	Année universitaire : 2022-2023
	Date : 13/11/2022
Module : Analyse 5	

Examen Partiel

Exercice 1 (6.5 points) : Soit $a > 0$. Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \notin [0,+\infty[\end{cases},$$

$$g(x) = e^{ax}\chi_{]-\infty,0[}(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \in \left]-\infty,0\right[\\ 0 & \text{si } x \notin \left]-\infty,0\right[\end{cases}.$$

a) Calculer les transformées de Fourier de f et g.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega$.

c) Vérifier que $e^{-a|x|} = f(x) + g(x)$.

d) En déduire les transformées de Fourier de $xe^{-a|x|}$ et $x^2 e^{-a|x|}$.

<u>*Indication*</u> : $\mathcal{F}(x^n f(x))(\omega) = i^n \dfrac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}(f(x))(\omega)$.

Exercice 2 (3.5 points) :

À l'aide de la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1,1] \end{cases},$$

calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

Exercice 3 (5 points) :

1) Déterminer a,b et c de sorte que $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+4} + \frac{c}{p+2}$.

2) En déduire la fonction causale f dont la transformée de Laplace est $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p+2)}$.

3) Déterminer alors la fonction causale g dont la transformée de Laplace est $G(p) = e^{-p}F(p)$.

Exercice 4 (5 points) :

1) Détérminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$\int_0^x t^m e^{-\alpha t} dt, \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^x e^{-4t}\sin(2t) dt.$$

2) En déduire la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-\alpha t} dt, \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-4t}\sin(2t) dt.$$