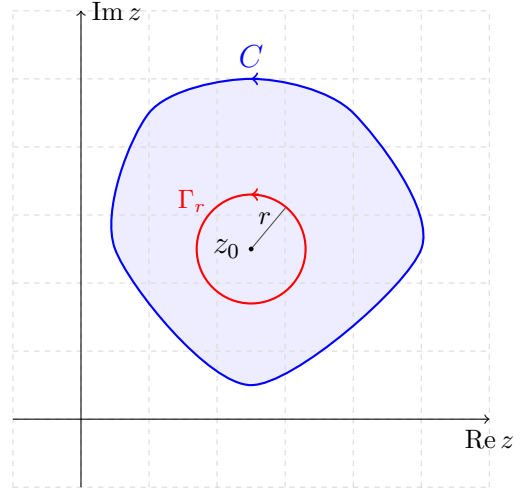
D'autre part le cercle Γ_r lorsque parcourt k tours autour

de z_0 , peut être paramétré par $t \mapsto z(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2k\pi]$. D'où tenant compte de $dz = ire^{it} dt$, on obtient

$$\text{Ind}(z_0, C) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2k\pi} \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2k\pi} dt = k \in \mathbb{Z},$$

qui est le résultat cherché. ■

Le nombre $\text{Ind}(z_0, C)$ désigne le nombre de tours que fait C autour de z_0 . Si k est positif, les tours se font dans le sens positif, sinon k est négatif.



3.3.3 Primitives et intégration

Si f et F sont **holomorphes** dans un domaine connexe D et telles que $F'(z) = f(z)$, alors F est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée ou primitive de f et est notée $F(z) = \int f(z) dz$.

Exemple 50

On a $\frac{d}{dz} (3z^2 - 4 \sin z) = 6z - 4 \cos z$, alors

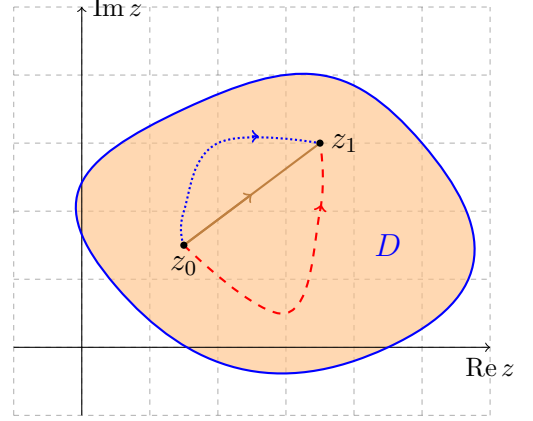
$$\int (6z - 4 \cos z) dz = 3z^2 - 4 \sin z + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

La fonction $z \mapsto 3z^2 - 4 \sin z$ est une primitive de $z \mapsto 6z - 4 \cos z$. ■

Théorème fondamental de l'intégration

Soient f et F deux fonctions **holomorphes** dans un domaine **connexe** D telles que $F'(z) = f(z)$. Si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D , alors pour toute courbe C de point initial z_0 et de point final z_1 , on a

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = [F(z)]_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).$$



Ce résultat est conséquence du théorème de Cauchy et signifie que si f est holomorphe alors la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin suivi pour aller de z_0 à z_1 .

Démonstration. Soient $z_0, z_1 \in D$ et C une courbe dans D de point initial z_0 et de point final z_1 . D'après le théorème de Cauchy

$$\int_C f(z) dz + \int_{[z_1, z_0]} f(z) dz = 0,$$

où $[z_1, z_0]$ est le segment de droite d'extrémités z_1 et z_0 . Alors

$$\int_C f(z) dz = \int_{[z_0, z_1]} f(z) dz = \int_{[z_0, z_1]} F'(z) dz.$$

Rappelons que $[z_0, z_1]$ est paramétré par la fonction $t \mapsto z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$, $0 \leq t \leq 1$.

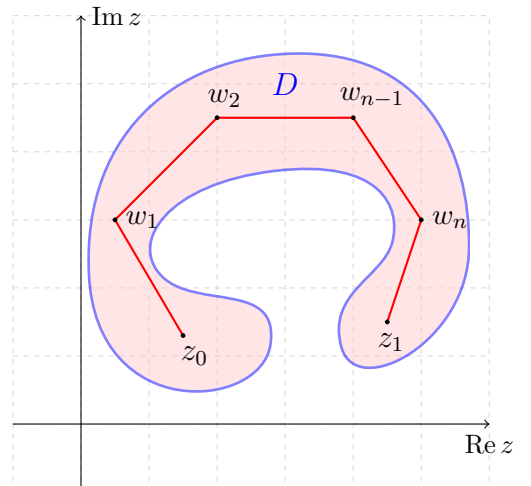
D'où

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{[z_0, z_1]} F'(z) dz = \int_0^1 F'(z_0 + (z_1 - z_0)t) (z_1 - z_0) dt \\ &= \left[F(z_0 + (z_1 - z_0)t) \right]_{t=0}^1 = F(z_1) - F(z_0). \end{aligned}$$

Si le segment de droite $[z_0, z_1]$ n'est pas inclus dans D , nous joignons z_0 avec z_1 par une ligne polygonale de sommets successifs $z_0, w_1, \dots, w_n$ et z_1 .

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{[z_0, w_1]} f(z) dz + \dots + \int_{[w_n, z_1]} f(z) dz \\ &= F(w_1) - F(z_0) + \dots + F(z_1) - F(w_n) \\ &= F(z_1) - F(z_0), \end{aligned}$$



qui est le résultat demandé. ■

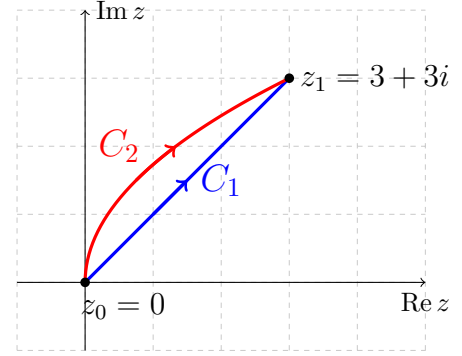
Exemple 51

Évaluer $\int_C 2z dz$ de $z_0 = 0$ à $z_1 = 3 + 3i$ le long de la parabole

$$C_1 = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 3] \text{ où } z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it\}$$

et le long du segment de droite

$$C_2 = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 1] \text{ où } z(t) = 3t + 3it\}.$$



Sur la parabole C_1 , on a $z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it$, $dz = z'(t) dt = (\frac{2}{3}t + i) dt$ et

$$\int_{C_1} 2z dz = \int_0^3 2 \left(\frac{1}{3}t^2 + it \right) \left(\frac{2}{3}t + i \right) dt = \left[\left(\frac{1}{3}t^2 + it \right)^2 \right]_0^3 = 18i.$$

Sur le segment C_2 , on a $z(t) = 3t + 3it$, $dz = z'(t) dt = (3 + 3i) dt$ et

$$\int_{C_2} 2z dz = \int_0^1 2(3t + 3it)(3 + 3i) dt = [(3t + 3it)^2]_0^1 = 18i.$$

Par le théorème fondamental de l'intégration $\int_C 2z dz = \int_0^{3+3i} 2z dz = [z^2]_0^{3+3i} = 18i$.

Nous observons comment il est plus facile d'évaluer ces intégrales en utilisant une primitive, au lieu de paramétrer les chemins d'intégration. ■

Une autre conséquence du théorème de Cauchy est la proposition suivante.

Théorème 54

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine **simplement connexe** D et soient a et z des points de D . Alors la fonction $z \mapsto F(z) = \int_a^z f(w) dw$ est holomorphe dans D et $F'(z) = f(z)$.

Ce théorème montre que si f est holomorphe, alors elle admet une primitive holomorphe. Ce résultat n'est pas valable pour les domaines multiplement connexes. En effet, par exemple la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais sa fonction primitive $z \mapsto F(z) = \text{Log } z$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. Soit h dans $\mathbb{C}^*$ tel que $z + h$ reste dans D . Nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \left(\int_a^{z+h} f(w) dw - \int_a^z f(w) dw \right) - f(z) = \frac{1}{h} \left(\int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw \right).$$

D'après le théorème de Cauchy, la dernière intégrale ne dépend pas du chemin joignant z à $z + h$ pourvu que l'on reste dans D . En particulier nous pouvons choisir comme chemin, le segment de droite d'extrémités z et $z + h$. Le nombre complexe h étant choisi suffisamment petit pour que le segment considéré appartienne à D .

La fonction f étant continue nous avons pour tout point w de ce segment de droite $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$, pourvu que $|w - z| < \delta$ ce qui est certainement réalisé si $|h| < \delta$.

De plus, on a $\left| \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw \right| < \varepsilon |h|$, et donc

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw \right| < \varepsilon \text{ pour } |h| < \delta.$$

Ceci revient à dire que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$, i.e. F est holomorphe avec $F'(z) = f(z)$. ■

Théorème de Morera

Contrairement aux fonctions d'une variable réelle, pas toutes les fonctions continues d'une variable complexe admettent des primitives holomorphes. Par exemple, la fonction $z \mapsto f(z) = z\bar{z}$ est continue dans $\mathbb{C}$ mais n'a pas de primitives holomorphes.

Il existe un résultat dû à Morera qui est souvent appelé la réciproque du théorème de Cauchy.

Théorème 55

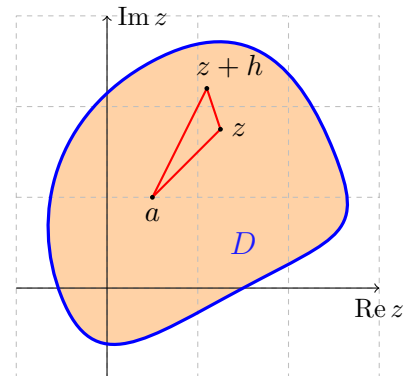
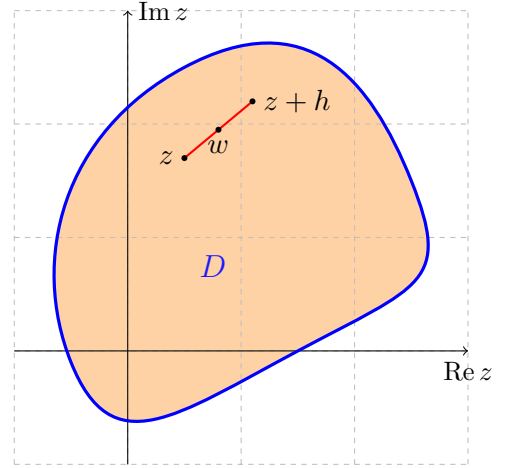
Soit f une fonction continue dans un domaine **simplement connexe** D , supposons que $\oint_T f(z) dz = 0$ pour tout triangle T dans D .

Alors f est holomorphe dans D et donc admet une primitive holomorphe dans D .

Démonstration.

Soit a un point fixé dans D . On définit la fonction F dans D par $F(z) = \int_a^z f(w) dw$. Soit h dans $\mathbb{C}^*$ tel que $z + h$ reste dans D .

Comme l'intégrale de f le long du triangle de sommets a, z et $z + h$ vaut zéro, i.e. $\int_a^z f(w) dw + \int_z^{z+h} f(w) dw + \int_{z+h}^a f(w) dw = 0$,



$$\text{alors } F(z+h) - F(z) = \int_a^{z+h} f(w) dw - \int_a^z f(w) dw = \int_z^{z+h} f(w) dw.$$

D'où

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw \right|.$$

La fonction f étant continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout w dans le segment de droite $[z, z+h]$,

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{pourvu que } 0 < |w - z| < \delta,$$

ce qui est réalisé si $|h| < \delta$. Nous avons donc

$$\frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (f(w) - f(z)) dw \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(w) - f(z)| |dw| < \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon.$$

Ce qui implique que la fonction F est holomorphe dans D , ainsi que sa fonction dérivée f . ■

Ce théorème peut être étendu aux ouverts multiplement connexes mais dans ce cas la primitive n'est pas nécessairement holomorphe dans D .

Exemple 52

On reprend l'exemple de la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais sa fonction primitive $z \mapsto F(z) = \text{Log } z$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. ■

Les résultats suivants sont des conséquence des théorèmes de Morera et celui de Cauchy.

Corollaire 56

Si f une fonction continue dans un domaine **connexe** D , alors f admet une primitive holomorphe dans D si et seulement si $\oint_C f(z) dz = 0$ pour toute courbe fermée C contenue ainsi que son intérieure dans D .

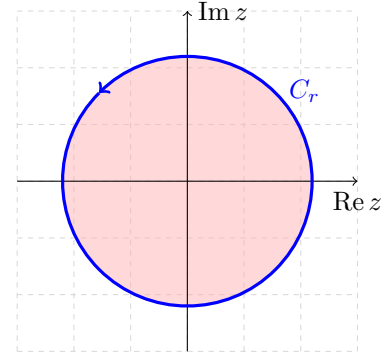
Corollaire 57

Si f une fonction continue dans un domaine **connexe** D , telle que il existe une courbe fermée C dans D dont l'intégrale $\oint_C f(z) dz$ est non nulle, alors la fonction f n'admet pas de primitives holomorphe sur D .

Exemple 53

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$.
 Si on intègre la fonction f le long du cercle $C_r, r > 0$ paramétré par le chemin $t \mapsto z(t) = re^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$, on trouve

$$\oint_{C_r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$



Puisque l'intégrale $\oint_{C_r} \frac{1}{z} dz$ est non nulle, on déduit que la fonction f n'admet pas de primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ malgré elle est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. ■

3.4 Formule intégrale de Cauchy

Soient f une fonction **holomorphe** dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée simple contenue ainsi que son intérieure dans D .

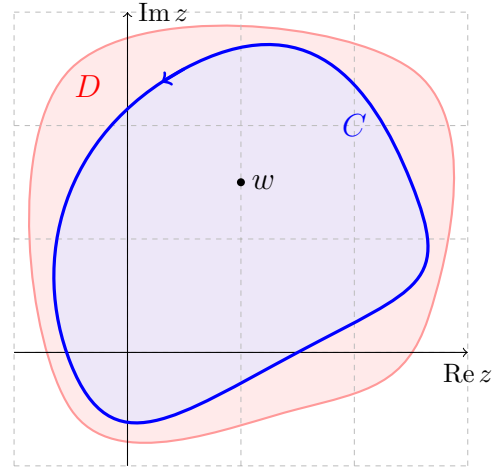
Si w est un point intérieur à C , alors

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

où la courbe C est décrite dans le sens direct.

De même la n -ième dérivée de f en w est donnée par

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



- La première formule peut être considérée comme un cas particulier de la deuxième si l'on pose $0! = 1$.
- Les deux formules précédentes sont appelées **formules intégrales de Cauchy** et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C .
- Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première dans un domaine simplement connexe D , toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D .
 Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Démonstration.

La fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{z-w}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C sauf au point $z = w$. D'après le théorème 52 page 47 nous avons

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz = \oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

où l'on peut prendre pour contour Γ_r un cercle centré en w et de rayon r suffisamment petit. L'équation de Γ_r s'écrit $|z-w| = r$ ou $z(t) = w + re^{it}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

On a donc $dz = ire^{it}dt$ et l'intégrale sur Γ_r devient

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(w + re^{it}) dt.$$

On a donc

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz = i \int_0^{2\pi} f(w + re^{it}) dt.$$

En prenant la limite des deux membres et en utilisant la continuité de f , on obtient

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz = i \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(w + re^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(w + re^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} f(w) dt = 2\pi i f(w).$$

On a donc le résultat demandé $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz$.

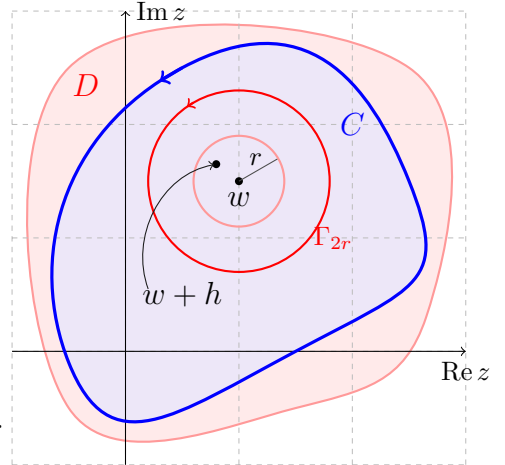
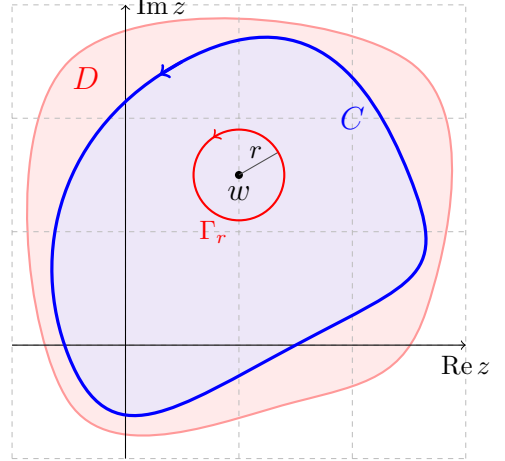
Maintenant, on va démontrer que f' existe et est donnée par $f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$.

Soit $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $w+h$ reste dans l'intérieur du cercle

Γ_r centré en w et de rayon r . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-w-h} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)^2} dz. \end{aligned}$$

Nous montrons que le dernier terme tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$.



D'après le théorème 52 page 47, on a

$$\frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)^2} dz = \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{2r}} \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)^2} dz$$

La fonction f étant holomorphe dans D , nous pouvons trouver un nombre positif M tel que $|f(z)| \leq M$. On a aussi $|z-w| = 2r$ et $|z-w-h| \geq |z-w| - |h| \geq 2r - r = r$. Alors

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{2r}} \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)^2} dz \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{M(2\pi \cdot 2r)}{r(2r)^2} = |h| \frac{M}{2r^2}.$$

Il en résulte que le premier membre tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$. On obtient alors le résultat cherché, i.e.

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz.$$

Par récurrence sur n , on voit par un raisonnement semblable que l'on a pour la n -ième dérivée $f^{(n)}$ et sous les mêmes hypothèses, la relation

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz.$$

Ce résultat est équivalent à

$$f^{(n)}(w) = \frac{d^n}{dw^n} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial^n}{\partial w^n} \left(\frac{f(z)}{z-w} \right) dz,$$

qui est une extension aux intégrales complexes de la règle de dérivation sous le signe $\oint$. ■

Exemple 54

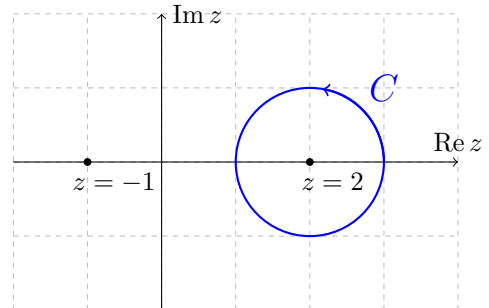
Utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz \text{ le long du cercle}$$

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2 + e^{it}\}.$$

La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z+1}$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C , alors d'après la formule intégrale de Cauchy avec $w = 2$, on a

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}\pi i. \quad \blacksquare$$



Exemple 55

Calculons l'intégrale $\oint_C \frac{1}{z^{n+1}(z-2)} dz$ le long du C le cercle unité qui est centré à l'origine et de rayon $r = 1$.

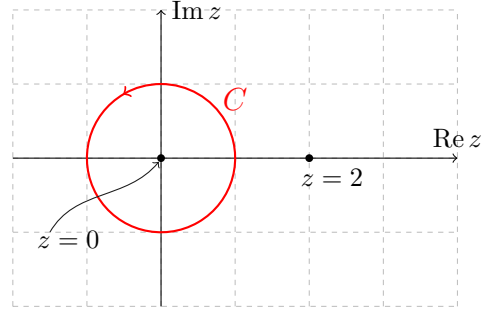
Observons que si on pose $f(z) = \frac{1}{z-2}$ on obtient une fonction holomorphe sur le disque fermé centré à l'origine et de rayon $r = 1$. D'après la deuxième formule intégrale de Cauchy la dérivée d'ordre n de f au point $z = 0$ est égale à $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$.

Donc on aura

$$\oint_C \frac{1}{z^{n+1}(z-2)} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{z-2} \right) \Big|_{z=0}.$$

Ainsi, puisque pour tout entier n on a $\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{z-2} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(z-2)^{n+1}}$ on en déduit que

$$\oint_C \frac{1}{z^{n+1}(z-2)} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(-2)^{n+1}} = -\frac{\pi i}{2^n}. \quad \blacksquare$$



3.4.1 Quelques théorèmes importants

Dans ce qui suit on énonce quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

Inégalité de Cauchy

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C , où C désigne le cercle d'équation $|z - z_0| = r$, alors

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

où M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C , i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C .

Démonstration. On a d'après les formules intégrales de Cauchy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Comme $|z - z_0| = r$ sur C et la longueur de C est $2\pi r$, alors on a

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M n!}{r^n},$$

qui est le résultat demandé. ■

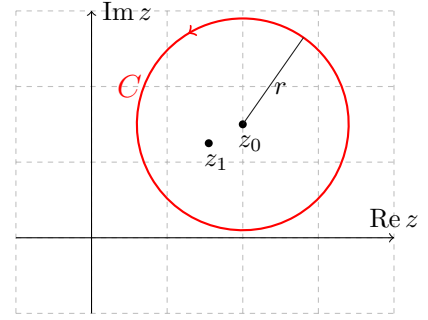
Théorème de Liouville

Une fonction f entière [holomorphe dans $\mathbb{C}$] et bornée [$|f(z)| < M$, où M désigne une constante] est nécessairement une constante.

Démonstration.

Soit z_0 et z_1 deux points quelconques du plan complexe $\mathbb{C}$. Considérons le cercle C de rayon r centré en z_0 et contenant le point z_1 . On a d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_1} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{z_1 - z_0}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_1)} dz. \end{aligned}$$



D'autre part $|z - z_0| = r$ sur C et

$$|z_1 - z_0| = |z - z_1| = |z - z_0 + z_0 - z_1| \geq |z - z_0| - |z_0 - z_1| = r - |z_0 - z_1| \geq \frac{r}{2}$$

si l'on choisit r suffisamment grand pour que $|z_0 - z_1| \leq \frac{r}{2}$. Alors tenant compte de $|f(z)| < M$ et de ce que la longueur de C est $2\pi r$, on a

$$|f(z_1) - f(z_0)| = \frac{|z_1 - z_0|}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_1)} dz \right| \leq \frac{|z_1 - z_0|}{2\pi} \cdot \frac{(2\pi r) M}{r \frac{r}{2}} = \frac{2|z_1 - z_0| M}{r}.$$

Faisant tendre r vers $+\infty$ on voit alors que $|f(z_1) - f(z_0)| = 0$ soit $f(z_1) = f(z_0)$ ce qui montre que f est une constante. ■

Théorème fondamental de l'algèbre (Théorème de D'Alembert)

Toute équation algébrique $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, possède au moins une racine.

De cela on déduit que $P(z) = 0$ possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

Démonstration. Si $P(z) = 0$ n'a pas de racine, alors $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ est entière (holomorphe dans $\mathbb{C}$). De plus est bornée (en fait tend vers 0) quand $|z| \rightarrow +\infty$.

Alors d'après le théorème précédent de Liouville f et donc P est constant. On est donc conduit à une contradiction et on en conclut que $P(z) = 0$ possède au moins une racine, ou comme on le dit quelquefois, P a au moins un zéro.

Soit α cette racine ; alors $P(\alpha) = 0$. D'où

$$P(z) - P(\alpha) = a_1(z - \alpha) + a_2(z^2 - \alpha^2) + \cdots + a_n(z^n - \alpha^n) = (z - \alpha)Q(z),$$

où Q est un polynôme de degré $(n - 1)$.

En procédant à nouveau comme précédemment, nous voyons que Q possède au moins un zéro que nous appellerons β [qui peut être égal à α], d'où $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)R(z)$. En continuant de cette manière on voit que P a exactement n zéros. ■

Théorème de Gauss sur la valeur moyenne

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - z_0| = r$ et sur C , alors $f(z_0)$ est la moyenne des valeurs de f sur C , i.e.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Démonstration. D'après la formule intégrale de Cauchy $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. Le cercle

C peut être paramétré par $z(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

qui est le résultat demandé. ■

Théorème du module maximum

Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , si de plus f n'est pas constante alors le maximum de $|f(z)|$ est atteint sur C .

Il y a plusieurs démonstrations différentes, nous allons présenter ici la démonstration qui est basée sur le théorème de Gauss sur la valeur moyenne.

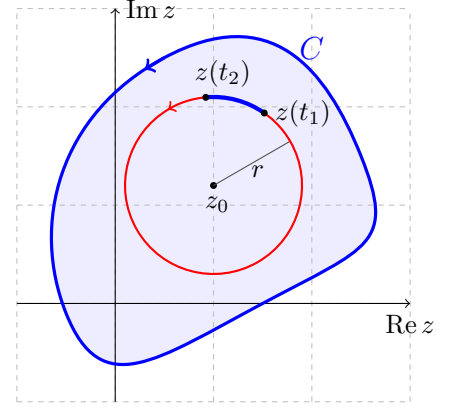
Démonstration.

Soit z_0 un point intérieur de C . D'après le théorème de Gauss sur la valeur moyenne, on a

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt.$$

Supposons que $|f(z_0)|$ soit un maximum, on a donc

$$|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|.$$



Si $|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)|$ pour une valeur de t , alors d'après la continuité de f cette inégalité est encore valable pour l'arc $\{z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [t_1, t_2]\}$. Mais dans ce cas on aura

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt < |f(z_0)|,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité ci-dessus. On en déduit que dans tout disque ouvert $D_r(z_0)$ contenu dans C , f est constante. Si f n'est pas constante, $|f(z)|$ atteint sa valeur maximum sur C . ■

Théorème du module minimum

Si f est une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , si de plus $f(z) \neq 0$ à l'intérieur de C alors $|f(z)|$ atteint son minimum sur C .

Démonstration. La fonction f étant holomorphe dans C et sur C , f ne s'annulant pas dans C , on en déduit que $\frac{1}{f}$ est holomorphe dans C . D'après le théorème du module maximum la fonction $\frac{1}{|f|}$ ne peut atteindre son maximum à l'intérieur de C et donc $|f|$ ne peut atteindre son minimum dans C . La fonction $|f|$ ayant un minimum, celui-ci est donc atteint sur C . ■

Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , f s'annulant en un point intérieur à C , alors $|f|$ n'atteint pas nécessairement sa valeur minimum sur C . En effet, si $f(z) = z$ pour $|z| \leq 1$, C est donc le cercle unité centré à l'origine. Nous avons $f(z) = 0$ en $z = 0$. Si $f(z) = re^{it}$, alors $|f(z)| = r$ et il est clair que la valeur minimum de $|f(z)|$ n'est pas atteinte sur C mais dans C pour $r = 0$, i.e. en $z = 0$.

Théorème de l'argument

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C . On a alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

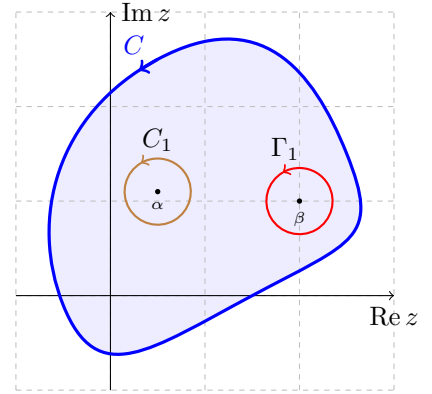
où N et P désignent respectivement le nombre de zéros comptés avec multiplicité et le nombre de pôles comptés avec leur ordre, de f intérieurs à C .

Démonstration.

D'abord, nous supposons que f est holomorphe à l'intérieur de C et sur C , à l'exception d'un pôle $z = \alpha$ d'ordre p , intérieur à C . Supposons également que dans C , f a un seul zéro $z = \beta$ de multiplicité n et aucun zéro sur C .

Démontrons que $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p$.

Soit C_1 et Γ_1 deux cercles extérieurs l'un à l'autre situés dans C , et contenant respectivement $z = \alpha$ et $z = \beta$. Alors



$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Le point $z = \alpha$ étant un pôle d'ordre p , donc $f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p}$, où F est holomorphe et différente de zéro dans et sur C_1 . En prenant la dérivée logarithmique de f on trouve

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha}.$$

Si bien que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{p}{z-\alpha} dz = 0 - p = -p.$$

Le point $z = \beta$ étant un zéro d'ordre n , $f(z) = (z-\beta)^n G(z)$, où $G(z)$ est holomorphe et différente de zéro dans et sur Γ_1 . Par dérivation logarithmique on obtient

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{n}{z-\beta}.$$

Si bien que

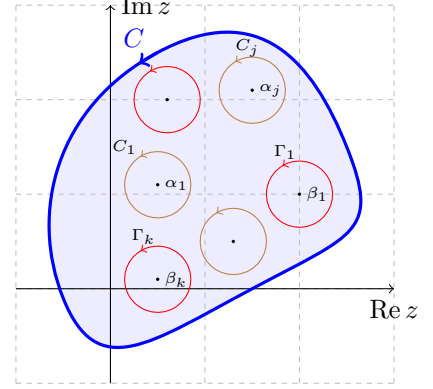
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{G'(z)}{G(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{n}{z-\beta} dz = 0 + n = n.$$

Dans ces conditions on trouve le résultat demandé

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p.$$

Maintenant, on démontre le théorème dans le cas général. On désigne respectivement par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ les pôles et les zéros de f situés à l'intérieur de C et l'on suppose que les ordres de multiplicité sont respectivement $p_1, p_2, \dots, p_j$ et $n_1, n_2, \dots, n_k$.

On entoure chaque pôle et chaque zéro par des cercles ne se recouvrant pas $C_1, C_2, \dots, C_j$ et $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Ceci peut toujours être réalisé car les pôles et les zéros sont isolés. On a donc



$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{l=1}^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_l} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{l=1}^j \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_l} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{l=1}^k n_l + \sum_{l=1}^j p_l = N - P,$$

ce qui démontre le théorème. ■

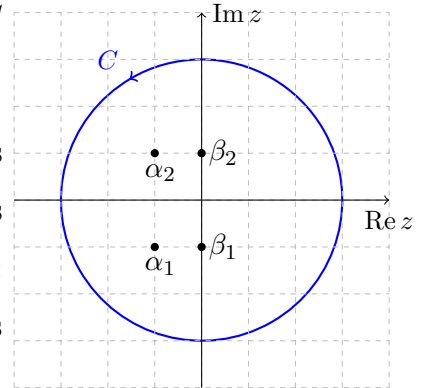
Remarque 58

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ qui est holomorphe sur le domaine D à l'exception de singularités isolées qui sont toutes des pôles pour f est dite fonction **méromorphe**.

Exemple 56

Calculons l'intégrale $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ où $f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{(z^2 + 2z + 2)^3}$ et C est le cercle $|z| = 4$.

La fonction f possède deux zéros doubles $\beta_1 = -i, \beta_2 = i$ [racines de $z^2 + 1$] et deux pôles triples en $\alpha_1 = -1 - i, \alpha_2 = -1 + i$ [racines de $z^2 + 2z + 2$]. Tous ces zéros et ces pôles sont intérieurs à C : $|z| = 4$. On a donc $N = 2 + 2 = 4$ et $P = 3 + 3 = 6$, alors d'après le théorème de l'argument $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P = 4 - 6 = -2$.



D'où $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -4\pi i$. ■

Théorème de Rouché

Si f et g sont holomorphes dans et sur une courbe fermée simple C , et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C , alors $f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C .

Démonstration. Soit $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ et donc $g(z) = f(z)F(z)$ ou $g = fF$. Alors si N_1 et N_2 désignant respectivement le nombre de zéros intérieurs à C de $f + g$ et f , on a d'après le théorème de l'argument, utilisant le fait que ces fonctions n'ont pas de pôles à l'intérieur de C ,

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(f' + g')(z)}{(f + g)(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(f' + f'F + fF')(z)}{(f + fF)(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F'(z)}{1 + F(z)} dz$$

et

$$N_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

On a donc

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F'(z)}{1 + F(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F'(z) (1 - F + F^2 - F^3 + \dots)(z) dz = 0,$$

utilisant le fait que $|F| < 1$ sur C si bien que la série est uniformément convergente sur C et l'intégration terme à terme donne la valeur zéro. On a donc l'égalité $N_1 = N_2$ ainsi qu'il était demandé. ■

Exemple 57

L'équation $z^3 + e^{-2+iz} = 0$ admet exactement trois racines de module strictement plus petit que 1, comme on le voit en appliquant le théorème de Rouché aux fonctions $f(z) = z^3$ et $g(z) = e^{-2+iz}$ sur le cercle $|z| = 1$. ■

3.5 Exercices

Exercice 3.1

Évaluer les intégrales $I = \int_C \bar{z} dz$ et $J = \int_C \cos z dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long de la courbe C dans les cas suivants :

- la courbe C est la parabole $x = y^2, 0 \leq y \leq 2$,
- la courbe C formée des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$,
- la courbe C est le segment de droite d'extrémités 0 et $4 + 2i$.

Discuter les résultats obtenus.

Exercice 3.2

Calculer les intégrales suivantes :

- a) $\int_C z^2 + z\bar{z}dz$, le long de $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$,
 b) $\int_C \operatorname{Re}(\sin z) \cos z dz$, le long de $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$,
 c) $\int_C \operatorname{Arg} z dz$, le long du cercle unité parcouru dans le sens positif.

Exercice 3.3

- a) Définir la détermination de la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ pour laquelle $\sqrt{1} = -1$, puis vérifier par deux méthodes différentes que $\int_C \frac{1}{\sqrt{z}} dz = 2(1-i)$, le long de $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
 b) Montrer que $\int_1^i \frac{1}{z} \operatorname{Log}^3 z dz = \frac{\pi^4}{64}$, où $\operatorname{Log} z$ est la détermination principale du logarithme.
 c) On considère la détermination de $z \mapsto \sqrt[4]{z}$ pour laquelle $\sqrt[4]{1} = 1$.

Vérifier que

$$\int_C \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}} dz = 2\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{2}i, \text{ le long de } C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Exercice 3.4

Soient $R > 0, n \in \mathbb{Z}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} z_0 = 0$. On pose

$$C_{R,z_0} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Calculer $I_{R,z_0} = \int_{C_{R,z_0}} (z - z_0)^n dz$ puis en déduire $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_{R,z_0}$.

Exercice 3.5

Évaluer $\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz$ où C désigne une courbe fermée simple et $z = z_0$ est
 a) à l'extérieur de C , b) à l'intérieur de C .

Exercice 3.6

En utilisant le lemme de Goursat [si f est holomorphe dans un domaine D , alors pour tout triangle T contenu ainsi que son intérieure dans D on a $\oint_T f(z) dz = 0$.], démontrer le théorème de Cauchy pour tout contour polygonal simple et fermé.

Exercice 3.7

Évaluer les intégrales $\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z+2} dz$, $\oint_{|z|=2} \frac{e^z+6}{z^2+9} dz$ et $\oint_{|z|=2} \frac{z+2}{2+\sin z} dz$.

Exercice 3.8

Soient D un domaine convexe dans $\mathbb{C}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f'(z)| \leq M$ dans D . Montrer que $|f(z_2) - f(z_1)| \leq M|z_2 - z_1|$ pour tout $z_1, z_2 \in D$.

Exercice 3.9

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et C une courbe fermée parcouru dans le sens positif et contenu ainsi que son intérieur dans D . Soient z_1 et z_2 deux points à l'intérieur de C . En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz$.
Qu'obtient-on lorsque $z_1 \rightarrow z_2$?

Exercice 3.10

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer

$$\begin{array}{llll} 1) \oint_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz & 2) \oint_{|z|=2} \frac{\text{Ch}(iz)}{z^2+4z+3} dz & 3) \oint_{|z|=1} \frac{\text{Sh}\left(\frac{\pi}{2}(i+z)\right)}{z^2-2z} dz & 4) \oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2+2z} dz \\ 5) \oint_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2} dz & 6) \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz & 7) \oint_{|z|=2} \frac{\text{Ch } z}{(z+1)^3(z-1)} dz & 8) \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)} dz. \end{array}$$

Exercice 3.11

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les intégrales

$$I_n = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz \text{ et } J_n = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} dz.$$

En déduire que $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \pi$. Obtenir aussi $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t dt$ et $\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} t dt$.

Exercice 3.12

- a) Soit f une fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) telle que $|f(z)| \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Montrer que f est constante.
- b) Montrer que tout polynôme non constant admet au moins une racine.

Exercice 3.13

- a) Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe admet un nombre fini de zéros $z_1, z_2, \dots, z_k$ avec multiplicités $n_1, n_2, \dots, n_k$. Montrer qu'il existe une fonction $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe qui ne s'annule pas dans D vérifiant $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{z-z_j}$ pour tout $z \in D$.
- b) Soit C une courbe fermée dans D ne contient aucun zéro de f . Montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=0}^k n_j \text{Ind}(z_j, C),$$

où $\text{Ind}(z_j, C) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-z_j} dz$ est le nombre de tours que fait C autour de z_j .

- c) *Application* : En déduire que $\oint_{|z|=2} \frac{2z^4 + 2z^3 + z^2 - 1}{(z+1)^2(z-1)} dz = 6\pi i$.

C^haPⁱt^re 4

Fonctions analytiques

Sommaire

4.1	Séries de fonctions	66
4.1.1	Généralités	66
4.1.2	Séries entières	71
4.1.3	Séries de Taylor	73
4.2	Fonctions analytiques	74
4.3	Prolongement analytique, principe des zéros isolés	77
4.4	Exercices	80

Après quelques rappels et compléments sur les séries de fonctions dans $\mathbb{C}$, nous pourrons enfin donner dans la section suivante le résultat fondamental de ce chapitre.

4.1 Séries de fonctions

4.1.1 Généralités

À partir d'une suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, nous formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z) = \sum_{k=0}^n u_k(z)$$

où $S_n(z)$ est appelée la $n^{\text{ième}}$ **somme partielle**, qui est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$.

La suite $\{S_n(z)\}$ est représentée par

$$u_0(z) + u_1(z) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$$

appelée **série infinie** de terme général $u_n(z)$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite **convergente** et $S(z)$ est sa somme ; dans le cas contraire la série est dite **divergente**.

Proposition 59

Une condition nécessaire pour que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge est que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(z) = 0$. Cependant cette condition n'est pas suffisante.

Démonstration. Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge, montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(z) = 0$.

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}(z) = S(z)$. On a

$$S_n(z) - S_{n-1}(z) = u_0(z) + \cdots + u_{n-1}(z) + u_n(z) - (u_0(z) + \cdots + u_{n-1}(z)) = u_n(z), \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(z) - S_{n-1}(z)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z) - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}(z) = S(z) - S(z) = 0.$$

La série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente bien qu'elle vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. ■

Proposition 60

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + ib_n)$ converge, a_n et b_n étant réels, est que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergent.

Domaine de convergence

Définition 61

- On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge en z_0 si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z_0)$ converge.
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite **simplement convergente** sur $U \subset \mathbb{C}$ si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge en tout z dans U .
- **Domaine de convergence** de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est

$$D = \left\{ z \in U \text{ tel que } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \text{ converge} \right\}.$$

Le domaine de convergence est souvent appelé domaine de définition.

Convergence absolue

Définition 62

Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est dite **absolument convergente** si la série des valeurs absolues, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$, converge.

Proposition 63

Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

En d'autres termes : $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge.

Démonstration. Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge, montrons que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = |u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n|$. Alors

$$S_n + T_n = u_0 + |u_0| + \cdots + u_n + |u_n| \leq 2|u_0| + \cdots + 2|u_n| = 2T_n.$$

Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge et que $u_n(z) + |u_n(z)| \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\{S_n(z) + T_n(z)\}$ est une suite bornée monotone croissante et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(z) + T_n(z))$ existe. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(z)$ existe [car par hypothèse la série est absolument convergente], alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(z) + T_n(z) - T_n(z)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(z) + T_n(z)) - \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(z),$$

existe également ce qui démontre la proposition. ■

Définition 64

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge mais $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$ ne converge pas, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est dite **semi convergente**.

Convergence uniforme

Définition 65

On dit qu'une suite de fonctions $\{u_n\}$ **converge uniformément** vers u sur $D \subset \mathbb{C}$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{z \in D} |u_n(z) - u(z)| \right) = 0.$$

Définition 66

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série de fonctions **converge simplement** vers S sur $D \subset \mathbb{C}$ et $\{S_n\}$ la suite des sommes partielles.

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \dots + u_n(z) = \sum_{k=0}^n u_k(z).$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ **converge uniformément** vers S sur D si la suite $\{S_n\}$ converge uniformément vers S dans D .

Théorème 67

La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue, i.e. si u_n est continue dans $D \subset \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est uniformément convergente dans D , alors $S(z)$ est continue dans D .

Démonstration. Si $S_n(z) = u_0(z) + \dots + u_n(z) = \sum_{k=0}^n u_k(z)$, et si $R_n(z) = u_n(z) + u_{n+1}(z) + \dots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(z)$ désigne le reste d'ordre n , il est clair que

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z) \text{ et } S(z+h) = S_n(z+h) + R_n(z+h),$$

et donc

$$S(z+h) - S(z) = S_n(z+h) - S_n(z) + R_n(z+h) - R_n(z),$$

où z et $z+h$ sont dans D . S_n désignant la somme d'un nombre fini de fonctions continues, donc est continue. Alors étant donné $\varepsilon > 0$ nous pouvons déterminer δ tel que

$$|S_n(z+h) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } |h| < \delta.$$

La série étant par hypothèse uniformément convergente on peut trouver n_0 tel que pour tout z dans D on a

$$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |R_n(z+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } n > n_0.$$

Alors on en déduit que

$$|S(z+h) - S(z)| \leq |S_n(z+h) - S_n(z)| + |R_n(z+h) - R_n(z)| < \varepsilon$$

pour $|h| < \delta$ et tout z dans D , ce qui établit la continuité. ■

Théorème 68

Si u_n est continue dans $D \subset \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est uniformément convergente dans D et si C est une courbe de D , alors

$$\int_C S(z) dz = \int_C \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_C u_n(z) dz.$$

En d'autres termes une série uniformément convergente de fonctions continues peut être intégrée terme à terme.

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème précédent, nous avons

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z)$$

et ces fonctions étant continues dans D et donc leurs intégrales existent, i.e.

$$\int_C S(z) dz = \int_C S_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz = \sum_{k=0}^n \int_C u_k(z) dz + \int_C R_n(z) dz.$$

Par hypothèse la série est uniformément convergente si bien que pour tout $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver un nombre n_0 indépendant de z dans D tel que $|R_n(z)| < \varepsilon$ pour $n > n_0$. Si l'on désigne par L la longueur de C nous avons

$$\left| \int_C R_n(z) dz \right| < \varepsilon L.$$

D'où

$$\left| \int_C S(z) dz - \int_C S_n(z) dz \right|$$

peut être rendu aussi petit qu'on le désire en choisissant n suffisamment grand, ce qui démontre le résultat. ■

On peut aussi démontrer le même théorème pour la dérivation terme à terme.

Théorème 69

Si $u'_n(z) = \frac{d}{dz} u_n(z)$ existe dans D , si $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(z)$ converge uniformément dans D et si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge dans D , alors $\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(z)$.

Convergence normale

Définition 70

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série de fonctions définie sur $D \subset \mathbb{C}$.

On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge **normalement** sur D si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty}$ est convergente, où $\|u_n\|_{\infty} = \sup_{z \in D} |u_n(z)|$.

Prouver la convergence normale de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sur D revient donc à trouver une inégalité $|u_n(z)| \leq w_n$ valable pour tout $z \in D$, où $(w_n)_n$ est une suite telle que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ converge.

L'intérêt de la notion de convergence normale réside dans l'implication :

convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme.

4.1.2 Séries entières

Définition 71

Une série de la forme

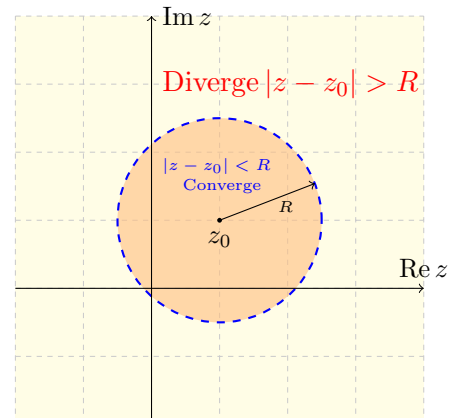
$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

est appelée **série entière** en $z - z_0$.

Rayon de convergence

Il existe un nombre positif R tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge pour $|z - z_0| < R$ et diverge pour $|z - z_0| > R$, cependant que pour $|z - z_0| = R$ elle peut ou non converger.

Géométriquement si C est le cercle de rayon R centré en z_0 , alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge en tous les points intérieurs à C et diverge en tous les points extérieurs ; elle peut ou non converger sur le cercle C .



Les valeurs spéciales $R = 0$ et $R = +\infty$ correspondent aux cas où $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniquement en $z = z_0$ ou converge pour toute valeur (finie) de z . Le nombre R est souvent appelé le **rayon de convergence** de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, le cercle $|z - z_0| = R$ est appelé le **cercle de convergence** et l'ensemble D des nombres complexes z tels que $|z - z_0| < R$ est appelé **disque de convergence** de la série entière.

Remarque 72

Le rayon de convergence d'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est caractérisé par :

1. $|z - z_0| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est absolument convergente.
2. $|z - z_0| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ diverge.
3. $|z - z_0| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
4. $|z - z_0| \leq r < R$ pour $r > 0$, la série est normalement convergente.

Proposition 73

Nous pouvons obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ par

$$\text{critère de d'Alembert : } R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ ou celui de Cauchy : } R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

si les limites existent.

Exemple 58

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, on a $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$.

Cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$, on a $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ et donc $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1$.

Cette série converge dans $|z| < 1$ et diverge en dehors i.e. $|z| > 1$. Sur le cercle $|z| = 1$, la série converge en certains points et diverge en d'autres points. ■

Proposition 74

- Une série entière peut être **dérivée** terme à terme dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du cercle de convergence.
- Une série entière peut être **intégrée** terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.

4.1.3 Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C . Alors

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \frac{h^2}{2!}f''(z_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \cdots.$$

ou en posant $z = z_0 + h$, $h = z - z_0$,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots.$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées **séries de Taylor** ou **développement de Taylor** de $f(z_0 + h)$ ou $f(z)$.

Le domaine de convergence de la dernière série est défini par $|z - z_0| < R$, le rayon de convergence R étant égal à la distance de z_0 à la singularité de f la plus proche. Sur $|z - z_0| = R$ la série peut ou non converger. Pour $|z - z_0| > R$ la série diverge.

Si la singularité la plus proche est à l'infini, le rayon de convergence $R = +\infty$, i.e. la série converge quel que soit z dans $\mathbb{C}$.

Si $z_0 = 0$, la série obtenue est souvent appelée série de Maclaurin.

Quelques séries particulières

La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad |z| < +\infty.$
2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad |z| < +\infty.$
3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad |z| < +\infty.$
4. $\operatorname{Log} z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots \quad |z| < 1.$
5. $\operatorname{Arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad |z| < 1.$
6. $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}z^n + \cdots \quad |z| < 1.$

Si $(1+z)^p$ est multiforme le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.

4.2 Fonctions analytiques

Définition 75

Une fonction f est analytique dans son domaine de définition D si pour tout z_0 dans D elle peut se développer en série entière dans un disque ouvert non vide centré en z_0 et inclus dans D selon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Théorème 76

Une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est holomorphe dans son disque de convergence, de dérivée $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

Démonstration. On se place pour la démonstration dans le cas non trivial où le rayon de convergence R de f est strictement positif. En translatant éventuellement z de z_0 on se ramène à montrer que $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe dans son disque de convergence

$$D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\},$$

de dérivée $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

La convergence de cette dernière série est assurée pour $z \in D$; en effet en choisissant alors r tel que $|z| < r < R$, il vient

$$n |z|^{n-1} = \frac{n}{r} \left(\frac{|z|}{r} \right)^{n-1} r^n \leq K r^n, \quad K > 0,$$

puisque pour $\alpha < 1$, le terme $n \alpha^{n-1}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. On en déduit

$$n |a_n| |z|^{n-1} \leq K |a_n| r^n,$$

et donc h a un rayon de convergence au moins égal à R .

En fixant toujours $0 < r < R$, formons pour u et v de module inférieur à r , $u \neq v$:

$$\frac{g(v) - g(u)}{v - u} - h(u) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\frac{v^n - u^n}{v - u} - n u^{n-1} \right).$$

En utilisant l'identité $v^n - u^n = (v - u) \sum_{j=0}^{n-1} v^{n-1-j} u^j$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{v^n - u^n}{v - u} - nu^{n-1} &= \sum_{j=0}^{n-1} (v^{n-1-j} u^j - u^{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} u^{j-1} (v^{n-j} - u^{n-j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} u^{j-1} (v - u) \sum_{k=1}^{n-j} v^{n-j-1-k} u^k. \end{aligned}$$

En prenant le module, il vient

$$\left| \frac{v^n - u^n}{v - u} - nu^{n-1} \right| \leq |v - u| \sum_{j=1}^{n-1} r^{j-1} (n - j) r^{n-j-1} = |v - u| \frac{1}{2} n(n-1) r^{n-2}.$$

D'où

$$\left| \frac{g(v) - g(u)}{v - u} - h(u) \right| \leq \frac{1}{2} |v - u| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |a_n| r^{n-2}.$$

La série qui apparaît correspond aux modules de la dérivée seconde de g , elle converge donc puisque $r < R$.

On en déduit immédiatement $\lim_{\substack{v \rightarrow u \\ v \neq u}} \frac{g(v) - g(u)}{v - u} = h(u)$, qui est le résultat demandé. ■

Par une récurrence immédiate, on obtient alors le théorème suivant.

Théorème 77

Une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est indéfiniment dérivable dans son disque de convergence, de dérivée k -ième

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Remarquons que ceci implique en particulier $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$ pour $k \geq 0$.

Corollaire 78

D'après le théorème précédent, une fonction analytique est holomorphe.

La réciproque du corollaire précédent est fausse pour les fonctions d'une variable réelle. En effet, si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$, i.e. les dérivées successives en 0 de tout ordre sont nulles. Donc si elle possède en 0 une série de Taylor, elle sera identiquement nulle, ceci contredit la

définition de la fonction f , qui n'est jamais nulle, sauf en 0. Alors f n'est pas analytique en 0 (bien qu'elle soit de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$).

Mais pour les fonctions complexes on a le théorème suivant.

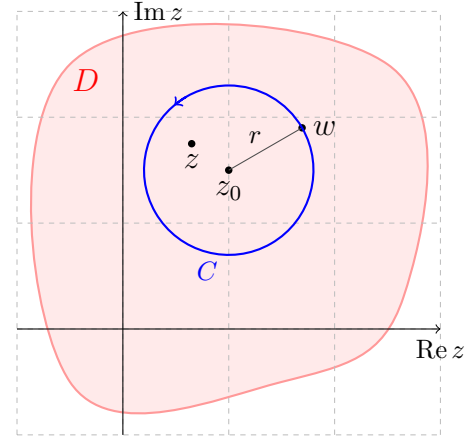
Théorème 79

Si D un ouvert dans $\mathbb{C}$, alors toute fonction f holomorphe dans D est analytique dans D .

Démonstration.

Soit f holomorphe dans D . La propriété qui va permettre le développement en série entière la fonction f autour de z_0 élément quelconque de D est la formule intégrale de Cauchy. Choisisant un cercle C centré en z_0 et contenue ainsi que son intérieure dans D , on écrit la formule intégrale de Cauchy pour un point quelconque z de l'intérieur de C :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw.$$



Notant r le rayon de C , on a alors $|z - z_0| < |w - z_0| = r$ ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Cette dernière série étant uniformément convergente pour $w \in C$ car $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$, ce qui nous permet d'intervertir les signes somme et intégrale :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

En posant $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$, on obtient le résultat demandé $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.

D'autre part, d'après la formule intégrale de Cauchy $a_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ et

$$\text{donc } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n. \quad \blacksquare$$

On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 80

Pour qu'une fonction f définie dans un ouvert D soit analytique dans D , il faut et il suffit que f soit holomorphe dans D . On peut alors la développer en série de Taylor autour de tout point z_0 de D selon $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Le rayon de convergence de cette série étant au moins égal à la distance de z_0 au bord de D . De plus, pour toute courbe fermée simple C de D entourant z_0 on a $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

4.3 Prolongement analytique, principe des zéros isolés

Les fonctions analytiques d'une variable réelle peuvent être prolongées analytiquement par de nombreuses façons aux fonctions définies sur un domaine plus large, i.e. elles admettent plusieurs prolongements analytiques possibles. Contrairement aux fonctions d'une variable complexe, si elles admettent un prolongement analytique, on verra qu'il sera unique.

Proposition 81

Soit D un domaine (i.e. un ouvert connexe) de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur D , on a alors équivalence entre les propriétés suivantes :

- (P1) f est identiquement nulle sur D ,
- (P2) f est identiquement nulle sur un disque ouvert non vide inclus dans D ,
- (P3) il existe $z_0 \in D$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$.

Démonstration. Il est clair que (P1) $\Rightarrow$ (P2) $\Rightarrow$ (P3), il s'agit donc de montrer que (P3) implique (P1). Soit $E = \{z \in D \text{ tel que } f^{(n)}(z_0) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$, E est non vide car il contient z_0 et E est un fermé de D car f et ses dérivées sont continues. Ainsi, si nous montrons que E est ouvert nous pourrions déduire de la connexité de D que $E = D$ si bien que f est identiquement nulle sur D . Soit donc $z \in E$, comme f est analytique, il existe $r > 0$ tel que sur $D_r(z)$, la fonction f est égale à sa série de Taylor en z , laquelle est nulle car $z \in E$ et donc f et toutes ses dérivées sont nulles sur $D_r(z)$ ce qui fait que E est ouvert. ■

L'hypothèse de connexité est évidemment fondamentale : si D est réunion de deux disques ouverts disjoints la fonction valant 0 sur le premier disque et 1 sur le second est analytique sur D , nulle sur un ouvert mais pas sur D .

On déduit immédiatement de la proposition précédente :

Théorème 82 (Principe d'identité)

Si f et g sont analytiques sur le domaine D et si $f = g$ sur un ouvert alors $f = g$ sur D .

On a vu qu'une fonction analytique sur un domaine qui s'annule au voisinage d'un point est nulle partout, en fait on a un résultat beaucoup plus fort qui nous dit que si une fonction analytique s'annule sur un ensemble ayant des points d'accumulation, alors elle est identiquement nulle.

Théorème 83 (Principe des zéros isolés)

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle, alors les zéros de f (i.e. les points en lesquels f s'annule) sont isolés.

Démonstration. Soit $z_0 \in D$ tel que $f(z_0) = 0$, comme f n'est pas identiquement nulle sur D , il résulte de la proposition précédente qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, soit n_0 le plus petit n pour lequel $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Il existe $r > 0$ tel que $D_r(z_0) \subset D$ et pour tout $z \in D_r(z_0)$, on ait

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} \left(b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \right) = (z - z_0)^{n_0} (b_0 + g(z)),$$

où $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$ avec $b_0 \neq 0$ et $g(z)$ est de rayon de convergence au moins r . Comme $g(z_0) = 0$ et g est continue, il existe $\delta < r$ tel que $|g(z)| < |b_0|$ pour tout $z \in D_\delta(z_0)$ de sorte que f ne s'annule pas sur $D_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$. On a bien montré que les zéros de f sont isolés. ■

Exemple 59

La fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin \frac{1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases},$$

ne peut pas être analytique en 0 car l'ensemble des zéros de f , qui sont $z_0 = 0$ et $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$, admet un point d'accumulation. ■

Théorème 84 (Principe du prolongement analytique)

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions analytiques de D dans $\mathbb{C}$, si $f = g$ sur un sous-ensemble de D ayant un point d'accumulation dans D alors $f = g$ sur D .

Démonstration. L'ensemble des zéros de $f - g$ possède un point d'accumulation dans D et donc les zéros de $f - g$ ne sont pas isolés, comme $f - g$ est analytique et D un domaine, il résulte du principe des zéros isolés que $f = g$ sur D . ■

Notons les cas particuliers suivants :

- Si f et g sont analytiques sur le domaine D , $z \in D$ et $f(z_n) = g(z_n)$ où (z_n) est une suite de points de $D \setminus \{z_0\}$ convergeant vers $z \in D$ alors $f = g$ sur D .
- Si f et g sont analytiques sur le domaine D et coïncident sur un segment $[a, b]$, $a \neq b$, inclus dans D alors $f = g$ sur D .
- Si f et g sont entières i.e. analytiques sur $\mathbb{C}$ et si $f = g$ sur $\mathbb{R}$ (ou sur $i\mathbb{R}$ ou sur une droite, ou sur un segment ou un cercle ou une courbe continue non réduite à un point ou plus généralement sur un ensemble possédant un point d'accumulation) alors $f = g$ sur le domaine complexe $\mathbb{C}$.

Le théorème précédent justifie la notion très importante de prolongement analytique, qui se formule dans les termes suivants : si f analytique dans un domaine D est donnée, existe-t-il une fonction g analytique définie dans un domaine V strictement plus grand que D telle que g coïncide avec f sur D ?

Corollaire 85

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique de D dans $\mathbb{C}$. Si f admet un prolongement analytique en une fonction définie sur un domaine strictement plus grand que D , alors il est unique.

Exemple 60

Soit f la fonction définie sur $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et soit g la fonction définie sur $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $g(z) = \frac{1}{1-z}$.

On a $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in D_1$. Alors d'après le corollaire précédent, la fonction g est l'unique prolongement analytique de f sur D_2 . ■

Corollaire 86

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine symétrique par rapport à l'axe réel et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique, réelle sur l'axe réel i.e. si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$. Alors

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z).$$

Démonstration. La fonction $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe dans D , et donc analytique. En effet,

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right)} \rightarrow \overline{f'(\bar{z}_0)} \text{ lorsque } z \rightarrow z_0.$$

Comme elle coïncide avec f sur l'axe réel i.e. $g(x) = \overline{f(x)} = f(x)$, elle coïncide avec f partout dans D . ■

Exemple 61

Par exemple $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ et $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ dans $\mathbb{C}$. ■

4.4 Exercices

Exercice 4.1

Déterminer le domaine de convergence des séries

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} n! z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}.$$

Exercice 4.2

Que peut-on dire de la convergence uniforme des séries suivantes dans les régions indiquées?

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}, |z| \leq 1; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}, 1 < |z| < 2; \\ \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nz)}{n^3}, |z| \leq 1; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{1 - z^n}, |z| < 1. \end{aligned}$$

Exercice 4.3

Déterminer le rayon de convergence et la nature pour $|z| = R$ des séries entières suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\text{Log} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \right) z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} z^n, a \neq 0, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n + n} z^{3n-1}.$$

Exercice 4.4

Soit $f(z) = \text{Log}(1+z)$, où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour $z = 0$.

- Développer f en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.
- Déterminer le domaine de convergence de la série de (a).
- Développer $\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

Exercice 4.5

Soit f une fonction définie et continue sur une courbe fermée simple C . Montrer que la fonction g définie par $g(z) = \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw$ est analytique en tout point intérieur à C .

Exercice 4.6

Soit f une fonction analytique dans le disque $|z| < 1$. Trouver une condition suffisante pour que la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ soit analytique dans $|z| < 1$.

Exercice 4.7

- Soit $z \mapsto S_n(z)$ continue continue sur $|z| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\{S_n\}$ converge uniformément vers S dans $|z| = 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |S_n(e^{it})|^2 dt = \int_0^{2\pi} |S(e^{it})|^2 dt$.
- Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est analytique dans $|z| \leq 1$, montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2$.

Indication. Noter que si $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, alors

$$|S_n(z)|^2 = S_n(z) \overline{S_n(z)} = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n) (\overline{a_0} + \overline{a_1} \bar{z} + \cdots + \overline{a_n} \bar{z}^n) \text{ et } \int_{|z|=1} z^n \bar{z}^m \frac{dz}{z} = 0, n \neq m.$$

Exercice 4.8

Déterminer dans les cas suivants les fonctions analytiques sur le disque ouvert $|z| < 1$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, **a)** $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, **b)** $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, **c)** $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{-1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}$, **d)** $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$.

Exercice 4.9

Soit f la fonction définie sur le disque ouvert $|z| < 1$ par $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$. Montrer que f est analytique sur $|z| < 1$. Quels sont ses zéros sur le disque $|z| < 1$? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 4.10

Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ et $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } f(z) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros.

- a) Donner un exemple de fonction non constante telle que $Z(f) = \emptyset$.
- b) Donner un exemple de fonction non constante telle que $Z(f)$ est infini.
- c) Montrer que pour tout compact K , $Z(f) \cap K$ est fini.
- d) Montrer que $Z(f)$ est dénombrable.

Exercice 4.11

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$. Soient f et g deux fonctions analytiques sur D telles que $f(z)g(z) = 0$ pour tout $z \in D$. Montrer que f ou g est identiquement nulle.

Exercice 4.12

Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ et $L = \{z_0 + tb, t \in \mathbb{R}\}$, où $b \in \mathbb{C}^*$. Soit f une fonction continue sur D et analytique sur $D \setminus L$. Montrer que f est analytique sur D .

Exercice 4.13

Soit f une fonction analytique sur $H^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$, continue et bornée sur $\overline{H^+} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ et ne prenant que des valeurs réelles sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 4.14

Soit f une fonction analytique sur le disque ouvert $|z| < r, r > 1$ et ne prenant que des valeurs réelles sur le cercle unité $|z| = 1$. Que peut-on dire de f ?

Chapitre 5

Séries de Laurent, Théorème des résidus

Sommaire

5.1	Séries de Laurent	83
5.1.1	Classification des singularités	86
5.2	Résidus	88
5.2.1	Calcul des résidus	89
5.3	Le théorème des résidus	91
5.4	Application du théorème des résidus	93
5.4.1	Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales	93
5.4.2	Application aux transformées de Fourier	94
5.4.3	Calcul d'intégrales définies diverses	97
5.5	Exercices	103

5.1 Séries de Laurent

Définition 87

Une série des puissances de la forme

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \dots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \dots\end{aligned}$$

s'appelle **série de Laurent** centrée au point $z_0 \in \mathbb{C}$.

La série des puissances négatives

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots$$

s'appelle la **partie principale**.

La série des puissances positives

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \dots$$

s'appelle la **partie régulière ou analytique**.

Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

On dira que la série de Laurent converge si ses parties principale et analytique convergent.

Théorème 88 (de Laurent)

Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre z_0 et de rayons respectifs R_1 et R_2 .

On suppose que f est uniforme et **holomorphe** sur C_1 et C_2 et également dans la couronne D [ou région annulaire D] limitée par C_1 et C_2 .

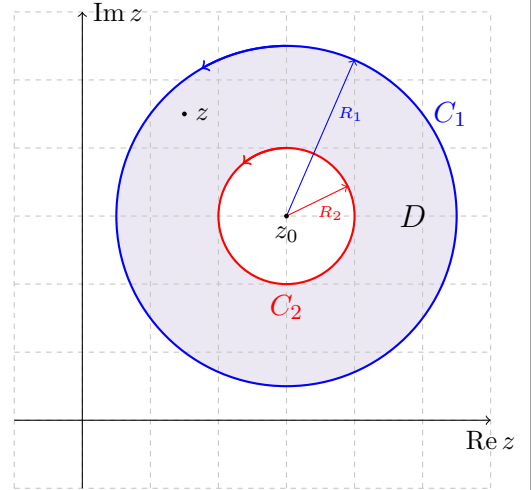
Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.

Alors la fonction f se développe de manière unique en série de Laurent centrée au point z_0 i.e.

$$\text{pour tout } z \in D, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (5.1)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{avec } C = C_1 \text{ ou } C_2.$$



Démonstration. D'après la formule intégrale de Cauchy, pour tout $z \in D$, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Notons que pour tout $w \in C_1$ on a $|z - z_0| < |w - z_0| = R_1$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Cette dernière série étant uniformément convergente dans C_1 , ce qui nous permet d'intervertir les signes somme et intégrale :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

De la même façon que ci-dessus, en notant que pour tout $w \in C_2$ on a $R_2 = |w-z_0| < |z-z_0|$, on peut écrire alors

$$\frac{-1}{w-z} = \frac{1}{z-z_0-(w-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}.$$

Et donc

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f(w) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} dw = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw.$$

On en déduit que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

qui est le résultat demandé.

Noter que l'expression des coefficients an de la série de Laurent trouvée implique que les a_n ne dépendent que de $f(z)$ et donc ils sont uniques. ■

Exemple 62

Déterminons le développement en série de Laurent de la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right)$

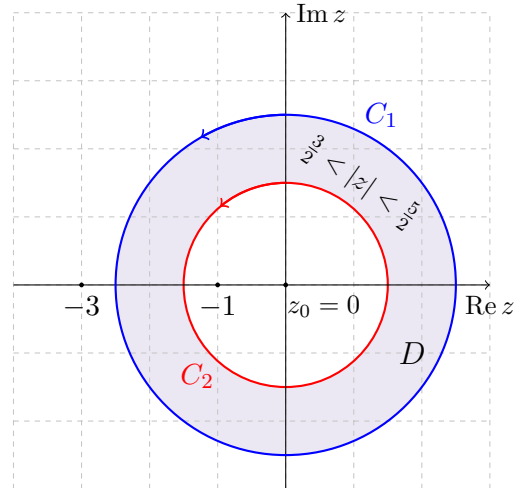
dans la couronne $D = \{z \in \mathbb{C}, \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\}$.

La fonction f est holomorphe dans D et sur sa frontière, car les singularités -1 et -3 sont à l'extérieur D .

Donc f admet un développement en série de Laurent centré à l'origine $z_0 = 0$.

Si $|z| > \frac{3}{2} > 1$, on a

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots$$



Si $|z| < \frac{5}{2} < 3$, on a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \dots$$

Alors dans la couronne $D = \{z \in \mathbb{C}, \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\}$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right) = \dots - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \dots \quad \blacksquare$$

Exemple 63

Développons en série de Laurent la fonction de l'exemple précédent

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

mais dans le disque pointé de $z_0 = -1$,

$$D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z+1| < 1\}.$$

Notons que pour tout $0 < |z+1| < 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+1+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z+1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^n.$$

D'où

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^{n-1} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \dots \quad \blacksquare$$

Exemple 64

Développons en série de Laurent la fonction $z \mapsto f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ dans $\mathbb{C}^*$.

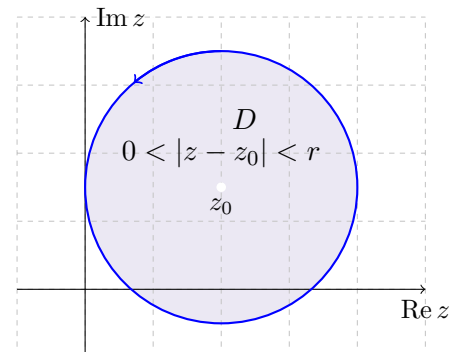
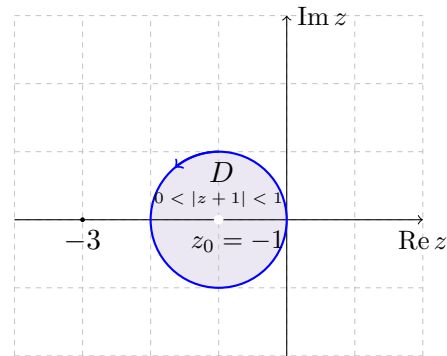
Rappelons que $e^w = \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!}$, $w \in \mathbb{C}$, alors pour $w = \frac{1}{z}$ on a

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! z^n} = \dots + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 1. \quad \blacksquare$$

5.1.1 Classification des singularités

Le point z_0 est appelé **singularité isolée**, ou **point singulier isolé** de f , si la fonction f est holomorphe sur un disque pointé de z_0 , $D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < r\}$, $r > 0$.

Il est possible de classer les singularités **isolées** d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent.



Pôles

Si f à la forme (5.1) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = z_0$ est appelé un **pôle d'ordre n** .

Si $n = 1$ on a affaire à un **pôle simple**.

Si $z = z_0$ est un pôle de f alors $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Exemple 65

La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ de l'exemple 63 présente un pôle simple au point $z_0 = -1$. ■

Singularités apparentes

Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = z_0$ mais si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, alors $z = z_0$ est appelée une **singularité apparente**. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = z_0$ comme étant égal à $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Exemple 66

Si $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ alors $z = 0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On définit $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left\{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots. \quad \blacksquare$$

Singularités essentielles

Si f est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une **singularité essentielle**. Si $z = z_0$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une **infinité de terme**.

Exemple 67

Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots,$$

on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle. ■

Singularités à l'infini

En posant $z = \frac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w = 0$.

Exemple 68

La fonction $z \mapsto f(z) = z^3$ a un pôle triple en $z = \infty$ car $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$ possède un pôle triple en $z = 0$. ■

Exemple 69

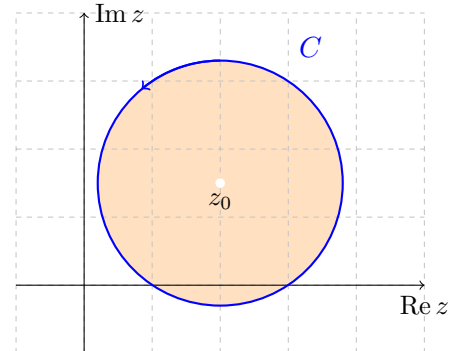
De la même façon $z \mapsto f(z) = e^z$ possède une singularité essentielle en $z = \infty$ car

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$$

a une singularité essentielle en $w = 0$. ■

5.2 Résidus

Soit f une fonction holomorphe et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C , **excepté** au point $z = z_0$ centre de C . Alors comme nous l'avons vu dans la section précédente, f possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$, donné par



$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = & a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \\ & + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \cdots \end{aligned} \quad (5.2)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.3)$$

Dans le cas particulier $n = -1$ on a

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (5.4)$$

Observons que l'intégrale $\oint_C f(z) dz$ s'exprime à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (5.2).

On peut obtenir formellement (5.4) à partir de (5.2) par intégration terme à terme en utilisant

le résultat

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^p} dz = \begin{cases} 2\pi i & p = 1 \\ 0 & p \in \mathbb{Z}, p \neq 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Définition 89

Avec les notations ci-dessus, le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de z_0 s'appelle le **résidu** de f au point z_0 et se note

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

5.2.1 Calcul des résidus

Pour obtenir le résidu d'une fonction f en $z = z_0$ on pourrait croire d'après (5.2) à la nécessité d'écrire le développement de f en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$. Dans beaucoup de cas on peut déterminer le résidu sans passer par le développement de Laurent.

Pôle simple

Si $z = z_0$ est un pôle simple le calcul du résidu est particulièrement simple

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (5.6)$$

Exemple 70

Trouver le résidu de $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ en $z = 1$.

Le point $z = 1$ est un pôle simple et le résidu en $z = 1$ est

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \left\{ \frac{z+1}{(z+2)(z-1)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{z+2} = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

Remarque 90

Si $z = z_0$ est un pôle simple et $f(z)$ se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0 \text{ et } Q'(z_0) \neq 0,$$

alors en utilisant la règle de L'Hôpital, nous avons

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (5.7)$$

Exemple 71

Trouver le résidu de $f(z) = \frac{e^{z+1}}{z^3 + 1}$ en $z = -1$.

Le point $z = -1$ est un pôle simple et le résidu peut être calculé par la formule (5.7) :

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{e^{z+1} \Big|_{z=-1}}{(z^3 + 1)' \Big|_{z=-1}} = \frac{e^{z+1} \Big|_{z=-1}}{3z^2 \Big|_{z=-1}} = \frac{e^{1-1}}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

Pôle d'ordre $m \geq 2$

Dans le cas où $z = z_0$ est un **pôle d'ordre $m \geq 2$** , le résidu a_{-1} est donné par la formule

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}. \quad (5.8)$$

En effet, si z_0 est pôle d'ordre m de f , alors le développement en série de Laurent de f est

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \\ + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $(z - z_0)^m$, on a

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1} (z - z_0) + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{m-1} + a_0 (z - z_0)^m + \dots,$$

qui représente la série de Taylor de la fonction analytique du premier membre.

Par dérivation des deux membres $m - 1$ fois par rapport à z , on obtient

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} = (m-1)! a_{-1} + \frac{m!}{1!} a_0 (z - z_0) + \frac{(m+1)!}{2!} a_1 (z - z_0)^2 + \dots.$$

Soit en faisant tendre z vers z_0

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} = (m-1)! a_{-1},$$

d'où l'on déduit le résultat cherché.

Si $m = 2$ (**pôle double**) le résultat est

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \{(z - z_0)^2 f(z)\}. \quad (5.9)$$

Exemple 72

Trouver le résidu de $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ en $z = -1$.

Le point $z = -1$ est un pôle double et on a d'après (5.9)

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Point singulier essentiel

Si $z = z_0$ est un **point singulier essentiel**, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

Exemple 73

Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, alors $z = 0$ est un point singulier essentiel et d'après le développement connu

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots,$$

avec $u = -\frac{1}{z}$, on trouve

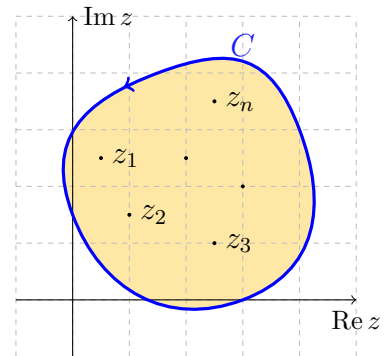
$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots,$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ sa valeur est -1 . ■

5.3 Le théorème des résidus

Soit f une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en un nombre fini de singularités $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ intérieures à C .

Alors le théorème des résidus établit que :



Théorème 91

L'intégrale de f le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de f en les singularités contenues dans C , i.e.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

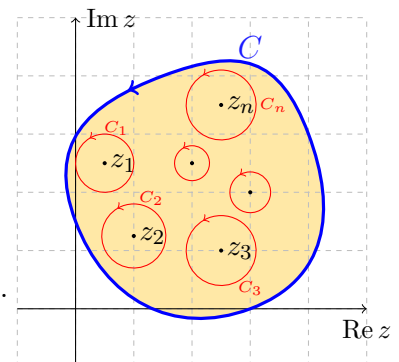
Notons que le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce théorème.

Démonstration.

On construit les cercles $C_1, C_2, \dots, C_n$ centrés en $z_1, z_2, \dots, z_n$ et situés entièrement à l'intérieur de C .

D'après le théorème 52 page 47 on a

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$



Mais d'après la formule (5.4), $\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Alors on déduit que

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) = 2\pi i \cdot \text{la somme des résidus de } f \text{ dans } C,$$

qui est le résultat demandé. ■

La démonstration précédente établit le théorème des résidus pour des domaines simplement connexes contenant un nombre fini de singularités de f . On peut l'étendre à des domaines contenant une infinité de singularités isolées de f ou étant multiplement connexes.

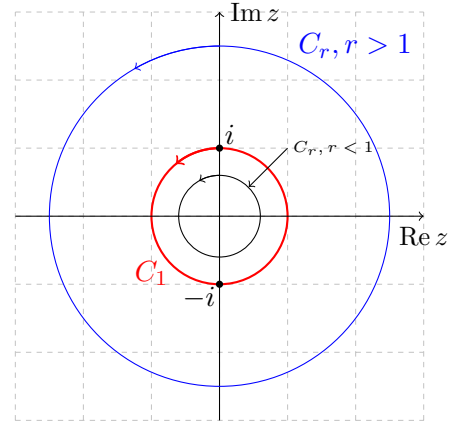
Exemple 74

Calculer $\oint_{C_r} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1}$ et C_r le cercle centré à l'origine et de rayon r , $r \neq 1$.

La fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1}$$

possède deux pôles simples $z_1 = i$, $z_2 = -i$ et on a d'après la remarque 90 page 89,



$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{z^3 + 1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{z^3 + 1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1 - i}{2i} = \frac{-1 - i}{2},$$

et

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{z^3 + 1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=-i} = \frac{z^3 + 1}{2z} \Big|_{z=-i} = \frac{1 + i}{-2i} = \frac{-1 + i}{2}.$$

Notons que pour $0 < r < 1$ l'intégrale $\oint_{C_r} \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1} dz = 0$ car la fonction f est holomorphe à l'intérieur de C_r et sur C_r . Mais, si $r > 1$ on aura

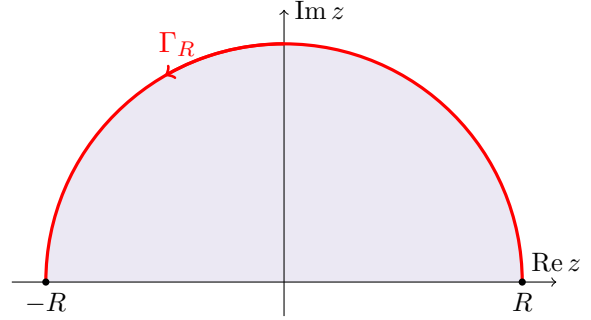
$$\oint_{C_r} \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)) = 2\pi i \left(\frac{-1 - i}{2} + \frac{-1 + i}{2} \right) = -2\pi i. \quad \blacksquare$$

5.4 Application du théorème des résidus

5.4.1 Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales

Lorsque l'on calcule certains types d'intégrales, il est souvent nécessaire de montrer que $\int_{\Gamma_R} F(z) dz$

et $\int_{\Gamma_R} F(z) e^{i\alpha z} dz, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tendent vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$, où Γ_R est un demi-cercle centré à l'origine et de rayon R .



Les proposition suivantes sont fondamentales.

Proposition 92

Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = R e^{it}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 0$.

Démonstration. D'après le théorème d'estimation [voir l'inégalité (3.1) page 43], nous avons

$$\left| \int_{\Gamma_R} F(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}},$$

car la longueur L de l'arc Γ_R est $L = \pi R$. Alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_R} F(z) dz \right| = 0 \text{ et donc } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 93

Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = R e^{it}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z) dz = 0, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Si $z = R e^{it}$, on a

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z) dz = \int_0^\pi e^{i\alpha R e^{it}} F(R e^{it}) R i e^{it} dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{i\alpha R e^{it}} F(R e^{it}) R i e^{it} dt \right| \\
&\leq \int_0^\pi \left| e^{i\alpha R e^{it}} F(R e^{it}) R i e^{it} \right| dt \\
&= \int_0^\pi \left| e^{-\alpha R \sin t} e^{i\alpha R \cos t} F(R e^{it}) \right| R dt \\
&= \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin t} |F(R e^{it})| R dt \\
&\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin t} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin t} dt.
\end{aligned}$$

De plus, par l'étude de la fonction $t \mapsto \frac{2}{\pi}t - \sin t$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on voit que $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La dernière intégrale est donc inférieure ou égale à

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}t} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \left[\frac{-\pi}{2\alpha R} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}t} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi M}{\alpha R^k} (1 - e^{-\alpha R}),$$

qui tend vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$ car α et k sont strictement positifs ce qui démontre le résultat annoncé. ■

5.4.2 Application aux transformées de Fourier

Définition 94

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$.

Sa **transformée de Fourier** est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

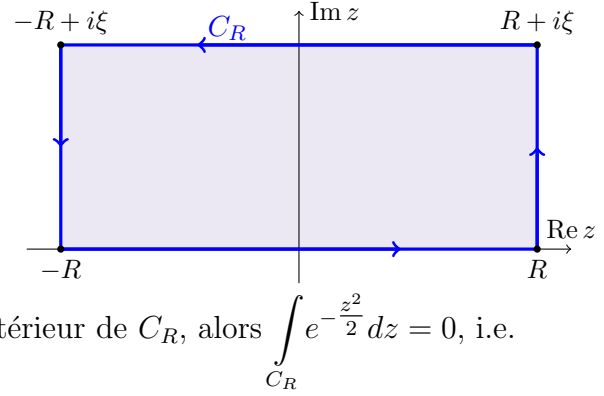
La transformée de Fourier est un outil essentiel des mathématiques appliquées. Elle peut souvent être obtenue via le calcul des résidus.

Exemple 75

Calculons la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Considérons $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ où C_R désigne le rectangle d'extrémités $-R, R, R+i\xi$ et $-R+i\xi$, $\xi > 0$.

La fonction $z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}$ n'a aucune singularité à l'intérieur de C_R , alors $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$, i.e.



$$\int_{-R}^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^\xi e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} i dy + \int_R^{-R} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx + \int_\xi^0 e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} i dy = 0.$$

On a $\left| \int_0^\xi e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} i dy \right| \leq \int_0^\xi \left| e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} \right| dy = \int_0^\xi e^{-\frac{R^2+y^2}{2}} dy \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. De même $\int_\xi^0 e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} i dy \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. Donc, lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = 0,$$

il vient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

On en déduit que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \blacksquare$$

Cas d'une fonction rationnelle

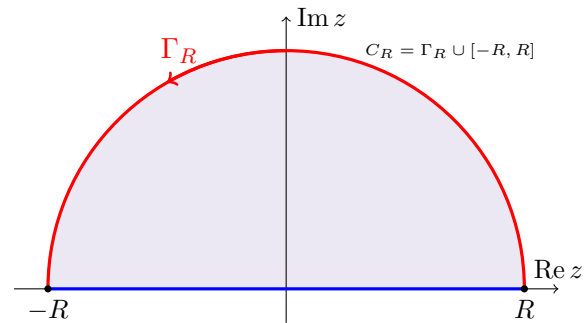
Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle intégrable sur $\mathbb{R}$ et $z_k, \text{Im } z_k \neq 0, k = 1, \dots, n$ ses pôles.

Pour calculer la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

de la fonction f par la méthode des résidus, on considère

$\int_{C_R} f(z) e^{-i\xi z} dz$, $\xi < 0$ où C_R désigne la



courbe fermée ou le **contour** fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Si le nombre R est suffisamment grand alors

$$\int_{C_R} f(z) e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{-i\xi z}, z_k),$$

i.e.

$$\int_{-R}^R f(x) e^{-i\xi x} dx + \int_{\Gamma_R} f(z) e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{-i\xi z}, z_k),$$

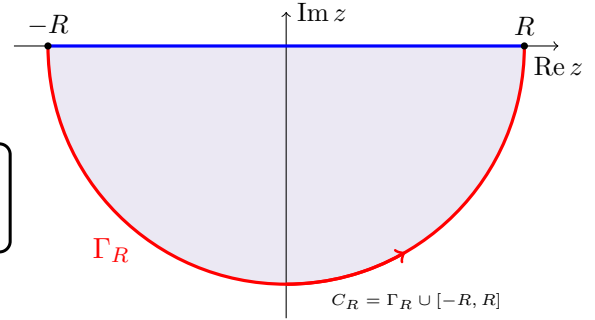
Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{-i\xi z} dz = 0$,

on obtient

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{-i\xi z}, z_k), \text{ si } \xi < 0.$$

De même, en choisissant le demi cercle avec des parties imaginaires négatives on obtient

$$\hat{f}(\xi) = -2\pi i \sum_{\text{Im } z_k < 0} \text{Res}(f(z) e^{-i\xi z}, z_k), \text{ si } \xi > 0.$$



Exemple 76

Calculons la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

On a $z^2 + 1 = 0$ pour $z = i$ et $z = -i$, ces valeurs de z sont les pôles simples de $\frac{1}{z^2 + 1}$ et

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2 + 1}, i\right) &= \frac{e^{-i\xi z} \Big|_{z=i}}{(z^2 + 1)' \Big|_{z=i}} = \frac{e^{-i\xi z} \Big|_{z=i}}{2z \Big|_{z=i}} = \frac{e^\xi}{2i}, \\ \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2 + 1}, -i\right) &= \frac{e^{-i\xi z} \Big|_{z=-i}}{(z^2 + 1)' \Big|_{z=-i}} = \frac{e^{-i\xi z} \Big|_{z=-i}}{2z \Big|_{z=-i}} = \frac{e^{-\xi}}{-2i}. \end{aligned}$$

Alors

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2 + 1}, i\right), & \text{si } \xi < 0, \\ -2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2 + 1}, -i\right), & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i \frac{e^\xi}{2i}, & \text{si } \xi < 0, \\ -2\pi i \frac{e^{-\xi}}{-2i}, & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \pi e^{-|\xi|}. \quad \blacksquare$$

5.4.3 Calcul d'intégrales définies diverses

Le calcul d'intégrales définies généralisées peut souvent être effectué en utilisant le **théorème des résidus** appliqué à une **fonction** et à un **contour** convenables dont le choix peut demander une grande **ingéniosité**.

Les types d'intégrales qui suivent sont souvent rencontrées dans la pratique.

Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Soit f une fonction complexe holomorphe dans le demi plan $\text{Im } z \geq 0$ sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $z_1, z_2, \dots, z_n$ de demi plan $\text{Im } z > 0$. On suppose de plus que $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = Re^{it}$, $k > 1$ et $M > 0$.

On considère $\int_{C_R} f(z) dz$, où C_R désigne le contour fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Si le nombre R est pris suffisamment grand alors le théorème des résidus permet d'écrire

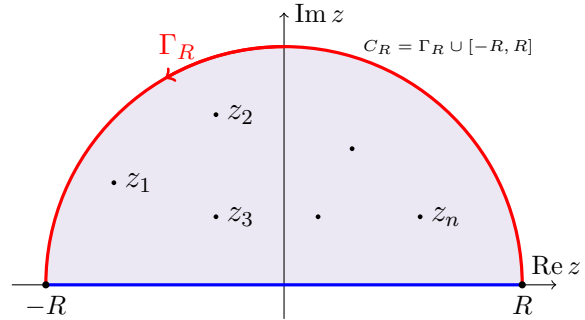
$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k),$$

i.e.

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

D'après la proposition 92, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$. Alors lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$



Remarque 95

Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes avec $\deg Q \geq 2 + \deg P$, et aucun des zéros de Q n'étant réel, alors la formule précédente est valable, les z_k étant les zéros de Q tels que $\text{Im } z_k > 0$.

Exemple 77

Calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.

Les pôles de $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ situés à l'intérieur du contour C_R sont les pôles simples $z = i$ et $z = 2i$ et on a

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z - i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right\} = \frac{i}{6},$$

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \left\{ (z - 2i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right\} = \frac{-i}{3}.$$

Si R est suffisamment grand alors d'après le théorème des résidus

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 2\pi i \{ \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i) \} = 2\pi i \left\{ \frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right\} = \frac{\pi}{3}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \frac{\pi}{3}.$$

Comme $\lim_{R \rightarrow +\infty} R^2 |f(Re^{it})| = 1$, alors $|f(z)| \leq \frac{M}{R^2}$ pour $z = Re^{it}$, $M > 0$. Donc d'après la proposition 92,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 0.$$

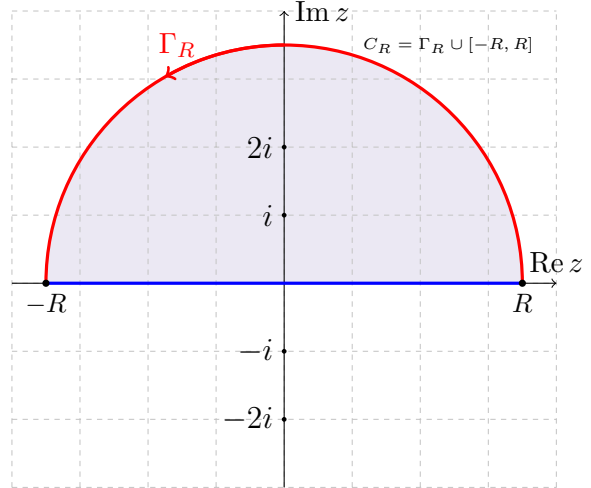
Par conséquent, lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{3}. \quad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle en x et en y qui n'a pas de pôles sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Si on pose $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, alors $\sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}$ et $dz = ie^{it} dt$ ou $dt = \frac{1}{iz} dz$. Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) dz.$$



Posons $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$, on a alors d'après le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k),$$

où les z_k sont les pôles de la fraction rationnelle f qui appartiennent à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Exemple 78

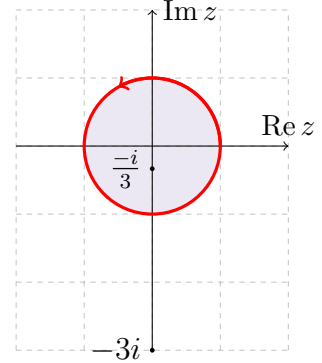
Calculons l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt$.

Pour calculer cette intégrale on va appliquer la méthode ci-dessus qui consiste à poser $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt &= \int_{|z|=1} \frac{1}{iz \left(5+3\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} dz = \int_{|z|=1} \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz \\ &= \int_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)} dz. \end{aligned}$$

Puisque le nombre $\frac{-i}{3}$ est le seul pôle de $\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors par le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}, \frac{-i}{3}\right) = 2\pi i \frac{2}{3\left(\frac{-i}{3}+3i\right)} = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$



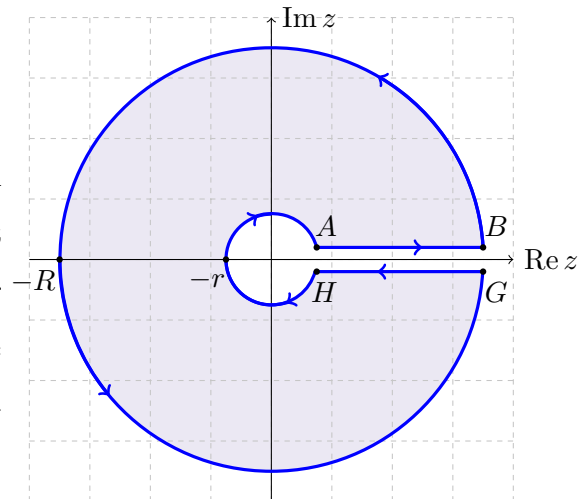
Intégrale du type $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx$

Soit α un réel strictement positif. Soient P et Q deux polynômes avec $\deg Q > \alpha + \deg P$, tels que $P(0) \neq 0$ et aucun des zéros de Q n'étant réel positif ou nul. Si z_k , $k = 1, \dots, n$ sont des points singuliers de $\frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1}$, alors $\text{Re } z_k \notin [0, +\infty[$.

On va considérer cette fois la fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, \quad \text{Arg}(\text{Log } z) \in]-\pi, \pi[,$$

et le contour $C_{R,r}$ de la figure ci-contre où l'axe réel positif est la coupure et où AB et GH coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension. Le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r .



Si R est assez grand et r est assez petit, alors le théorème des résidus permet d'écrire

$$\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{(\alpha-1)i\pi} x^{\alpha-1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \\ &\quad + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-(\alpha-1)i\pi} x^{\alpha-1} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz. \end{aligned}$$

Lorsque $r \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} (-re^{it})^{\alpha-1} r e^{it} dt \right| \leq \lim_{r \rightarrow 0} K r^\alpha = 0.$$

Quand $R \rightarrow +\infty$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \right| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} (-Re^{it})^{\alpha-1} R e^{it} dt \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} K R^\beta = 0,$$

où $\beta = \alpha + \deg P - \deg Q < 0$. On en déduit que

$$e^{-(\alpha-1)i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx + e^{(\alpha-1)i\pi} \int_{+\infty}^0 \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k \right).$$

Par conséquent

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k \right)}.$$

Exemple 79

Par application de la formule précédente on a

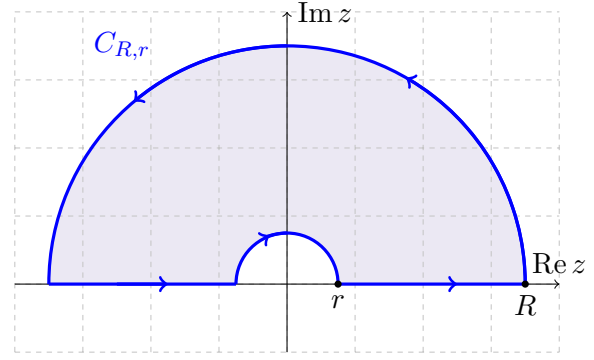
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \text{Res} \left(\frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}, -1 \right) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, 0 < \alpha < 1. \quad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx, \alpha > 0$

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas des racines réelles et $\deg Q \geq \deg P$.

Considérons la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}$ et le contour $C_{R,r}$ de la figure ci-contre,

$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons R et r . Donc, d'après le théorème des résidus on obtient



$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right). \end{aligned}$$

Notons que si on procède comme ci-dessus on vérifie que l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$.

Pour l'intégrale sur Γ_r on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} \frac{e^{i\alpha re^{it}}}{re^{it}} i r e^{it} dt = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)}.$$

Donc si on fait tendre r vers zéro et R vers $+\infty$ on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)} + 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right).}$$

Exemple 80

Calculons $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)x} dx$.

Puisque le nombre i est le seul pôle de $\frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)z}$ avec partie imaginaire strictement positive, alors par application de la formule précédente on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)x} dx = i\pi + 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)z}, i \right) = i\pi (1 - e^{-1}).$$

Notons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)x} dx = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)x} dx.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)x} dx = (1 - e^{-1}) \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx$

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas de racines réelles positives ou nulles,

$$P(0) \neq 0 \text{ et } \deg Q \geq 2 + \deg P.$$

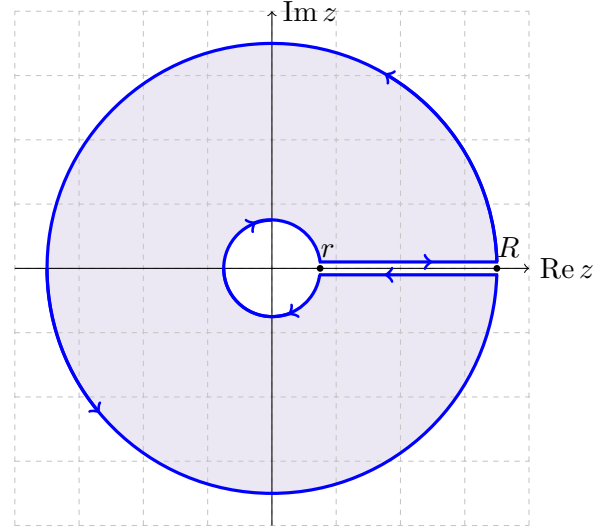
On considère la fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2,$$

et le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ de la

figure ci-contre où Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r .

Si R est assez grand et r est assez petit, alors par le théorème des résidus



$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2 dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x)^2 dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz \\ &\quad + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx - \int_{\Gamma_r} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right). \end{aligned}$$

Comme précédemment les intégrales sur Γ_r et Γ_R tendent vers zéro lorsque $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$.

On obtient alors la relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x)^2 dx - \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right).$$

D'où

$$-2 \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx - 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right) \right), \\ \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right) \right). \end{aligned}$$

Exemple 81

Calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3} dx$.

Ici $P(x) = 1$ et $Q(x) = (x+1)^3$, toutes les conditions sont vérifiées, d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} \operatorname{Log} x dx &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left(\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1 \right) \right), \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx &= \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1 \right) \right). \end{aligned}$$

Comme -1 est un pôle triple, pour le résidu on a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1 \right) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \left((z+1)^3 \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(z+1)^3} \right)'' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} ((\operatorname{Log} z)^2)'' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1 - \operatorname{Log} z}{z^2} \\ &= \frac{1 - \operatorname{Log}(-1)}{(-1)^2} = 1 - (0 + i\pi) = 1 - i\pi. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3} dx &= \frac{-1}{2}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

5.5 Exercices

Exercice 5.1

Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, z = 1; \quad \text{b) } f(z) = (z-3) \sin \frac{1}{z+2}, z = -2; \\ \text{c) } f(z) &= \frac{z}{(z+1)(z+2)}, z = -2. \end{aligned}$$

Exercice 5.2

Développer $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent valable pour

$$\text{a) } 1 < |z| < 3, \quad \text{b) } |z| > 3, \quad \text{c) } 0 < |z+1| < 2, \quad \text{d) } |z| < 1.$$

Exercice 5.3

- a) Développer $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ en série de Laurent au voisinage de $z = 2$.
 b) Déterminer le domaine de convergence de cette série.
 c) Classer les singularités de f .

Exercice 5.4

Trouver les résidus de **(a)** $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ et **(b)** $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

Exercice 5.5

Trouver les résidus des fonctions suivantes en tous les points singuliers.

- a) $f(z) = e^{z^2+1/z^2}$, b) $f(z) = \frac{e^{-1/z^2}}{1+z^4}$, c) $f(z) = \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, d) $f(z) = e^z \sin \frac{1}{z}$, e) $f(z) = z^n e^{1/z}$.

Exercice 5.6

Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$, $t \in \mathbb{R}^*$ le long du cercle C d'équation **(a)** $|z| = 3$ et **(b)** $|z| = 1$.

Exercice 5.7

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1} dz, \text{ b) } \oint_{|z|=2} \frac{\sin z - z}{z^3(z+1)} dz, \text{ c) } \oint_{|z+1|=3} \frac{e^{2iz} - 5z}{z+2i} dz, \text{ d) } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \sin z} dz.$$

Exercice 5.8

Évaluer **(a)** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$ et **(b)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$.

Exercice 5.9

Évaluer **(a)** $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos t + \sin t} dt$ et **(b)** $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\sin t} dt$, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > |b|$.

Exercice 5.10

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$.

Exercice 5.11

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5.12

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.$

Exercice 5.13

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Ch}(ax)}{\operatorname{Ch} x} dx = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}, \quad \text{où } |a| < 1.$

Exercice 5.14

Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \operatorname{Log} 2.$

Références

- [1] **AMROUN N.** Cours de Fonctions de variables complexes. Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes Algérie, 2009.
- [2] **BECK M., MARCHESI G., PIXTON D. and SABALKA L.** A First Course in Complex Analysis. San Francisco State University, San Francisco, CA, USA and Binghamton University, Binghamton, NY, USA, 2012.
- [3] **BOUARICH A.** Introduction à l'analyse complexe. USMS, Beni Mellal, 2010/2011.
- [4] **CARLIER G.** Analyse complexe. Département MIDO, 2012/2013.
- [5] **GIROUX A.** Analyse complexe. Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal, 2013.
- [6] **MURRAY R. S.** Variables complexes : cours et problèmes, volume 12 de Série Schaum, New York 1973.
- [7] **PLAUT E.** Mathématiques pour l'ingénieur, Analyse complexe. ENSEM, 2006/2007.
- [8] **RUDIN W.** Analyse réelle et complexe, Dunod, Paris, 1998.