Notes de Cours du module

Analyse 5 (Partie 2 : EDP)

Par

LAADJ Toufik[1]

Pour

Troisième année Licence

2022

---

[1]Page Web : http://perso.usthb.dz/~tlaadj/

Table des matières

Chapitre 1

Généralités sur les équations aux dérivées partielles

Sommaire

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques définitions essentielles pour la suite de ce cours.

1.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

Tout d'abord on rappelle qu'une équation différentielle ordinaire (EDO en abrégé) une relation entre une variable réelle indépendante x, une fonction inconnue $x \mapsto u(x)$ et ses dérivées $u', u'', \cdots, u^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$.
L'ordre d'une EDO est défini comme étant l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation. Ainsi, une équation différentielle d'ordre n se présente sous la forme

$$F\left(x, u, u', u'', \cdots, u^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

La fonction F est une fonction de $n+2$ variables.
La fonction inconnue $x \mapsto u(x)$ de la variable réelle x est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^k, k = 2, 3, \cdots$.
On prendra x dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

Exemple 1

a) $u' + xu = e^x$ est une équation différentielle du premier ordre.

b) $u'' + 4xu = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

c) $u^{(9)} - xu'' = x^2$ est une équation différentielle d'ordre 9. ▪

1.1.1 Équations différentielles linéaires

Définition 1 (Équation différentielle linéaire)
On appelle équation différentielle *linéaire* toute équation de la forme :

$$a_n(x)\, u^{(n)} + a_{n-1}(x)\, u^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)\, u'' + a_1(x)\, u' + a_0(x)\, u = g(x),$$

où les fonctions $x \mapsto a_j(x), 0 \leq j \leq n$, sont appelées coefficients de l'équation.
La fonction $x \mapsto g(x)$ est appelée le second membre. Si g est nulle, alors l'équation est dite *homogène* ou sans second membre.
L'équation différentielle

$$a_n(x)\, u^{(n)} + a_{n-1}(x)\, u^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)\, u'' + a_1(x)\, u' + a_0(x)\, u = 0,$$

est appelée équation différentielle homogène associée.
Si $a_j(x), 0 \leq j \leq n$, sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à *coefficients constants.*

Exemple 2

L'équation différentielle $(x^2+1)\,u'' = e^x u + \text{Arctg}\, x$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et son équation différentielle homogène associée est $(x^2+1)\,u'' = e^x u$. ■

Équations différentielles linéaires du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle est de la forme

$$a(x)\,u' + b(x)\,u = c(x)\,, \tag{1.2}$$

où a, b et c sont des fonctions données de x, continues dans le domaine où il s'agit d'intégrer l'équation (1.2). La fonction c est appelée second membre de l'équation différentielle, a et b sont appelées les coefficients.

Si $c(x) \equiv 0$ on dit que l'équation (1.2) est linéaire homogène ou sans second membre

$$a(x)\,u' + b(x)\,u = 0. \tag{1.3}$$

La fonction nulle est une solution. Les autres s'obtiennent en écrivant $\frac{u'}{u} = -\frac{b(x)}{a(x)}$ ou $\frac{du}{u} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx$ et en prenant une primitive de chaque membre ; on obtient

$$\text{Log}\,|u(x)| = -\int g(x)\,dx + K, \text{ avec } g(x) = \frac{b(x)}{a(x)},\ K \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque valeur de K, cela donne deux solutions, l'une toujours positive $u = e^K\, e^{-\int g(x)dx}$, l'autre toujours négative $u = -e^K\, e^{-\int g(x)dx}$.

On retrouve toutes ces solutions, y compris la solution nulle, en disant que la solution générale de l'équation homogène $a(x)\,u' + b(x)\,u = 0$ est

$$u_h = C\, e^{-\int g(x)dx},\quad g(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, C \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver la solution générale de l'équation (1.2), on peut utiliser la méthode dite de *variation de la constante*, c'est-à-dire que l'on cherche la solution générale sous la forme $u = C(x)\; e^{-\int g(x)dx},\quad g(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, où $x \mapsto C(x)$ est une nouvelle fonction inconnue de x. Il vient

$$a(x)\left(C'(x)\; e^{-\int g(x)dx} - C(x)\,\frac{b(x)}{a(x)}\, e^{-\int g(x)dx}\right) + b(x)\,C(x)\; e^{-\int g(x)dx} = c(x)\,,$$

et donc

$$C'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int g(x)dx},\quad g(x) = \frac{b(x)}{a(x)},$$

ce qui permet, en intégrant de trouver $C(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int_\alpha^x g(s)ds} dx$. La solution générale de l'équation (1.2), est alors donnée par

$$u(x) = C\, e^{-\int g(x)dx} + e^{-\int g(x)dx} \left(\int \frac{c(x)}{a(x)} e^{\int_\alpha^x g(s)ds} dx \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3

Soit l'équation $u' + 2xu = 2x$.

L'équation sans second membre (homogène) associée est $u' + 2xu = 0$. C'est une équation à variables séparables. Sa solution générale est $u = C\, e^{-x^2}$.

Cherchons la solution générale de l'équation non homogène sous la forme $u = C(x)\; e^{-x^2}$, où $x \mapsto C(x)$ est une fonction inconnue de x. En portant dans l'équation non homogène, on trouve

$$C'(x)\; e^{-x^2} + C(x)(-2x)\, e^{-x^2} + 2xC(x)\; e^{-x^2} = 2x.$$

Après simplification on obtient

$$C'(x) = 2xe^{x^2}.$$

En intégrant, on trouve

$$C(x) = e^{x^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solution générale est donc

$$u = \lambda e^{-x^2} + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

■

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants, est une équation du type

$$u'' + au' + bu = c(x),$$

où les coefficients a et b sont des constantes réelles, $x \mapsto c(x)$ est une fonction donnée continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Comme dans le cas à coefficients non constants, on commence par résoudre l'équation homogène associée ou sans second membre

$$u'' + au' + bu = 0.$$

On cherche des solutions sous la forme $u = e^{rx}, r \in \mathbb{R}$. En substituant dans notre équation homogène, on obtient

$$\left(r^2 + ar + b\right) e^{rx} = 0.$$

Comme la fonction exponentielle n'est jamais nulle, pour avoir une solution il faut que

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Cette équation se nomme l'équation *caractéristique* (ou auxiliaire) associée à notre équation homogène. Les valeurs de r se trouvent aisément à l'aide de la formule quadratique

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Trois cas peuvent alors se produire :

- Si $a^2 - 4b > 0$, on trouve deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, ce qui montre que les fonctions $u_1 = e^{r_1 x}$ et $u_2 = e^{r_2 x}$ sont deux solutions particulières indépendantes. La solution générale de l'équation homogène $u'' + au' + bu = 0$ sera alors

$$u_h = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $a^2 - 4b = 0$, on trouve une racine réelle double r_0. Dans ce cas, l'obtention d'une solution réelle r_0 montre que la fonction $u_1 = e^{r_0 x}$ est une solution particulière, d'autre part on peut montrer que $u_2 = xe^{r_0 x}$ est aussi solution. On en déduit alors que la solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$u_h = (\lambda x + \mu)\, e^{r_0 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $a^2 - 4b < 0$ on trouve deux racines complexes distinctes et conjuguées de forme générale $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $u_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ et $u_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sont deux solutions particulières indépendantes de l'équation homogène. D'où la solution homogène générale est

$$u_h = e^{\alpha x} \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

  que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$u_h = \lambda e^{\alpha x} \cos(\beta x + \mu) \quad \text{ou } u_h = \lambda e^{\alpha x} \sin(\beta x + \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4

a) $u'' + 4u' + 3u = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 3 = 0$, on a $r_1 = -3, r_2 = -1$. Alors la solution générale est $u = \lambda e^{-3x} + \mu e^{-x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) $u'' + 4u' + 9u = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 9 = 0$, on a $r_1 = -2 - i\sqrt{5}, r_2 = -2 + i\sqrt{5}$. Alors la solution générale est $u = e^{-2x}\left(\lambda \cos\left(\sqrt{5}x\right) + \mu \sin\left(\sqrt{5}x\right)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) $u'' + 6u' + 9u = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + 6r + 9 = 0$, on a $r_1 = -3$ une racine double. Alors la solution générale est $u = (\lambda x + \mu)\, e^{-3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ∎

Ensuite, il faut trouver une solution particulière u_p de l'équation avec le second membre

$$u'' + au' + bu = c(x).$$

La solution générale sera $u = u_p + u_h$.

Une solution particulière u_p peut être obtenue par la méthode de variation des constantes :

$$u_p = e^{r_1 x}\int \left(e^{(r_2 - r_1)x}\left(\int e^{-r_2 x} c(x)\, dx\right)\right) dx.$$

Si nous ajoutons les constantes d'intégration lorsque nous intégrons, nous obtenons la solution générale.

Exemple 5

Cherchons une solution de l'équation $u'' - u' - 2u = e^{-x}$.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet les racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. La solution générale est donc

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}\int \left(e^{3x}\left(\int e^{-2x} e^{-x} dx\right)\right) dx = e^{-x}\int \left(e^{3x}\left(-\tfrac{1}{3}e^{-3x} + \lambda\right)\right) dx \\ &= e^{-x}\left(\tfrac{1}{3}\lambda e^{3x} - \tfrac{1}{3}x + \mu\right) = \tfrac{1}{3}\lambda e^{2x} + \left(\mu - \tfrac{1}{3}x\right) e^{-x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$ ∎

1.2 Équations aux dérivées partielles

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables

$$(x, y, z, \cdots) \longmapsto u(x, y, z, \cdots).$$

Une EDP est alors une relation entre les variables $x, y, z, \cdots$ et les dérivées partielles de u.

Définition 2

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation fonctionnelle qui met en relation une fonction inconnue u à valeurs scalaires des variables indépendantes $x, y, z, \cdots$, et ses dérivées partielles où $(x, y, z, \cdots) \in \Omega$ avec Ω désigne un domaine de $\mathbb{R}^n$. Cette équation est ainsi de la forme

$$F\left(x, y, \cdots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \cdots\right) = 0. \tag{1.4}$$

où F est une fonction de plusieurs variables

Notation 1

Par souci de simplification, il est d'usage d'écrire u la fonction inconnue et $D_x u$ (notation française) ou u_x (notation anglo-saxonne, plus répandue) sa dérivée partielle par rapport à x, soit avec les notations habituelles du calcul différentiel : $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}, \cdots$, et pour les dérivées partielles secondes : $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \cdots$.

Définition 3

La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue.

Exemple 6

L'équation

$$x u_{xx} + (u_y)^2 - u_x u_y = x^2 + y^2$$

est un exemple d'EDP pour le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$. ▪

Définition 4

On appelle ordre d'une EDP l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.

Exemple 7

L'équation

$$u_{xx} + 2y^3 u_{xy} + (u_y)^4 = 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est une EDP d'ordre 2 en dimension 2. ▪

Définition 5

Une solution de l'EDP (1.4) est une fonction $u = u(x, y, \cdots)$ des variables indépendantes $x, y, \cdots$ dont les dérivées partielles apparaissant dans l'EDP existent aux points de Ω et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'EDP, celle-ci est satisfaite.

Exemple 8

L'équation

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est une EDP d'ordre 2 en dimension 2 et les fonctions $u(x, y) = (x + y)^3$ et $v(x, y) = \sin(x - y)$ sont deux solutions de cette dernière équation. En effet, on a

$$u_x = 3(x + y)^2, \quad u_y = 3(x + y)^2, \quad u_{xx} = 6(x + y), \quad u_{yy} = 6(x + y)$$

et nous obtenons alors

$$u_{xx} - u_{yy} = 6(x + y) - 6(x + y) = 0.$$

Ainsi on a

$$v_x = \cos(x - y), \quad v_y = -\cos(x - y), \quad v_{xx} = -\sin(x - y), \quad v_{yy} = -\sin(x - y)$$

et nous obtenons aussi

$$v_{xx} - v_{yy} = -\sin(x - y) - (-\sin(x - y)) = 0.$$

■

On voit par ce dernier exemple que les solutions d'une EDP peuvent être très différentes. Il y a en général une infinité de solutions pour une EDP donnée.

Exemple 9

Prenons par exemple l'équation

$$u_y = 0 \quad \text{avec} \quad u = u(x, y).$$

Alors toutes les fonctions $u(x, y) = f(x)$ sont des solutions de cette équation. ■

En général une EDP est complétée par des conditions initiales et/ou aux frontières. Ces conditions peuvent être de nature très différente et influent fortement sur l'existence et la forme des solutions et dans une situation idéale peut réduire le nombre de solutions jusqu'à une seule.

Définition 6

En mathématiques, un problème est dit bien posé s'il a une solution et si cette solution est unique.

Exemple 10

Considérons l'EDP suivante

$$u_{xy} = 0 \quad \text{avec} \quad u = u(x, y).$$

En intégrant par rapport à y, on obtient

$$u_x = f(x).$$

En intégrant par rapport à x et en notant g une primitive de la fonction arbitraire f, on obtient $u(x, y) = g(x) + h(y)$ où h est une fonction arbitraire de la variable y.
En pratique, parmi toutes les solutions possibles, on en cherche une qui vérifie des contions supplémentaires. Ces conditions sont, en général, imposées sur le bord du domaine Ω et s'appellent conditions aux bords. Par exemple si on impose les conditions $u(x, x) = x$ et $u_x(x, x) = 0$ on obtient une unique solution $u(x, y) = y$. ∎

1.3 Équations aux dérivées partielles linéaires

Pour ce qui suit, un opérateur L désignera une transformation qui associe à toute fonction régulière $u = u(x, y, \cdots)$ de plusieurs variables $x, y, \cdots$ sur un domaine Ω une fonction $Lu = Lu(x, y, \cdots)$ sur ce même domaine. Le qualificatif "régulière" signifie ici que Lu est bien définie. Parfois il faudra exiger que les dérivées partielles de u existent jusqu'à un certain ordre.

Exemple 11

Si $u = u(x, y)$, alors $Lu = u_x$ est un exemple d'opérateur. Cependant pour que Lu soit bien définie, il est nécessaire que la dérivée partielle de u par rapport à x existe sur le domaine Ω; c'est ce que signifie "régulière" dans ce cas-ci. ∎

L'équation (1.4) peut s'écrire sous la forme $L(u) = f(x, y, \cdots)$ où $f(x, y, \cdots)$ est une fonction des variables indépendantes, L est un opérateur et u est une fonction à déterminer.

Définition 7

Un opérateur L est linéaire si et seulement si $L(au + bv) = aL(u) + bL(v)$ quels que soient les nombres réels a, b et les fonctions régulières u, v.

Définition 8

Une EDP est dite linéaire si elle est de la forme $Lu = f(x, y, \cdots)$ où L est un opérateur linéaire, $f(x, y, \cdots)$ est une fonction des n variables indépendantes, $(x, y, \cdots)$ appartient à un domaine Ω convenable de $\mathbb{R}^n$ et u est la fonction recherchée.
Si en plus $f(x, y, \cdots) \equiv 0$, on dit alors que l'équation est linéaire homogène. Sinon elle est non-homogène.

Exemple 12

L'équation

$$u + yu_{xx} + 2xyu_{yy} = 1 + xy, \text{ où } u = u(x, y) \text{ et } (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$$

est une EDP linéaire non-homogène. Dans cet exemple,

$$Lu = u + yu_{xx} + 2xyu_{yy}$$

est un opérateur linéaire et $f(x, y) = 1 + xy$. En effet L est linéaire, car si a et b sont deux nombres réels quelconques et u et v deux fonctions régulières (*i.e.* il faut que u et v soient des fonctions dont les dérivées partielles apparaissant dans la définition de Lu existent sur $\Omega = \mathbb{R}^2$), alors

$$\begin{aligned} L(au + bv) &= au + bv + y(au_{xx} + bv_{xx}) + 2xy(au_{yy} + bv_{yy}) \\ &= a(u + yu_{xx} + 2xyu_{yy}) + b(u + yu_{xx} + 2xyu_{yy}) \\ &= aL(u) + bL(v). \end{aligned}$$

■

Exemple 13

Une autre EDP est

$$u_x u_{xx} + xuu_y = \sin y, \quad \text{où} \quad u = u(x, y) \quad \text{et} \quad (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2.$$

Cependant cette équation n'est pas linéaire. Dans ce cas,

$$Lu = u_x u_{xx} + xuu_y$$

n'est pas un opérateur linéaire et $f(x,y) = \sin y$. Pour vérifier que Lu n'est pas linéaire, il suffit de considérer par exemple les deux nombres réels $a = b = 1$ et les deux fonctions $u(x,y) = u(x,y) = x^2$. Avec ces choix, nous obtenons que $L(u+v) = 16x$, $Lu = Lv = 4x$ et clairement $L(u+v) \neq Lu + Lv$. ■

1.3.1 Équations aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2

Une EDP linéaire d'ordre 2 avec n variables indépendantes sera de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Cu = D. \tag{1.5}$$

où A_{ij}, B_i, C et D sont des fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Dans cette situation, nous supposerons que les solutions recherchées u ont toutes leurs dérivées partielles

$$u_{x_i} \quad \text{et} \quad u_{x_i x_j}, \quad 1 \leq i,j \leq n$$

continues sur Ω. Ceci a comme conséquence

$$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Nous pouvons alors supposer sans perte de généralités que $A_{ij} = A_{ji}$. Il suffit de remplacer chacune des fonctions A_{ij} avec $i \neq j$ par $\frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$. L'EDP n'est pas modifié et alors nous avons bien avec ces nouvelles fonctions que $A_{ij} = A_{ji}$. Si $D \equiv 0$, alors l'équation (1.5) est linéaire homogène.

Certaines des queutions classiques de la physique sont des EDP linéaires homogènes d'ordre 2. Trois de ces équations sont les suivantes.

- L'équation **des ondes :**

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad \text{où} \quad u = u(x,y,z,t).$$

- L'équation **de la chaleur :**

$$u_t = k (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad \text{où} \quad u = u(x,y,z,t).$$

- L'équation **de Laplace ou du potentiel :**

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad \text{où} \quad u = u(x,y,z,t).$$

La recherche de solutions de ces trois équations sera étudiée plus tard.

1.4 Équation aux dérivée partielle non-linéaire

1.4.1 Équation aux dérivée partielle quasi-linéaire

Définition 9

Une EDP est dite quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction u.

Exemple 14

Une EDP du seconde ordre en dimension 2 est quasi-linéaire si elle est de la forme :

$$A\left(x,y,u,u_x,u_y\right)u_{xx}+B\left(x,y,u,u_x,u_y\right)u_{xy}+C\left(x,y,u,u_x,u_y\right)u_{yy}=D\left(x,y,u,u_x,u_y\right),$$

où A, B, C et D sont des fonctions définies dans un domaine de $\mathbb{R}^5$. ▪

Exemple 15

L'équation $u^2u_{xx}+u_y=x+y$ est quasi-linéaire. ▪

1.4.2 Équation aux dérivée partielle non-linéaire

Définition 10

On dit qu'une EDP est complètement non linéaire si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

Exemple 16

L'équation $\left(u_x\right)^2+\left(u_y\right)^2=1$ est complètement non linéaire. ▪

1.5 Exercices

Exercice 1.1

Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.

a) $u_{xx}+x^2u_y=y$, **b)** $\left(u_x\right)^2+u\,u_y=1$, **c)** $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$,

d) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=\sin x$, **e)** $u_{xx}+u_x+\sin\left(u\right)=e^y$, **f)** $u_{xx}u_{yy}+u_y+u_x+u=0$.

Exercice 1.2

Vérifier que les fonctions $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $u(x,y) = e^x \sin y$ sont bien des solutions de l'équation

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Exercice 1.3

Déterminer la solution générale de l'équation $u_{yy} + u = 0$, où $u = u(x,y)$.

Exercice 1.4

Déterminer la solution générale de

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad \text{où } u = u(x,y)$$

en utilisant les nouvelles coordonnées : $\xi = x + y$ et $\eta = x - y$.

Exercice 1.5

Montrer que l'équation de la chaleur

$$u_t = k\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

exprimée en coordonnées polaires : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{Arctg}\,\frac{y}{x}$ est

$$u_t = k\left(u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r\right) \quad \text{où} \quad u = u(x,y,t) = u(r,\theta,t).$$

Chapitre 2

EDP d'ordre un et méthode des caractéristiques

Sommaire

2.1 Généralités

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre sont de la forme

$$F(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots) = 0, \quad (x, y, z, \cdots) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Nous allons débuter notre étude en considérant les EDP linéaires d'ordre 1. Nous allons restreindre notre discussion aux équations linéaires n'ayant que deux variables indépendantes, c'est-à-dire aux équations de la forme

$$Au_x + Bu_y + Cu = D, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

pour lesquelles A, B, C et D sont des fonctions de x et y continûment différentiables sur le domaine Ω.

La méthode exposée pour résoudre ces équations sera la méthode des courbes caractéristiques. Cette méthode peut aussi être adaptée au cas des EDP linéaires d'ordre 1 ayant plus de deux variables indépendantes.

Exemple 17 ((Équation de transport ou de convection))

Le modèle unidimensionnel de convection décrit la propagation d'un contaminant à travers un tube par

$$u_t + cu_x = f,$$

où c est une constante positive, elle correspond à la vitesse de concentration du contaminant, u est la concentration en contaminant. C'est une approximation de l'équation de diffusion

$$u_t = -cu_x + \frac{1}{2}Du_{xx} + f$$

lorsque le coefficient de diffusion D est presque nul. ∎

Il est aussi possible dans certains cas de remplacer une EDP d'ordre supérieur par un système d'équations d'ordre 1. Ceci est une autre situation dans laquelle des équations d'ordre 1 apparaissent naturellement. Considérons l'exemple de l'équation des ondes

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \tag{2.2}$$

Nous pouvons la récrire sous la forme suivante

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0.$$

Noter que, dans ce qui précède, nous supposons que les dérivées partielles de u d'ordre $m \leq 2$ sont continues sur Ω et ceci a comme conséquence que

$$u_{tx} = u_{xt}.$$

L'équation des ondes (2.2) est donc équivalente au système d'EDP linéaires d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} u_t - cu_x = v, \\ v_t + cv_x = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons déterminer v à partir de la deuxième équation et ensuite résoudre la première équation en y substituant v.

2.2 Courbes et surfaces paramétrées

2.2.1 Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^2$

Avant de décrire la méthode des courbes caractéristiques, nous allons rappeler les notions de courbe paramétrée dans le domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et de dérivée directionnelle d'une fonction de deux variables dans une direction $\overrightarrow{\mathbf{d}}$. Ces deux notions seront essentielles pour le reste de ce chapitre.

Définition 11

Une courbe C paramétrée est l'image d'une fonction $\gamma : I \to \Omega$ d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ vers le domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ définie par

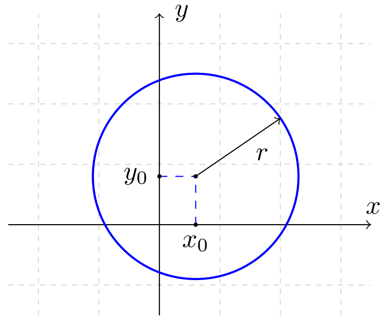
$$s \mapsto \gamma(s) = (x(s), y(s)) \text{ pour tout } s \in I.$$

On dit alors que γ est une paramétrisation de C.

Exemple 18

Le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r est une courbe paramétrée par la fonction

$t \mapsto \gamma(t) = (x_0 + r\cos s, y_0 + r\sin s), \ 0 \leq s \leq 2\pi,$



Cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r

Dans ce qui suit, nous supposerons que les fonctions $s \mapsto x(s)$ et $s \mapsto y(s)$ sont continûment dérivables sur I. Dans cette situation, le vecteur

$$\gamma'(s_0) = (x'(s_0), y'(s_0))$$

est un vecteur tangent à la courbe C au point $(x(s_0), y(s_0))$.

Soient $f(x, y)$ une fonction définie sur le domaine Ω, $(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\overrightarrow{\mathbf{d}} = (d_1, d_2)$ une direction, c'est-à-dire que $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ est un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$. Alors la dérivée directionnelle de f au point (x_0, y_0) dans la direction $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ est

$$f'_{\overrightarrow{\mathbf{d}}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + td_1, y_0 + td_2) - f(x_0, y_0)}{t} \text{ pourvu que cette limite existe.}$$

Si les dérivées partielles de f sont continues sur Ω, alors

$$f'_{\overrightarrow{\mathbf{d}}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, d_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, d_2 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}}. \tag{2.3}$$

Ici $\nabla f(x_0, y_0)$ dénote le gradient de f au point (x_0, y_0), c'est-à-dire

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

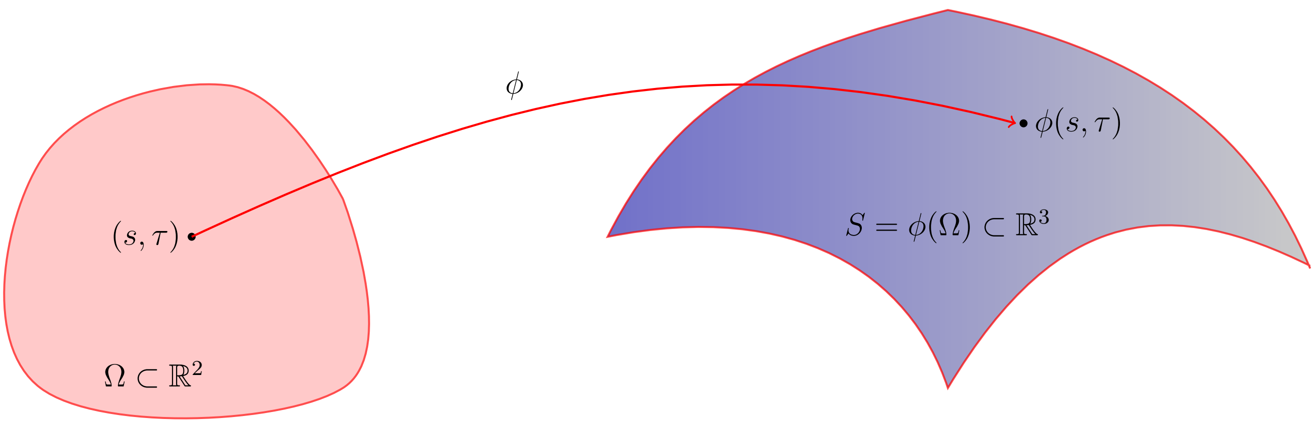
Dans l'équation (2.3), $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{d}}$ désigne le produit scalaire de $\nabla f(x_0, y_0)$ et $\overrightarrow{\mathbf{d}}$.

2.2.2 Surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^3$

Définition 12

Une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^3$ est une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \phi : \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (s, \tau) \quad &\mapsto \phi(s, \tau) = (\phi_1(s, \tau), \phi_2(s, \tau), \phi_3(s, \tau)). \end{aligned}$$



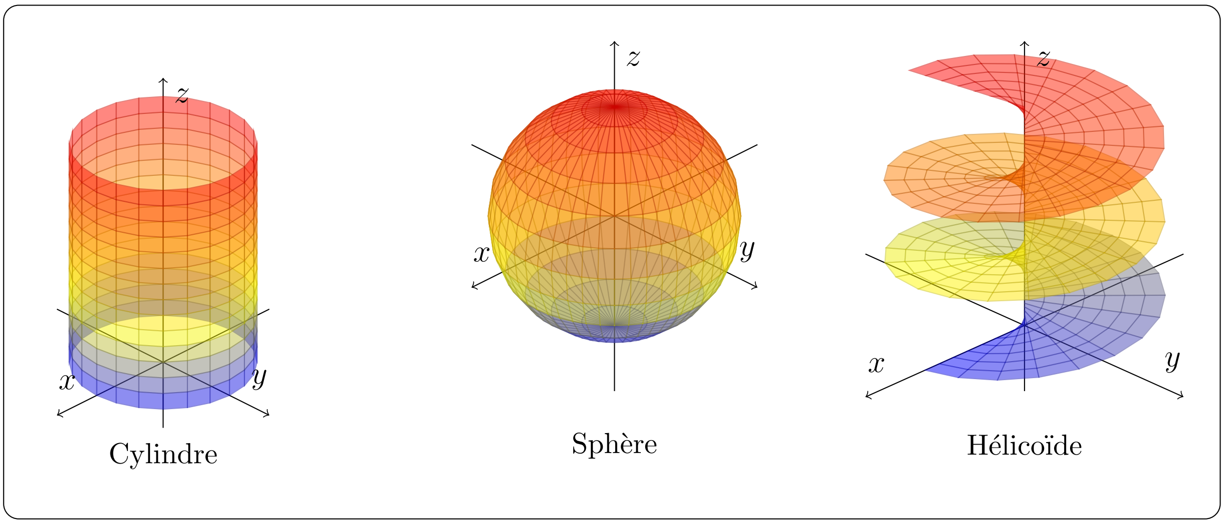
Définition 13 (Surface paramétrée)
L'image $S = \phi(\Omega) = \{\phi(s,\tau) \in \mathbb{R}^3,\ (s,\tau) \in \Omega\}$ s'appelle support géométrique de la surface paramétrée ϕ.

Exemple 19
Le cylindre, la sphère et l'hélicoïde dans $\mathbb{R}^3$ sont paramétrés respectivement par les fonctions

$$\phi(s,\tau) = (r\cos s, r\sin s, \tau), s \in [0, 2\pi[, \tau \in I \subset \mathbb{R},$$

$$\varphi(s,\tau) = (r\cos s \sin\tau, r\sin s \sin\tau, r\cos\tau), s \in [0, 2\pi[, \tau \in [0, \pi[,$$

$$\psi(s,\tau) = (s\cos\tau, s\sin\tau, \tau), \quad (s,\tau) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$



■

2.3 Méthode des caractéristiques

Revenons maintenant à la méthode des courbes caractéristiques. Cette méthode sera utilisée pour résoudre des problèmes avec valeur initiale, c'est-à-dire qu'en plus de l'EDP, nous exigeons que les solutions recherchées satisfassent à une condition initiale.

2.3.1 Équations à coefficients constants

Avant d'exposer les différentes étapes de la méthode, nous allons premièrement illustrer celles-ci dans un exemple simple.

L'exemple le plus simple d'équation aux dérivées partielles est l'équation de transport homogène

$$u_t + cu_x = 0,$$

où c est une constante réelle donnée.
Nous voulons déterminer toutes les solutions $u = u(x,t)$ qui satisfont à l'EDP et à la condition initiale

$$u(x,0) = f(x).$$

Nous disons ici initiale parce que cette condition correspond à fixer les valeurs de u pour $t = 0$.

Considérons toutes les courbes paramétrées ayant une paramétrisation

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \gamma(s) = (x(s), t(s)) \end{array}$$

et dont le vecteur tangent $\gamma'(s) = (x'(s), t'(s))$ au point $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ est $(c,1)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Dans ce qui précède, $()'$ est la dérivée par rapport à s. Les fonctions $x(s)$ et $t(s)$ satisfont aux deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \text{ et } \frac{dx}{ds} = c.$$

Si nous fixons $t(0) = t_0$ et $x(0) = x_0$, il y a une et une seule solution à ce système d'équations différentielles, à savoir

$$t(s) = s + t_0 \qquad \text{et} \quad x(s) = cs + x_0 \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Si nous considérons maintenant les valeurs

$$u(s) = (x(s), t(s))$$

d'une solution u sur ces courbes, alors nous obtenons par la règle de dérivation

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} = u_t + cu_x = 0.$$

Ce qui signifie que la dérivée directionnelle de $u = u(x,t)$ dans la direction du vecteur tangent $(x'(s), t'(s)) = (c,1)$ est nulle pour tout point $(x(s), t(s))$ avec $s \in \mathbb{R}$.
Parce que $\frac{du}{ds} = 0$, nous savons que u est constante par rapport à s.
Noter que la solution u est constante sur les courbes

$$s \mapsto (x(s), t(s)) = (cs + x_0, s + t_0) \text{ avec } s \in \mathbb{R}.$$

Notons cette constante par u_0. Nous avons donc

$$x(s) = cs + x_0, \quad t(s) = s + t_0 \quad \text{et} \quad u = u_0.$$

Chacune des courbes dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la paramétrisation

$$s \longmapsto (x, t, u) = (cs + x_0, s + t_0, u_0) \text{ avec } s \in \mathbb{R}$$

est ce qu'on appellera une courbe caractéristique.

Nous n'avons pas encore tenu compte de la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$. De plus nous n'avons pas pour l'instant décrit u en fonction de x et t, mais plutôt en fonction de s.

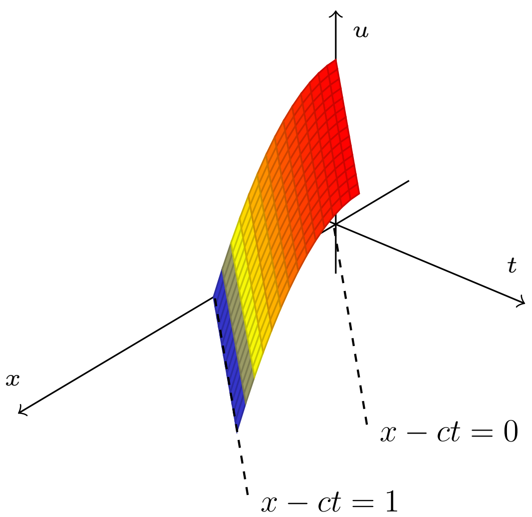
Les valeurs initiales possibles (x_0, t_0, u_0) peuvent aussi être paramétrées par une courbe de valeurs initiales : $x_0 = \tau, t_0 = 0, u_0 = f(\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}$. Donc si nous décrivons x, t, u en fonction de s et , nous obtenons

$$x(s, \tau) = cs + \tau, \quad t(s, \tau) = s \quad \text{et} \quad u(s, \tau) = f(\tau).$$

Il est possible de visualiser ces dernières équations en concevant les points (x, t, u) comme étant sur une surface paramétrée par

$$(s, \tau) \longmapsto (x(s, \tau), t(s, \tau), u(s, \tau)).$$

Ceci est illustré à la figure ci-dessous dans le cas où $f(x) = 1 - x^2, c = 1, 0 \leq s \leq 1$ et $0 \leq \tau \leq 1$.



Ainsi on peut écrire x et t en fonction de s et de τ :

$$s = t, \quad \tau = x - cs = x - ct.$$

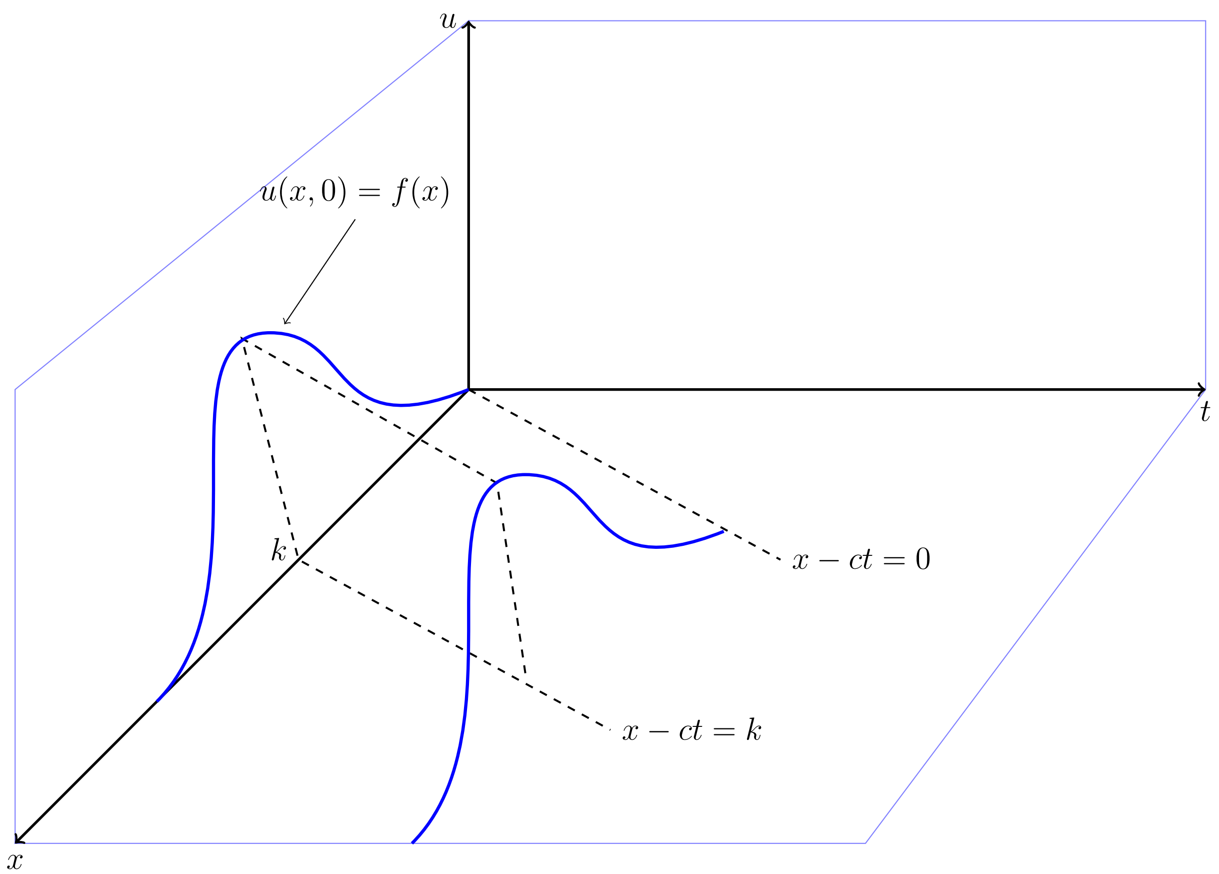
En substituant ces valeurs dans l'expression de u, nous obtenons

$$u(x,t) = f(\tau) = f(x - ct),$$

qui satisfait bien à la condition initiale $u(x,0) = f(x)$, et vérifie l'équation de transport

$$u_t + cu_x = -cf'(x - ct) + c \cdot f'(x - ct) = 0.$$

Dans cette solution $u(x,t) = f(x - ct)$, nous voyons que l'information initiale $u(x,0) = f(x)$ est transmise le long des courbes caractéristiques, c'est-à-dire que $u(x,t)$ est constant pour tous les points (x,t) tels que $x - ct$ est une constante. Ici les courbes caractéristiques sont de la forme $x - ct = k$ où k une constante. Nous avons illustré ceci à la figure ci-dessous.



Cette figure illustre aussi pourquoi l'EDP $u_t + cu_x = 0$ est appelée l'équation d'onde unidirectionnelle. Nous voyons bien la propagation de l'onde.

2.3.2 Équations à coefficients variables

Décrivons maintenant la méthode générale des courbes caractéristiques pour résoudre le problème à valeur initiale suivant

$$Au_x + Bu_y + Cu = D \quad \text{avec} \quad u\left(X\left(\tau\right), Y\left(\tau\right)\right) = f\left(\tau\right), \quad \forall \tau \in I, \tag{2.4}$$

où A, B, C, D sont des fonctions continûment différentiables de x et y; $u = u\left(x, y\right)$ est à déterminer, I est un intervalle et $X\left(\tau\right), Y\left(\tau\right)$ et $f\left(\tau\right)$ sont des fonctions continûment différentiables de $\tau \in I$ données.

Nous supposerons au départ que $\left(A\left(x, y\right), B\left(x, y\right)\right) \neq (0, 0)$ pour tout point $(x, y) \in \Omega$. Considérons toutes les courbes paramétrées ayant une paramétrisation

$$\begin{aligned} \gamma : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right), \end{aligned}$$

et dont le vecteur tangent

$$\gamma'\left(s\right) = \left(x'\left(s\right), y'\left(s\right)\right)$$

est

$$\Big(A\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right), \ B\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right)\Big) \quad \text{au point } \gamma\left(s\right) = \left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ici $()'$ désigne la dérivée par rapport à s. Nous obtenons ainsi un système de deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{ds} = A\left(x, y\right) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = B\left(x, y\right). \tag{2.5}$$

Si nous fixons $x\left(0\right) = x_0$ et $y\left(0\right) = y_0$, il y a alors une et une seule solution à ce système d'équations différentielles ordinaires, à cause de l'hypothèse que $\left(A\left(x, y\right), B\left(x, y\right)\right) \neq (0, 0)$ pour tout point $(x, y) \in \Omega$. Noter qu'il est en général difficile de résoudre explicitement un tel système.

Si maintenant nous considérons les valeurs $u\left(s\right) = \left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right)$ d'une solution u sur ces courbes, alors nous obtenons par les règles de dérivation

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} \\ &= A\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right) u_x\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right) + B\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right) u_y\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right) \\ &= -C\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right) u\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right) + D\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right). \end{aligned}$$

Noter que l'équation $Au_x+Bu_y = -Cu+D$ nous permet de conclure que la dérivée directionnelle de $u = u(x, y)$ dans la direction du vecteur tangent $\gamma'(s)$ au point $\gamma(s)$ est

$$-C(x(s), y(s))\, u(x(s), y(s)) + D(x(s), y(s)).$$

L'équation

$$\frac{du}{ds} = -C(x(s), y(s))\, u + D(x(s), y(s)) \tag{2.6}$$

est une équation différentielle ordinaire dont $u(s)$ est une solution. Les fonctions $x(s), y(s)$ sont déterminées par les équations (2.5). Si nous fixons $u(0) = u_0$, alors l'équation (2.6) a une et une seule solution $u(s)$.

Définition 14

Les courbes dans $\mathbb{R}^3$ données par les paramétrisations

$$s \longmapsto (x(s), y(s), u(s))$$

sont les courbes caractéristiques de l'équation (2.4).

Pour chaque point (x_0, y_0, u_0), il y a une seule courbe caractéristique $s \longmapsto (x(s), y(s), u(s))$ passant par ce point (x_0, y_0, u_0) à $s = 0$. Pour chaque $\tau \in I$, nous aurons une courbe caractéristique

$$s \longmapsto (x(s,\tau), y(s,\tau), u(s,\tau))$$

en prenant ci-dessus $x_0 = X(\tau), y_0 = Y(\tau)$ et $u_0 = f(\tau)$ et telle que

$$(x(0,\tau), y(0,\tau), u(0,\tau)) = (X(\tau), Y(\tau), f(\tau)) \quad \text{pour tout } \tau \in I.$$

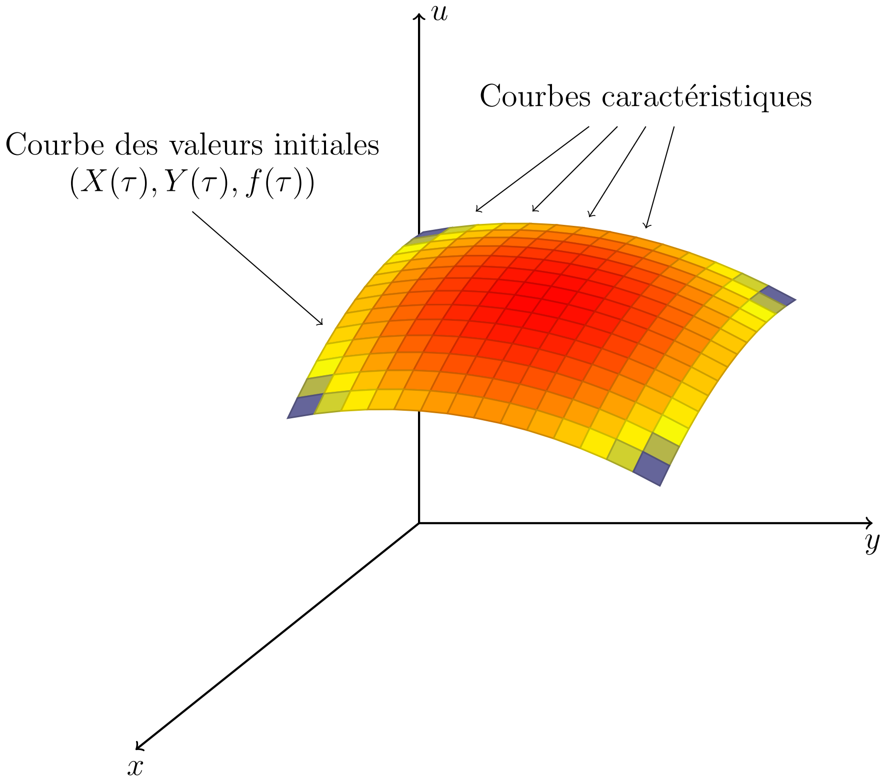
Nous obtenons ainsi une paramétrisation d'une surface

$$(s,\tau) \longmapsto (x(s,\tau), y(s,\tau), u(s,\tau))$$

dans l'espace des (x, y, u) contenant la courbe $\mathcal{C}$ des valeurs initiales

$$\tau \longmapsto (X(\tau), Y(\tau), f(\tau)),$$

ainsi que toutes les courbes caractéristiques $s \longmapsto (x(s,\tau), y(s,\tau), u(s,\tau))$. Nous avons illustré ceci à la figure ci-dessous.



Nous supposerons aussi que le jacobien

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(s,\tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial s} \neq 0$$

pour les points $(s,\tau) = (0,\tau)$ avec $\tau \in I$, alors il est possible d'écrire s et τ comme des fonctions $s = s\,(x,y)$ et $\tau = \tau\,(x,y)$ continûment différentiables de x et y. Ceci est une conséquence du théorème des fonctions inverses.

En d'autres mots, la fonction

$$(s,\tau) \longmapsto (x\,(s,\tau)\,, y\,(s,\tau))$$

a une fonction inverse

$$(x,y) \longmapsto (s\,(x,y)\,, \tau\,(x,y))$$

dans un voisinage de $(s,\tau) = (0,\tau)$. En substituant ces expressions pour s et τ dans $u\,(s,\tau)$, nous obtenons $u = u\,(x,y)$ comme fonction de x et y.

Remarque 15

Nous avons fait deux hypothèses dans notre description de la méthode des courbes caractéristiques.

La première est que le vecteur $(A(x,y), B(x,y)) \neq (0,0)$ sur le domaine Ω. Dans le cas où il y aurait un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $(A(x,y), B(x,y)) = (0,0)$, alors les équations (2.5) n'ont pas nécessairement une solution unique. Il peut y avoir plusieurs solutions ou encore une solution qui approche le point (x_0, y_0) en faisant une spirale autour de ce point.

Une seconde hypothèse que nous avons fait est que le jacobien $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,\tau)} \neq 0$ pour les points $(s,\tau) = (0,\tau)$ avec $\tau \in I$. Si ce jacobien s'annule pour un $(0,\tau_0)$, alors nous ne pouvons pas nécessairement écrire s et τ comme des fonctions de x et y. Dans ce cas, la méthode ne fonctionne pas nécessairement. De plus, il arrive dans certains de ces cas qu'il n'y ait pas de solution.

Exemple 20

On considère l'équation

$$u_x + xyu_y = xy^2.$$

Avec la condition

$$u(0,y) = \varphi(y).$$

Nous avons $A(x,y) = 1$ et $B(x,y) = xy$. Alors la condition $(A(x,y), B(x,y)) \neq (0,0)$ est satisfaite. Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{ds} = 1, \qquad x(0) = 0,$$
$$\frac{dy}{ds} = xy, \qquad y(0) = \tau.$$

La première équation a pour solution $x(s) = s$. La deuxième équation a pour solution

$$y(s) = \tau e^{\frac{s^2}{2}}.$$

La solution du système précédent est donc

$$x(s) = s \quad \text{et} \quad y(s) = \tau e^{\frac{s^2}{2}}.$$

Si on considère maintenant u comme une fonction de s, i.e. $u(s) = u(x(s), y(s))$, alors par les règles de dérivation et le fait que u est une solution de l'EDP, on obtient

$$\frac{du}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial y} = xy^2 = s\tau^2 e^{s^2} \text{ avec } u(0) = u(x(0), y(0)) = u(0,\tau) = \varphi(\tau).$$

Cette équation différentielle est équivalente à $du = \tau^2 s e^{s^2} ds$. En prenant une primitive de chaque membre et en tenant compte de $u(0) = \varphi(\tau)$ on obtient

$$u(s) = \varphi(\tau) + \frac{1}{2}\tau^2\left(e^{s^2} - 1\right).$$

Alors pour chaque τ, la courbe caractéristique est

$$\tau \longmapsto (x(s,\tau), y(s,\tau), u(s,\tau)) = \left(s, \tau e^{\frac{s^2}{2}}, \varphi(\tau) + \frac{1}{2}\tau^2\left(e^{s^2} - 1\right)\right).$$

La fonction $(s,\tau) \longmapsto (x(s,\tau), y(s,\tau)) = \left(s, \tau e^{\frac{s^2}{2}}\right)$ a une fonction inverse. En effet, $s = x$ et $\tau = ye^{-\frac{s^2}{2}} = ye^{-\frac{x^2}{2}}$.

En substituant les expressions pour s et τ dans $u(s,\tau)$ par leurs valeurs en fonction de x et y on obtient la solution du problème :

$$u(x,y) = \varphi\left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}y^2\left(1 - e^{-x^2}\right).$$

On peut vérifier que cette fonction est bien la solution du problème. En effet, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -yxe^{-\frac{x^2}{2}}\varphi'\left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}y^2\left(2xe^{-x^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-\frac{x^2}{2}}\varphi'\left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right) + y\left(1 - e^{-x^2}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} &= -yxe^{-\frac{x^2}{2}}\varphi'\left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}y^2\left(2xe^{-x^2}\right) + xye^{-\frac{x^2}{2}}\varphi'\left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right) + xyy\left(1 - e^{-x^2}\right)\\ &= xy^2.\end{aligned}$$

et

$$u(0,y) = \varphi\left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}y^2\left(1 - e^{-x^2}\right)\Big|_{x=0} = \varphi(y).$$

■

2.3.3 Équation des ondes

Nous allons maintenant décrire la solution de d'Alembert à l'équation des ondes dans le cas d'une corde vibrante. Le problème est le suivant. Il faut déterminer la fonction $u(x,t)$ telle que

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{avec} \quad u(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Ici c est un nombre réel strictement positif ($c > 0$) donné, $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions données. Physiquement $u(x,t)$ est le déplacement vertical d'une corde vibrante au point x de cette corde au temps t. Nous supposons que la corde est suffisamment longue pour que les extrémités n'interfèrent pas pendant l'intervalle de temps pour lequel nous considérons u. $f(x)$ est le déplacement initial de la corde et $g(x)$ est la vitesse (verticale) initiale.

Comme nous l'avons vu, nous pouvons récrire l'EDP $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ sous la forme du système

$$\begin{cases} u_t - cu_x = v, \\ v_t + cv_x = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Nous allons donc premièrement déterminer v en tenant compte des conditions initiales. À $t = 0$, nous obtenons de la première équation du système (2.7) que

$$v(x,0) = u_t(x,0) - cu_x(x,0) = g(x) - cf'(x),$$

car

$$u_t(x,0) = g(x) \quad \text{et} \quad u(x,0) = f(x) \quad \Rightarrow \quad u_x(x,0) = f'(x).$$

Ainsi la fonction $v(x,t)$ sera une solution du problème à valeur initiale suivant

$$v_t + cv_x = 0 \quad \text{avec} \quad v(x,0) = g(x) - cf'(x).$$

Comme nous l'avons vu précédemment la solution de ce problème est

$$v(x,t) = g(x-ct) - cf'(x-ct).$$

Maintenant il nous faut considérer la première équation du système (2.7) avec la solution $v(x,t)$ ci-dessus. Nous obtenons le nouveau problème à valeur initiale suivant

$$u_t - cu_x = g(x-ct) - cf'(x-ct) \quad \text{avec} \quad u(x,0) = f(x).$$

Nous devons premièrement déterminer les courbes caractéristiques. Il nous faut donc considérer les équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{ds} = -c, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = g(x(s) - ct(s)) - cf'(x(s) - ct(s)).$$

De plus la courbe des valeurs initiales est

$$\tau \longmapsto (X(\tau), T(\tau), u(X(\tau), T(\tau))) = (\tau, 0, f(\tau)).$$

De ceci, nous obtenons

$$x(s,\tau) = -cs + \tau, \quad t(s,\tau) = s,$$

ainsi que

$$\frac{du}{ds} = g\left(-cs + \tau - cs\right) - cf'\left(-cs + \tau - cs\right).$$

En intégrant, on trouve

$$u\left(s, \tau\right) = f\left(\tau\right) + \int_0^s \left(g\left(-2c\xi + \tau\right) - cf'\left(-2c\xi + \tau\right)\right) d\xi.$$

En considérant la substitution $\lambda = -2c\xi + \tau$ dans cette intégrale et parce que $d\lambda = -2c\, d\xi$, nous obtenons

$$u\left(s, \tau\right) = f\left(\tau\right) - \frac{1}{2c} \int_{\tau}^{\tau - 2cs} \left(g\left(\lambda\right) - cf'\left(\lambda\right)\right) d\lambda.$$

Il est facile de vérifier que $s = t$ et $\tau = x + cs = x + ct$. En substituant ceci dans l'expression pour u ci-dessus, nous obtenons que

$$u\left(x, t\right) = f\left(x + ct\right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \left(g\left(\lambda\right) - cf'\left(\lambda\right)\right) d\lambda.$$

Nous pouvons intégrer $f'\left(\lambda\right)$ par rapport à λ. Conséquemment

$$u\left(x, t\right) = \frac{1}{2}\left(\ f\left(x + ct\right) + f\left(x - ct\right)\ \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g\left(\lambda\right) d\lambda.$$

Ceci est la solution obtenue par d'Alembert.

Exemple 21

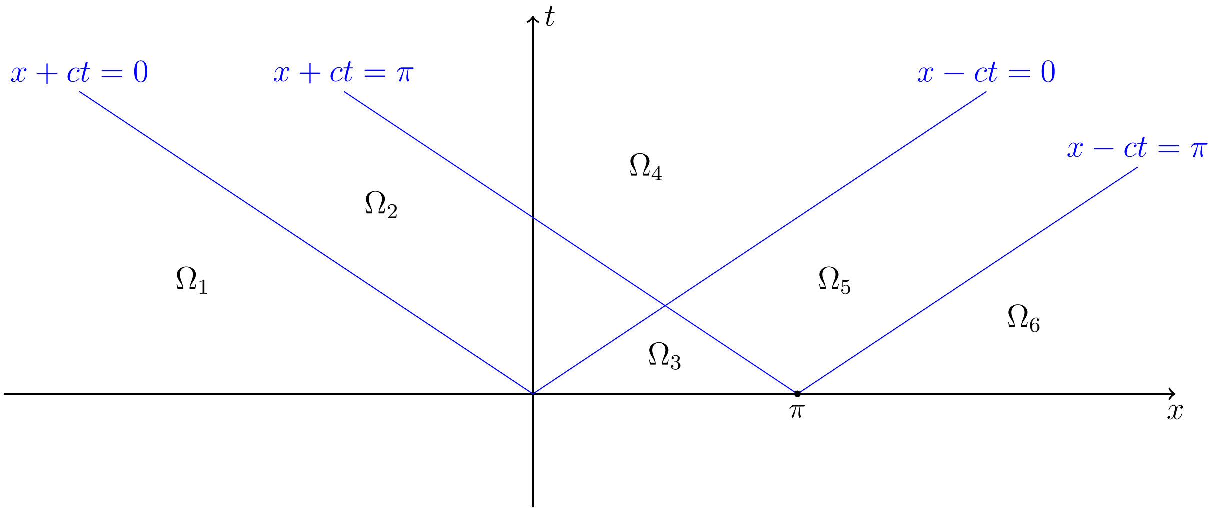
Par exemple, si le déplacement initial et la vitesse initiale sont respectivement

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g\left(x\right) = 0,$$

alors le déplacement vertical u sera

$$\begin{aligned} u\left(x, t\right) &= \frac{1}{2}\left(\ f\left(x + ct\right) + f\left(x - ct\right)\ \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \left(x, t\right) \in \Omega_1 \cup \Omega_4 \cup \Omega_6, \\ \frac{1}{2}\sin\left(x + ct\right) & \text{si } \left(x, t\right) \in \Omega_2, \\ \frac{1}{2}\left(\ \sin\left(x + ct\right) + \sin\left(x - ct\right)\ \right) & \text{si } \left(x, t\right) \in \Omega_3, \\ \frac{1}{2}\sin\left(x - ct\right) & \text{si } \left(x, t\right) \in \Omega_5, \end{cases} \end{aligned}$$

où $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ et Ω_6 sont les régions représentées dans la figure ci-dessous.



Nous avons ainsi deux ondes: l'une se déplaçant vers la droite et l'autre vers la gauche. ∎

2.4 Exercices

Exercice 2.1

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + cu_x + \lambda u = 0 \quad \text{avec} \quad u(x,0) = f(x),$$

où $\lambda > 0$, $f(x)$ est une fonction donnée et $u = u(x,t)$.

Exercice 2.2

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + cu_x = h(x,t) \quad \text{avec} \quad u(x,0) = f(x),$$

où c est un nombre réel non nul, $h(x,t)$ est une fonction donnée et $u = u(x,t)$.

Exercice 2.3

Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + e^x u_x = 0 \quad \text{avec} \quad u(x,0) = x, \quad \text{où} \quad u = u(x,t).$$

Exercice 2.4

Considérer la solution de d'Alembert de l'équation des ondes pour le déplacement initial $f(x)$ et la vitesse initiale $g(x)$ suivants :

a) $f(x) = x$ et $g(x) = 0$, **b)** $f(x) = 0$ et $g(x) = x$,

c) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -c \cos x$, **d)** $f(x) = \sin x$ et $g(x) = c \cos x$.

Exercice 2.5

Considérer l'EDP linéaire non-homogène

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h\left(x, t\right),$$

avec les conditions initiales

$$u\left(x, 0\right) = f\left(x\right) \quad \text{et} \quad u_t\left(x, 0\right) = g\left(x\right),$$

où c est un nombre réel positif, $h\left(x, t\right), f\left(x\right), g\left(x\right)$ sont des fonctions données et $u = u\left(x, t\right)$.

a) Montrer que ce problème est équivalent au système

$$\begin{cases} v_t + cv_x = h\left(x, t\right), & v\left(x, 0\right) = g\left(x\right) - cf'\left(x\right), \\ u_t - cu_x = v, & u\left(x, 0\right) = f\left(x\right). \end{cases}$$

b) Déterminer la solution du problème à valeur initiale

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = x + t \quad \text{avec} \quad u\left(x, 0\right) = x \quad \text{et} \quad u_t\left(x, 0\right) = \sin x$$

en procédant comme nous l'avons fait en décrivant la solution de d'Alembert pour l'équation des ondes.

Chapitre 3

Équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

Sommaire

Nous décrirons dans ce chapitre comment classifier les EDP linéaires d'ordre 2. Nous aurons trois types d'EDP: hyperboliques, paraboliques et elliptiques. Ensuite nous décrirons la forme canonique obtenue après un changement de coordonnées pour chacun de ces types d'EDP. L'équation (1.5) du premier chapitre décrit la forme générale de ces équations avec n variables indépendantes. Nous nous restreindrons au cas où $n = 2$. Ainsi les EDP que nous considérerons initialement seront de la forme suivante :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \tag{3.1}$$

avec A, B, C, D, E, F et G sont des fonctions de x et de y qui ne s'annulent pas simultanément. Nous supposerons aussi que u, A, B, C, D, E, F et G ont toutes au moins des dérivées partielles d'ordre $m = 2$ continues sur un domaine Ω du plan xy.

3.1 Classification des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$

On définit le discriminant Δ en (x, y) par

$$\Delta(x, y) = (B(x, y))^2 - 4A(x, y)\,C(x, y)\,. \tag{3.2}$$

Nous classons l'équation (3.2) selon le signe de $\Delta(x, y)$.

Définition 16

L'équation (3.2) est dite **hyperbolique** (respectivement **parabolique**, **elliptique**) au point $(x_0, y_0) \in \Omega$ si et seulement si $\Delta(x_0, y_0)$ est *positif* (respectivement *nul*, *négatif*).
Si une EDP est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) pour tous les points (x, y) du domaine Ω, on dit alors qu'elle est **hyperbolique** (respectivement **parabolique**, **elliptique**) sur Ω.

Exemple 22

Les trois équations fondamentales des mathématiques physiques sont classées comme suit :

- L'équation des ondes $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ est hyperbolique car

$$\Delta(x, y) = 0 - 4 \times 1 \times \left(-c^2\right) = 4c^2 > 0.$$

- L'équation de la chaleur $u_t - cu_{xx} = 0$ est parabolique car

$$\Delta(x, y) = 0 - 4 \times 0 \times (-c) = 0.$$

- L'équation de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ est de type elliptique car

$$\Delta(x, y) = 0 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0. \qquad \blacksquare$$

Remarque 17

Si les coefficients de l'équation ne sont pas constants, le type de l'équation peut être différent dans différentes parties du plan xy.

Exemple 23

Pour l'équation $xu_{xx} - 2u_{xy} + yu_{yy} = 0$ nous avons $A(x, y) = x, B(x, y) = -2, C(x, y) = y$ et $\Delta(x, y) = (B(x, y))^2 - 4A(x, y) C(x, y) = 4 - 4xy.$

Donc cette EDP est parabolique sur la courbe

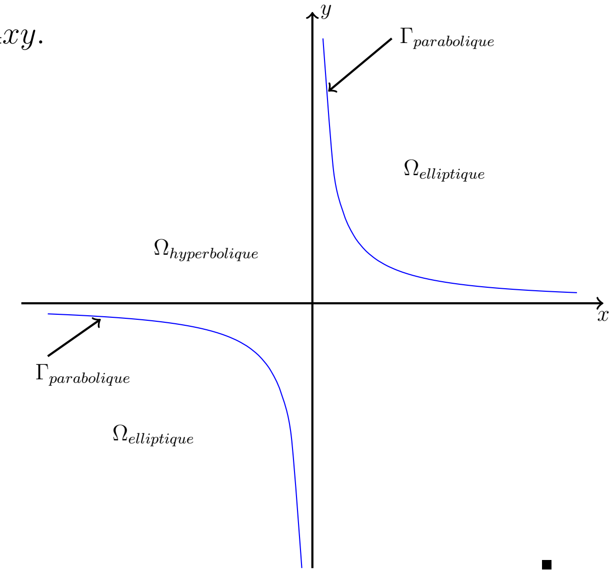
$$\Gamma_{parabilique} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; xy = 1\right\},$$

elle est elliptique sur le domaine

$$\Omega_{elliptique} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; xy > 1\right\}$$

et elle est hyperbolique sur le domaine

$$\Omega_{hyperbolique} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; xy < 1\right\}.$$



$\blacksquare$

3.2 Courbes caractéristiques

Soit $\Gamma : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ dont tout point est régulier, c'est-à-dire $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 > 0$, on cherche une solution $u(x, y)$ de l'EDP (3.1) :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$$

qui vérifie des conditions supplémentaires sur Γ. On suppose connue la valeur de u sur Γ ainsi que celle de ses dérivées u_x et u_y. Si u est complètement déterminée, ses dérivées secondes

u_{xx}, u_{xy} et u_{yy} doivent être déterminées sur Γ. Pour les trouver nous joignons à l'EDP (3.1) celles qu'on trouve en $u_x(\varphi(t), \psi(t))$ et $u_y(\varphi(t), \psi(t))$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi'(t) u_{xx}(\varphi(t), \psi(t)) + \psi'(t) u_{xy}(\varphi(t), \psi(t)) = \frac{d}{dt} u_x(\varphi(t), \psi(t)), \\ \varphi'(t) u_{xy}(\varphi(t), \psi(t)) + \psi'(t) u_{yy}(\varphi(t), \psi(t)) = \frac{d}{dt} u_y(\varphi(t), \psi(t)), \\ A u_{xx}(\varphi(t), \psi(t)) + B u_{xy}(\varphi(t), \psi(t)) + C u_{yy}(\varphi(t), \psi(t)) = -D u_x - E u_y - F u + G. \end{cases}$$

Soit

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) & 0 \\ 0 & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ A(\varphi(t), \psi(t)) & B(\varphi(t), \psi(t)) & C(\varphi(t), \psi(t)) \end{vmatrix} \\ &= C(\varphi'(t))^2 - B\varphi'(t)\psi'(t) + A(\psi'(t))^2. \end{aligned}$$

Si $\Delta \neq 0$ les dérivées secondes sur Γ sont déterminées de façon unique. Si $\Delta = 0$ le système précédent a soit aucune, soit une infinité de solutions.

Définition 18

On appelle courbes caractéristiques de l'EDP (3.1) les courbes régulières $\Gamma : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ de $\mathbb{R}^2$ qui annulent la quantité

$$\Delta(t) = C(\varphi'(t))^2 - B\varphi'(t)\psi'(t) + A(\psi'(t))^2.$$

On dit que Γ n'est caractéristique en aucun point si $\Delta(t) \neq 0$ pour tout t.

Théorème 19

- Si $A \neq 0$ les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle
$$A(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B(x,y)\frac{dy}{dx} + C(x,y) = 0.$$
- Si $C \neq 0$ ce sont les solutions de l'équation différentielle
$$C(x,y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - B(x,y)\frac{dx}{dy} + A(x,y) = 0.$$
- Si $A = C = 0$ ce sont les droites $x =$ constante et $y =$ constante.

Démonstration. Soit $\Gamma : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ une courbe caractéristique régulière de l'EDP (3.1). Supposons $A(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$ au voisinage de t_0. Si $\varphi'(t)$ alors $\psi'(t)$ doit aussi être nul et donc au voisinage de t_0 cela ne peut définir une courbe, donc dans un domaine où $A(x,y) \neq 0,\ \varphi'(t) \neq 0$. La tangente à Γ n'est pas verticale, Γ est définie par un fonction $y = f(x)$ c'est-à-dire $x = x,\ y = f(x)$ et $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f'(t)$ donc $\Delta = 0$ est alors équivalente à $A(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B(x,y)\frac{dy}{dx} + C(x,y) = 0$.

On raisonne de façon analogue au voisinage d'un point où $C \neq 0$. Dans un domaine où $A = C = 0,\ \Delta = 0$ devient $B(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\psi'(t)$ comme il s'agit d'une équation du second ordre $B \neq 0$ et donc soit φ' soit ψ' est nul. ■

On voit que la recherche de caractéristiques (dans les cas non triviaux, i.e. $A \neq 0$) se ramène à la résolution d'un problème du second ordre en $\frac{dy}{dx}$. L'existence de solutions réelles dépend alors du signe du discriminant $B^2 - 4AC$, qui caractérise la nature de l'équation aux dérivées partielles.

Ainsi, dans le cas hyperbolique, il existe deux caractéristiques réelles, dans le cas parabolique une caractéristique réelle et dans le cas elliptique deux caractéristiques complexes conjuguées :

$$\text{pour } a \neq 0, \begin{cases} B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} \\ B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm i\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \end{cases}$$

Exemple 24

On considère l'équation $u_{xx} - u_{yy} = c$, où c est une constante réelle.

Cette équation est hyperbolique dans $\mathbb{R}^2$ tout entier. Les courbes caractéristiques sont les solutions de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -1.$$

Ce sont donc les droites $y = \pm x +$ constante. ▪

Exemple 25

On considère l'équation $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = c$, où c est une constante réelle.

Pour cette équation $B^2 - 4AC = 4x^2y^2$. Cette équation est donc hyperbolique en dehors des axes de coordonnées.

Les courbes caractéristiques sont les solutions de

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0.$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ou encore :

$$xdx = \pm ydy.$$

Ce sont donc les courbes $x^2 \pm y^2 =$ constante. ▪

Exemple 26

On considère l'équation $u_{xx} + u_{yy} = c$, où c est une constante réelle.

Pour cette équation $B^2 - 4AC = -4$. Cette équation est donc elliptique.

Les courbes caractéristiques sont les solutions de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques (non réelles) :

$$\frac{dy}{dx} = i \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -i.$$

Ce sont donc les courbes $y = \pm ix+$ constante. ▪

3.3 Réduction à la forme standard

3.3.1 Changement de variables

Définition 20

Soient $\xi = \xi(x, y)$ et $\eta = \eta(x, y)$ deux nouvelles variables qui sont des fonctions de x et y ayant au moins leurs dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur le domaine Ω.

La transformation de coordonnées $(\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$ est dite régulière sur le domaine Ω si

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0 \text{ sur le domaine } \Omega.$$

Il est important d'observer que la classification ci-dessus est préservée par tout changement de coordonnées régulier. Plus précisément, si $\xi = \xi(x, y)$ et $\eta = \eta(x, y)$ sont deux nouvelles variables, alors nous obtenons une nouvelle équation en utilisant ces nouvelles variables et celle-ci est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) au point $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$ si et seulement l'équation (3.1) est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) au point (x_0, y_0). Nous allons maintenant vérifier ceci.

Proposition 21

Le type de l'EDP du second ordre (3.1) est invariant par les transformations régulières.

Démonstration. En utilisant les formules de dérivation composée, nous avons

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}$$

En substituant ces dérivées partielles dans l'équation (3.1), nous obtenons

$$A'u_{\xi\xi} + B'u_{\xi\eta} + C'u_{\eta\eta} + D'u_\xi + E'u_\eta + F'u = G',$$

où

$$\begin{aligned}
A' &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,\\
B' &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y,\\
C' &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2,\\
D' &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y,\\
E' &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y,\\
F' &= F \quad \text{et} \quad G' = G.
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors que $(B')^2 - 4A'C' = J^2(B^2 - 4AC)$. Parce que $J \neq 0$ sur le domaine Ω, nous avons que $(B')^2 - 4A'C' > 0$ (respectivement $= 0, < 0$) si et seulement si $B^2 - 4AC > 0$ (respectivement $= 0, < 0$). Ceci termine la preuve que la classification des équations en EDP hyperboliques, paraboliques ou elliptiques est invariante sous des changements de coordonnées réguliers. ∎

On va maintenant voir que les courbes caractéristiques permettent de définir un changement de variable conduisant à une forme simple de l'équation aux dérivées partielles (forme dite standard) ou certains termes parmi A, B ou C ont été annulés.

3.3.2 Formes standards

En utilisant ce qui précède, nous pouvons maintenant nous demander s'il existe des coordonnées (ξ, η) telles que $A' = 0$ ou $C' = 0$. Le but ultime de ceci est de déterminer une forme canonique ou standard d'une EDP comme dans l'équation (3.1). Nous pouvons tenter de déterminer un tel changement de coordonnées. Ainsi nous voulons que

$$A' = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \ \text{ ou } C' = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0.$$

Ces deux équations sont de la même forme

$$A\zeta_x^2 + B\zeta_x\xi_y + C\zeta_y^2 = 0 \quad \text{ avec } \zeta = \xi \ \text{ ou } \ \zeta = \eta. \tag{3.3}$$

Nous supposerons dans ce qui suit que $\zeta_y \neq 0$ pour les points du domaine Ω. En divisant les deux côtés de cette dernière équation par ζ_y^2, nous aurons

$$A\left(\frac{\zeta_x}{\zeta_y}\right)^2 + B\frac{\zeta_x}{\xi_y} + C = 0. \tag{3.4}$$

Rappelons que si f est une fonction continue de x et y ayant des dérivées partielles continues sur le domaine Ω et que nous considérons la courbe de niveau

$$\mathcal{C}_\alpha = \{(x, y) \in \Omega \ \ / \ \ f(x, y) = \alpha\},$$

alors la pente de la tangente y' en un point de cette courbe est

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\left.\frac{\partial f}{\partial x}\middle/\frac{\partial f}{\partial y}\right. .$$

En effet, si nous dérivons par rapport à x les deux côtés de l'équation $f(x, y) = \alpha$ définissant la courbe $\mathcal{C}_\alpha$, nous obtenons au moyen de la règle de chaînes

$$\frac{d(f(x, y))}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

ce qui donne

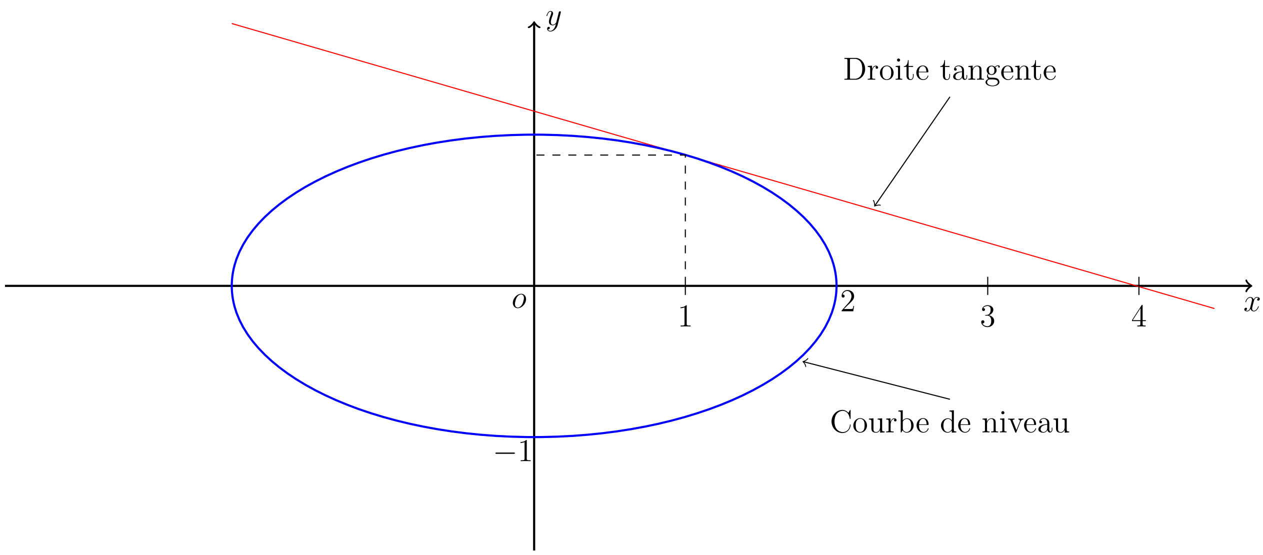
$$\frac{dy}{dx} = -\left.\frac{\partial f}{\partial x}\middle/\frac{\partial f}{\partial y}\right. .$$

Nous avons illustré ceci à la figure ci-dessous pour la courbe de niveau $f(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4$. Dans ce cas,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y \quad \text{ et } \quad y' = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}.$$

Ainsi une équation de la droite tangente à la courbe de niveau passant par le point $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x - 1).$$



Conséquemment si nous considérons la courbe de niveau $\mathcal{C}_\alpha = \{(x,y) \in \Omega \ / \ \zeta(x,y) = \alpha\}$, alors en utilisant la substitution

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\zeta_x}{\zeta_y}$$

dans l'équation (3.4) on trouve que la pente de la tangente y' à cette courbe de niveau satisfait l'équation

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0. \tag{3.5}$$

Puisque la formule ci-dessus est une équation quadratique, elle a $2, 1$ ou 0 solutions réelles, selon le signe du discriminant, $B^2 - 4AC$. Nous obtenons ainsi les équations différentielles ordinaires :

$$\text{pour } a \neq 0, \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} & \text{si } B^2 - 4AC > 0, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B}{2A} & \text{si } B^2 - 4AC = 0, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B \pm i\sqrt{4AC - B^2}}{2A} & \text{si } B^2 - 4AC < 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Celles-ci sont appelées les équations caractéristiques.

Équations hyperboliques

Étant donnée une équation hyperbolique ($B^2 - 4AC > 0$), les caractéristiques sont les solutions de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Après intégration, on obtient les courbes caractéristiques sous forme implicite :

$$\phi_1(x,y) = c_1 \quad \text{et} \quad \phi_2(x,y) = c_2,$$

où les $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Théorème 22

Soient $\phi_1(x,y) = c_1$ et $\phi_2(x,y) = c_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique ($B^2 - 4AC > 0$).
En posant $\xi = \phi_1(x,y)$ et $\eta = \phi_2(x,y)$, cette équation hyperbolique se met sous la forme

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{B'}\left(G' - D'u_\xi - E'u_\eta - F'u\right). \tag{3.7}$$

En posant ensuite $\alpha = \xi + \eta$ et $\beta = \xi - \eta$ elle se met sous la forme

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \frac{1}{B''}\left(G'' - D''u_\alpha - E''u_\beta - F''u\right). \tag{3.8}$$

Ce sont les deux formes standards d'une EDP hyperbolique.

Démonstration. Si $a = c = 0$, on a déjà la première forme standard. Si $a \neq 0$, alors,d'après ce qui précède (voir la section changement de variables), on voit que le choix $\xi = \phi_1(x,y)$ conduit à annuler $A(x,y)$. Également, le choix $\eta = \phi_2(x,y)$ conduit à annuler $C(x,y)$. Noter que si C est nul on garde $\eta = y$ et si A est nul on garde $\xi = x$.
Pour la suite, par dérivation composée :

$$\begin{aligned} u_\xi &= u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi, \quad u_y = u_\alpha \alpha_\eta + u_\beta \beta_\eta, \\ u_{\xi\eta} &= u_{\alpha\alpha}\alpha_\xi\alpha_\eta + u_{\alpha\beta}\left(\alpha_\xi\beta_\eta + \alpha_\eta\beta_\xi\right) + u_{\beta\beta}\beta_\xi\beta_\eta + u_\alpha\alpha_{\xi\eta} + u_\beta\beta_{\xi\eta} \\ &= u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'équation (3.7), nous obtenons l'équation (3.8). ■

Exemple 27

Illustrons comment obtenir l'équation canonique dans le cas de l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante : $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$.
Comme $B^2 - 4AC = 0^2 - 4y^2(-x^2) = 4x^2y^2 \geq 0$, nous obtenons facilement qu'aux points (x_0, y_0) pour lesquels $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, l'EDP est parabolique; alors qu'aux points (x_0, y_0) pour lesquels $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$, l'EDP est hyperbolique. Considérons un domaine Ω pour lequel l'EDP est hyperbolique à tous ses points. À ces points, les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 + \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2} = \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{0 - \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2} = -\frac{x}{y}.$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, nous obtenons ou encore :

$$ydy = xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c \quad \text{et} \quad ydy = -xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c',$$

où c, c' sont des constantes. Ainsi les deux courbes caractéristiques sont

$$\phi_1(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c \quad \text{et} \quad \phi_2(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c'.$$

Les coordonnées caractéristiques sont

$$\xi(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \eta(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

En utilisant ce changement de coordonnées, la dérivation composée et en observant que $x^2 = \eta - \xi$ et $y^2 = \eta + \xi$, alors l'EDP $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$ est transformée et nous obtenons la nouvelle équation

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\eta.$$

En effet, par la dérivation composée, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u_x &= -x u_\xi + x u_\eta, \quad u_y = y u_\xi + y u_\eta, \\
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(-x u_\xi + x u_\eta) = x^2 u_{\xi\xi} - 2x^2 u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - u_\xi + u_\eta, \\
u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(y u_\xi + y u_\eta) = y^2 u_{\xi\xi} + 2y^2 u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta} + u_\xi + u_\eta
\end{aligned}$$

et finalement

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = -4x^2 y^2 u_{\xi\eta} - \left(x^2 + y^2\right) u_\xi + \left(y^2 - x^2\right) u_\eta = 0.$$

Alors

$$u_{\xi\eta} = -\frac{x^2 + y^2}{4x^2 y^2} u_\xi + \frac{y^2 - x^2}{4x^2 y^2} u_\eta = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\eta,$$

qui est la première forme standard de l'EDP aux points pour lesquels celle-ci est hyperbolique. Si nous utilisons plutôt les coordonnées $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$, alors $\xi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\eta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ et l'EDP obtenue sera

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\alpha} u_\alpha + \frac{1}{2\beta} u_\beta.$$

Nous obtenons ceci par la dérivation composée car

$$u_\xi = u_\alpha + u_\beta, \quad u_\eta = u_\alpha - u_\beta \quad \text{et} \quad u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}.$$

Alors la première forme standard devient

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \tfrac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}(u_\alpha + u_\beta) - \tfrac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)}(u_\alpha - u_\beta) = -\frac{1}{2\alpha} u_\alpha + \frac{1}{2\beta} u_\beta.$$

Cette dernière équation est la seconde forme standard de l'EDP aux points pour lesquels celle-ci est hyperbolique. ∎

Nous allons maintenant discuter de ce qu'il faut faire dans les cas où l'équation est parabolique ou elliptique. Pour chacun de ces cas, nous obtenons soit une seule équation caractéristique ou deux équations caractéristiques complexes.

Équations paraboliques

Si notre EDP est parabolique sur le domaine Ω, alors $B^2-4AC=0$ en tout point de Ω et nous obtenons qu'une seule équation caractéristique

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{2A}.$$

Après intégration, on obtient une courbe caractéristique sous forme implicite :

$$\phi_1(x,y)=c_1,$$

où $c_1\in\mathbb{R}$ est une constante.
La première coordonnée caractéristique est alors $\xi=\phi_1(x,y)$. Pour obtenir la seconde coordonnée caractéristique $\eta=\phi_2(x,y)$, il suffit de prendre une fonction $\phi_2(x,y)$ quelconque ayant au moins des dérivées partielles d'ordre $m\leq 2$ continues sur le domaine Ω et telles que

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\neq 0\quad\text{sur }\Omega.$$

Théorème 23

Si $\xi=\phi_1(x,y)$ et $\eta=\phi_2(x,y)$ alors notre EDP parabolique peut s'écrire sous la forme :

$$u_{\eta\eta}=\frac{1}{C'}\left(G'-D'u_\xi-E'u_\eta-F'u\right).$$

Démonstration. On suppose que $A\neq 0$. Le changement de variable $\xi=\phi_1(x,y)$ permet alors d'annuler A'.
Sachant que $B^2-4AC=0$ et $B^2-4AC=J^2\left((B')^2-4A'C'\right)$, on voit que l'on a automatiquement $B'=0$ pour η choisi de manière à ce que le changement de variables soit régulier.
On se retrouve donc uniquement avec $C'\neq 0$, ce qui correspond à la forme standard. ■

Exemple 28

Soit l'EDP

$$u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}-u_x+2u_y=0.$$

Cette équation est linéaire d'ordre 2 et parce que $B^2 - 4AC = 6^2 - 4(1)(9) = 0$ pour tous les points de $\mathbb{R}^2$, elle est parabolique sur $\mathbb{R}^2$. Nous n'avons qu'une seule équation caractéristique

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} = \frac{6}{2} = 3,$$

et, en utilisant la méthode de séparation de variables, nous obtenons comme solution de cette équation

$$\phi_1(x, y) = 3x - y = c, \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

Nous avons donc pour l'instant qu'une seule coordonnée caractéristique

$$\xi = 3x - y.$$

Pour obtenir une seconde coordonnée caractéristique, nous avons beaucoup de choix. Par exemple, nous prendrons

$$\eta = x.$$

Cette fonction a bien des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues et

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ pour tout point de } \mathbb{R}^2.$$

En utilisant ce changement de coordonnées $\xi = 3x - y$, $\eta = x$ et la dérivation composée nous obtenons

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = 3u_\xi + u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi, \\
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(3u_\xi + u_\eta) = 3u_{\xi\xi}\xi_x + 3u_{\eta\xi}\eta_x + u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = 9u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\
u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(-u_\xi) = -u_{\xi\xi}\xi_y - u_{\eta\xi}\eta_y = u_{\xi\xi}, \\
u_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}(-u_\xi) = -u_{\xi\xi}\xi_x - u_{\eta\xi}\eta_x = -3u_{\xi\xi} - u_{\eta\xi}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y \\
&= 9u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 18u_{\xi\xi} - 6u_{\eta\xi} + 9u_{\xi\xi} - 3u_\xi - u_\eta - 2u_\xi \\
&= u_{\eta\eta} - 5u_\xi - u_\eta = 0.
\end{aligned}$$

La forme standard de l'équation $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$ est donc

$$u_{\eta\eta} - 5u_\xi - u_\eta = 0.$$

■

Équations elliptiques

Si notre EDP est elliptique sur le domaine Ω $(B^2 - 4AC < 0)$, alors ses deux équations caractéristiques

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - i\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B + i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

sont à valeurs complexes (avec une partie imaginaire non-nulle) et les solutions de ces équations sont

$$\phi_1 (x, y) = c_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 (x, y) = c_2,$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont complexes conjuguées entre elles.

Si nous posons $\xi = \phi_1 (x, y)$ et $\eta = \phi_2 (x, y)$, ces variables ne prennent pas des valeurs réelles. La modification nécessaire est de prendre ξ égal à la partie réelle de $\phi_1 (x, y)$ et η est la partie imaginaire de $\phi_1 (x, y)$.

Théorème 24

Si $\xi + i\eta = \phi_1 (x, y)$ et $\xi - i\eta = \phi_2 (x, y)$ alors notre EDP elliptique peut s'écrire sous la forme standard

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{1}{C'} \left(G' - D'u_\xi - E'u_\eta - F'u\right).$$

Démonstration. L'équation des caractéristiques (3.3) devient, en injectant les formules de changement de variables :

$$\begin{aligned} 0 &= A \left(\frac{\partial}{\partial x} (\xi + i\eta)\right)^2 + B \left(\frac{\partial}{\partial x} (\xi + i\eta)\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} (\xi + i\eta)\right) + C \left(\frac{\partial}{\partial y} (\xi + i\eta)\right)^2 \\ &= A' - C' + iB', \end{aligned}$$

ce qui implique puisque A', B' et C' sont des fonctions réelles : $A' = C'$ et $B' = 0$. ■

Exemple 29

Considérons l'équation $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$. Dans ce cas, $B^2 - 4AC = -4x^2$. Conséquemment cette équation est parabolique aux points (x_0, y_0) où $x_0 = 0$, sinon elle est elliptique. Sur un domaine pour lequel l'équation est elliptique, ses équations caractéristiques sontequations caracteristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = ix \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -ix.$$

Les solutions seront

$$\phi_1 (x, y) = y - \frac{i}{2} x^2 = c_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 (x, y) = y + \frac{i}{2} x^2 = c_2,$$

où les $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Les coordonnées caractéristiques sont alors

$$\xi = \mathrm{Re}\left(\phi_1\left(x,y\right)\right) = y \quad \text{ et } \quad \eta = \mathrm{Im}\left(\phi_2\left(x,y\right)\right) = \frac{1}{2}x^2.$$

Cette fonction a bien des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues et

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{vmatrix} = -x \neq 0 \text{ pour tout point de } \mathbb{R}^2 \setminus \left\{x = 0\right\}.$$

En utilisant ce changement de coordonnées $\xi = y$, $\eta = \frac{1}{2}x^2$ et la dérivation composée nous obtenons

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = x u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi, \\ u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x u_\eta\right) = u_\eta + x\left(u_{\xi\eta}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x\right) = u_\eta + x^2 u_{\eta\eta}, \\ u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(u_\xi\right) = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y = u_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_{xx} + x^2 u_{yy} = x^2\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\right) + u_\eta = 0 \Rightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -\frac{1}{2\eta}u_\eta.$$

■

3.3.3 Équations linéaires à coefficients constants

Dans le cas de coefficients constants, il est possible d'aller plus loin dans la simplification de l'expression d'une équation aux dérivées partielles : à l'aide d'un changement de fonction inconnue

$$u\left(x,y\right) = \varphi\left(\xi,\eta\right) e^{\lambda\xi + \mu\eta}$$

on peut éliminer les termes contenant des dérivées premières.

Exemple 30

On considère l'équation

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + u = 0.$$

Pour cette équation $B^2 - 4AC = 4 > 0$ pour tout point de $\mathbb{R}^2$. L'équation donnée est alors hyperbolique.

Les courbes caractéristiques sont données par

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \text{ et } \frac{dy}{dx} = -1.$$

Les solutions seront

$$\phi_1(x,y) = x - y = c_1 \quad \text{et} \quad \phi_2(x,y) = x + y = c_2,$$

où les $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Les coordonnées caractéristiques sont alors

$$\xi = x - y \quad \text{et} \quad \eta = x + y.$$

Cette transformation a bien des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues et

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ pour tout point de } \mathbb{R}^2.$$

On alors

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi + u_\eta, \\ u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi + u_\eta) = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}, \\ u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(-u_\xi + u_\eta) = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + u = 4u_{\xi\eta} + 2u_\xi + 2u_\eta + u = 0,$$

ce qui conduit à la forme standard

$$2u_{\xi\eta} + u_\xi + u_\eta + \tfrac{1}{2}u = 0.$$

On pose alors

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi,\eta)\, e^{\lambda\xi + \mu\eta}.$$

D'où

$$\begin{aligned} u_\xi &= (\varphi_\xi + \lambda\varphi)\, e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \qquad u_\eta = (\varphi_\eta + \mu\varphi)\, e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \\ u_{\xi\eta} &= (\varphi_{\xi\eta} + \mu\varphi_\xi + \lambda\varphi_\eta + \lambda\mu\varphi)\, e^{\lambda\xi+\mu\eta}. \end{aligned}$$

Par suite

$$2u_{\xi\eta} + u_\xi + u_\eta + \tfrac{1}{2}u = \big(2\varphi_{\xi\eta} + (1+2\mu)\,\varphi_\xi + (1+2\lambda)\,\varphi_\eta + \tfrac{1}{2}(1+2\mu)(1+2\lambda)\,\varphi\big)\, e^{\lambda\xi+\mu\eta}.$$

En choisissant $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$ on élimine les dérivées premières

$$2\varphi_{\xi\eta} e^{\lambda\xi+\mu\eta} = 0,$$

ce qui conduit à

$$\varphi_{\xi\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires, de classe $\mathcal{C}^2$. On a donc, finalement

$$u(x, y) = \varphi(\xi, \eta) e^{\lambda\xi + \mu\eta} = (f(x - y) + g(x + y)) e^{-x}.$$

■

3.3.4 Équations de dimension supérieure

Dans le cas d'équations aux dérivées partielles impliquant 3 variables (mais toujours d'ordre 2), la démarche est similaire lorsque les termes d'ordre deux sont de la forme

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + 2Du_{xz} + 2Eu_{yz} + Fu_{zz},$$

où A, B, C, D, E, F sont des fonctions de (x, y, z). On étudie les valeurs propres de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix}.$$

Dans un domaine où toutes les valeurs propres sont du même signe on parle de problème **elliptique**.

Dans un domaine où une valeur propre est nulle et les autres de même signe, on parle de problème **parabolique**.

Dans un domaine où au moins deux valeurs propres sont de signes opposés, on parle de problème **hyperbolique**.

3.4 Exercices

Exercice 3.1

Déterminer pour quels points (x, y) du plan, chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes est **a)** hyperbolique, **b)** parabolique et **c)** elliptique.

i) $xu_{xx} - xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 3u_x = 0,$ **ii)** $xu_{xx} + xyu_{xy} + yu_{yy} - (x + 3)u_y = u,$

iii) $e^x u_{xx} + xyu_{xy} - u_{yy} + 5yu_x = e^x,$ **iv)** $x^2u_{xx} + 2(x - y)u_{xy} + u_{yy} = 0,$

v) $u_{xx} - 5u_{xy} - (x + y)u_{yy} + 4u_x - xu_y = \sin x$

Exercice 3.2

Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes

a) déterminer les points du plan xy où ces équations sont hyperboliques,

b) déterminer les coordonnées caractéristiques de ces équations sur le domaine où celles-ci sont hyperboliques,

c) effectuer le changement de coordonnées pour celles trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

$$\textbf{a)}\ 2y^2u_{xx} - xyu_{xy} - x^2u_{yy} + 4yu_x - 3u = 0, \qquad \textbf{b)}\ x^2u_{xx} - xyu_{xy} - 6y^2u_{yy} + u_x = 0.$$

Exercice 3.3

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante.

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - u_x = 0,$$

a) déterminer les points du plan xy où cette équation est parabolique,

b) déterminer les coordonnées caractéristiques de cette équation sur le domaine où celle-ci est parabolique,

c) effectuer le changement de coordonnées pour les coordonnées trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

Exercice 3.4

Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 ci-dessous, déterminer le type de l'équation, les équations caractéristiques, les coordonnées caractéristiques et ensuite réduire l'équation sous sa forme canonique

$$\textbf{a)}\ u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - 3u = 0, \qquad \textbf{b)}\ u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0.$$

Références

[1] **Robert Bédard.** Notes pour le cours Équations aux dérivées partielles (MAT 4112). Université du Québec à Montréal, 2007.

[2] **Hervé Reinhard.** Équations aux dérivées partielles. Dunod Paris 1987.

[3] **Claire David et Pierre Gosselet.** Équations aux dérivées partielles : Cours et exercices corrigés. Dunod Paris 2015.