	Année universitaire : 2022-2023
	Date : 13/11/2022
Module : Analyse 5	

Corrigé de l'Examen Partiel

Exercice 1 (6 points) : a) 1 pt. **b)** 1.5 pts, **c)** 2 pts, **d)** 1.5 pts.

Soient $a > 0$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

On note $F_a(\omega) = \mathcal{F}(f_a(x))(\omega)$ la transformée de Fourier de f_a.

a) Montrer que f_a est solution de l'équation différentielle $y'(x) + \frac{1}{2a} xy(x) = 0$.

b) En appliquant la transformation de Fourier à cette équation différentielle, en déduire une équation différentielle vérifiée par $F_a(\omega)$. *Indication* : $\mathcal{F}(x^n f(x))(\omega) = i^n \dfrac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}(f(x))(\omega)$.

c) Sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, calculer $F_a(0)$. En déduire $F_a(\omega)$.

d) Pour $b > 0$, en passant par la transformation de Fourier, calculer $f_a * f_b$.

Corrigé.

a) En dérivant la fonction f_a par rapport à x on obtient

$$f_a'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}} \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{4a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}\left(-\frac{2x}{4a}\right) = \frac{-x}{2a\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

Alors

$$f_a'(x) + \frac{1}{2a} x f_a(x) = \frac{-x}{2a\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}} + \frac{1}{2a} x \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}} = 0,$$

ce qui montre que f_a est solution de l'équation différentielle $y'(x) + \frac{1}{2a} xy(x) = 0$.

b) On note $Y(\omega) = \mathcal{F}(y(x))(\omega)$.

En appliquant la transformation de Fourier à l'équation différentielle $y'(x) + \frac{1}{2a} xy(x) = 0$ on trouve

$$\mathcal{F}(y'(x)) + \frac{1}{2a} \mathcal{F}(xy(x)) = 0.$$

D'après les propriétés de la transformée de Fourier on a

$$\mathcal{F}(y'(x)) = i\omega \mathcal{F}(y(x)) = i\omega Y(\omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(xy(x))(\omega) = i\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(y(x))(\omega) = iY'(\omega).$$

Il vient alors que $i\omega Y(\omega) + \frac{1}{2a} iY'(\omega) = 0$ ou beaucoup mieux

$$Y'(\omega) + 2a\omega Y(\omega) = 0,$$

qui est l'équation différentielle vérifiée par $F_a(\omega)$.

c) On a
$$F_a(\omega)=\mathcal{F}(f_a(x))(\omega)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_a(x)\,e^{-i\omega x}dx=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}e^{-i\omega x}dx.$$

Pour $\omega=0$, on obtient
$$F_a(0)=\tfrac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{4a}}dx.$$

On prend $\alpha=\frac{1}{4a}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}$ on trouve
$$F_a(0)=\tfrac{1}{2\sqrt{a\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4a}}}=\tfrac{1}{2\sqrt{a\pi}}\sqrt{4a\pi}=1.$$

Pour déduire $F_a(\omega)$ on résout l'équation différentielle $Y'(\omega)+2a\omega Y(\omega)=0$.

On peut résoudre cette dernière équation différentielle par séparation de variables :
$$Y'(\omega)+2a\omega Y(\omega)=0\Rightarrow\frac{Y'(\omega)}{Y(\omega)}=-2a\omega\Rightarrow\int\frac{dY(\omega)}{Y(\omega)}=-\int 2a\omega d\omega+\text{constante}$$
$$\Rightarrow\ln|Y(\omega)|=-a\omega^2+c.$$

Puis on compose par l'exponentielle des deux côtés pour obtenir
$$|Y(\omega)|=e^c\cdot e^{-a\omega^2}\quad\text{ou}\quad Y(\omega)=Ke^{-a\omega^2}\ \ \text{avec } K=\pm e^c=Y(0).$$

On en déduit que
$$F_a(\omega)=F_a(0)\,e^{-a\omega^2}=e^{-a\omega^2}.$$

Ce qui signifie que
$$\mathcal{F}(f_a(x))(\omega)=\mathcal{F}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\right)(\omega)=e^{-a\omega^2}.$$

d) Pour $b>0$, en passant par la transformation de Fourier, on a
$$\mathcal{F}(f_a*f_b)=\mathcal{F}(f_a)\,\mathcal{F}(f_b)=e^{-a\omega^2}e^{-b\omega^2}=e^{-(a+b)\omega^2}.$$

On remarque que $e^{-(a+b)\omega^2}=\mathcal{F}(f_{a+b})$. Alors en passant par la transformation de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$, on trouve
$$f_a*f_b=f_{a+b}=\tfrac{1}{\sqrt{2(a+b)}}e^{-\frac{x^2}{4(a+b)}}.$$

Exercice 2 (4 points) : 2 pts + 2 pts.

À l'aide de la transformée de Fourier de la fonction
$$f(x)=(1-|x|)\,\chi_{]-1,1[}(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si } x\in\,]-1,1[\\ 0 & \text{si } x\notin\,]-1,1[\end{cases},$$

calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx.$

Corrigé.

On remarque que la fonction f est paire, alors

$$\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\left(\omega\right)=\mathcal{F}_{\cos}\left(f\left(x\right)\right)\left(\omega\right)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f\left(x\right)\cos\left(\omega x\right)dx=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_{0}^{1}\left(1-x\right)\cos\left(\omega x\right)dx.$$

Par intégration par parties on a

$$\begin{aligned}\int\left(1-x\right)\cos\left(\omega x\right)dx&=\int\left(1-x\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\left(\omega x\right)}{\omega}\right)dx=\left(1-x\right)\left(\frac{\sin\left(\omega x\right)}{\omega}\right)-\int\frac{\sin\left(\omega x\right)}{\omega}\frac{d}{dx}\left(1-x\right)dx\\&=\left(1-x\right)\left(\frac{\sin\left(\omega x\right)}{\omega}\right)+\int\frac{\sin\left(\omega x\right)}{\omega}dx\\&=\left(1-x\right)\left(\frac{\sin\left(\omega x\right)}{\omega}\right)-\frac{\cos\left(\omega x\right)}{\omega^{2}}.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\left(\omega\right)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left[\left(1-x\right)\left(\frac{\sin\left(\omega x\right)}{\omega}\right)-\frac{\cos\left(\omega x\right)}{\omega^{2}}\right]_{x=0}^{x=1}=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(-\frac{\cos\omega}{\omega^{2}}+\frac{1}{\omega^{2}}\right)$$

En utilisant l'identité $1-\cos\left(2\theta\right)=2\sin^{2}\theta$ pour $\theta=\frac{\omega}{2}$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\left(\omega\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2\sin^{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}\sin^{2}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\omega^{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{2}.$$

Ces calculs ne sont valables que si $\omega\neq0$. Si $\omega=0$, on doit calculer $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f\left(x\right)dx$. Elle vaut $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[x-\frac{1}{2}x^{2}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ce qui est cohérent avec l'expression précédente en faisant tendre ω vers 0.

En utilisant l'égalité de Parseval $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(x\right)\right|^{2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\left(\omega\right)\right|^{2}d\omega$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{2}\right|^{2}d\omega=\int_{-1}^{1}\left(1-\left|x\right|\right)^{2}dx=2\int_{0}^{1}\left(1-x\right)^{2}dx=\left[\frac{2}{3}\left(x-1\right)^{3}\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}.$$

Ou encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{4}d\omega=\frac{4}{3}\pi.$$

En faisant le changement de variable $\frac{\omega}{2}=x$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{4}dx=\frac{2}{3}\pi.$$

Exercice 3 (5 points) : 1) 1.5 pts. **2)** 2 pts, **3)** 1.5 pts.

1) Déterminer a, b et c de sorte que $F(p)=\frac{p}{(p^{2}+4)(p+2)}=\frac{ap+b}{p^{2}+4}+\frac{c}{p+2}$.

2) En déduire la fonction causale f dont la transformée de Laplace est $F(p)=\frac{p}{(p^{2}+4)(p+2)}$.

3) Déterminer alors la fonction causale g dont la transformée de Laplace est $G(p)=e^{-p}F(p)$.

Corrigé.

1) Pour déterminer c on multiplie les deux cotés de l'égalité $\frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+4} + \frac{c}{p+2}$ par $p+2$ puis on remplace p par -2. On trouve que $c = \frac{-2}{(-2)^2+4} = \frac{-1}{4}$.

Pour déterminer a on multiplie les deux cotés de l'égalité $\frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+4} + \frac{c}{p+2}$ par p puis on fait p tendre vers $+\infty$. On obtient $a = -c = \frac{1}{4}$.

Il reste à déterminer b. Par exemple pour $p = 0$, on obtient $0 = \frac{b}{4} + \frac{c}{2}$, ce qui donne $b = -2c = \frac{1}{2}$.

Alors

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{\frac{1}{4}p + \frac{1}{2}}{p^2+4} + \frac{\frac{-1}{4}}{p+2}.$$

2) La fraction $F(p)$ peut être écrite sous la forme

$$F(p) = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{p^2+2^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{p^2+2^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p+2}.$$

Sachant que $\mathcal{L}(\cos(ax))(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$, $\mathcal{L}(\sin(ax))(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$ et $\mathcal{L}(e^{ax})(p) = \frac{1}{p-a}$, il vient que l'original recherché est

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)\mathcal{U}(x),$$

où $\mathcal{U}(x)$ est la fonction d'Heaviside définie par

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

3) Pour trouver l'original de la fonction $G(p) = e^{-p}F(p)$ on utilise le théorème de translation ou de retard

$$\mathcal{L}(f(x-a)\mathcal{U}(x-a))(p) = e^{-ap}\mathcal{L}(f(x)\mathcal{U}(x))(p)$$

et on trouve que l'original est

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1)\mathcal{U}(x-1) \\ &= \left(\frac{1}{4}\cos(2x-2) + \frac{1}{4}\sin(2x-2) - \frac{1}{4}e^{-2x+2}\right)\mathcal{U}(x-1). \end{aligned}$$

Exercice 4 (5 points) : 1) 1.5+1.5 pts. **2)** 1+1 pts.

1) Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_0^x t^m e^{-\alpha t} dt, \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*, \qquad g(x) = \int_0^x e^{-4t}\sin(2t)dt.$$

2) En déduire la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-\alpha t} dt, \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-4t}\sin(2t)dt.$$

Corrigé.

1) D'après les propriétés de la transformée de Laplace on a

$$\mathcal{L}\left(\int\limits_0^x h(t)\,dt\right)(p)=\frac{\mathcal{L}(h(t))(p)}{p},\quad \mathcal{L}\left(e^{-\alpha x}h(x)\right)(p)=\mathcal{L}(h(x))(p+\alpha)\quad \text{et}\quad \mathcal{L}(x^m)(p)=\frac{m!}{p^{m+1}}.$$

Alors

$$\mathcal{L}\left(\int\limits_0^x t^m e^{-\alpha t}dt\right)(p)=\frac{1}{p}\mathcal{L}\left(t^m e^{-\alpha t}dt\right)(p)=\frac{1}{p}\mathcal{L}(t^m)(p+\alpha)=\frac{m!}{p(p+\alpha)^{m+1}}$$

et

$$\mathcal{L}\left(\int\limits_0^x e^{-4t}\sin(2t)dt\right)(p)=\frac{1}{p}\mathcal{L}\left(e^{-4t}\sin(2t)\right)(p)=\frac{1}{p}\mathcal{L}(\sin(2t))(p+4)=\frac{2}{p\left((p+4)^2+4\right)}.$$

2) En utilisant le théorème de la valeur finale $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{p\to0^+} p\mathcal{L}(f(x))(p)$ on trouve

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-\alpha t}dt=\lim_{x\to+\infty}\int\limits_0^x t^m e^{-\alpha t}dt=\lim_{p\to0^+} p\mathcal{L}\left(\int\limits_0^x t^m e^{-\alpha t}dt\right)(p)=\lim_{p\to0^+} p\left(\frac{m!}{p(p+\alpha)^{m+1}}\right)=\frac{m!}{\alpha^{m+1}}$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-4t}\sin(2t)dt=\lim_{x\to+\infty}\int\limits_0^x e^{-4t}\sin(2t)dt=\lim_{p\to0^+} p\mathcal{L}\left(\int\limits_0^x e^{-4t}\sin(2t)dt\right)(p)$$

$$=\lim_{p\to0^+} p\left(\frac{2}{p\left((p+4)^2+4\right)}\right)=\frac{1}{10}.$$