	Année universitaire : 2022-2023
	Date : 13/11/2022
Module : Analyse 5	

Examen Partiel

Exercice 1 (6 points) : Soient $a > 0$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

On note $F_a(\omega) = \mathcal{F}(f_a(x))(\omega)$ la transformée de Fourier de f_a.

a) Montrer que f_a est solution de l'équation différentielle $y'(x) + \frac{1}{2a} xy(x) = 0$.

b) En appliquant la transformation de Fourier é cette équation différentielle, en déduire une équation différentielle vérifiée par $F_a(\omega)$. *Indication* : $\mathcal{F}(x^n f(x))(\omega) = i^n \dfrac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}(f(x))(\omega)$.

c) Sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, calculer $F_a(0)$. En déduire $F_a(\omega)$.

d) Pour $b > 0$, en passant par la transformation de Fourier, calculer $f_a * f_b$.

Exercice 2 (4 points) :

À l'aide de la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = (1 - |x|)\, \chi_{]-1,1[}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x \notin]-1,1[\end{cases},$$

calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Exercice 3 (5 points) :

1) Déterminer a,b et c de sorte que $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+4} + \frac{c}{p+2}$.

2) En déduire la fonction causale f dont la transformée de Laplace est $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p+2)}$.

3) Déterminer alors la fonction causale g dont la transformée de Laplace est $G(p) = e^{-p} F(p)$.

Exercice 4 (5 points) :

1) Détérminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$\int_0^x t^m e^{-\alpha t} dt, \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^x e^{-4t} \sin(2t) dt.$$

2) En déduire la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-\alpha t} dt, \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-4t} \sin(2t) dt.$$