	Année universitaire : 2022-2023
	Date : 13/11/2022
Module : Analyse 5	

Corrigé de l'Examen Partiel

Exercice 1 (6.5 points) : a) 2 pts. **b)** 1.5 pts, **c)** 1 pts, **d)** 2 pts.

Soit $a > 0$. Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \notin [0,+\infty[\end{cases},$$

$$g(x) = e^{ax}\chi_{]-\infty,0[}(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ 0 & \text{si } x \notin]-\infty,0[\end{cases}.$$

a) Calculer les transformées de Fourier de f et g.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega$.

c) Vérifier que $e^{-a|x|} = f(x) + g(x)$.

d) En déduire les transformées de Fourier de $xe^{-a|x|}$ et $x^2 e^{-a|x|}$.

Indication : $\mathcal{F}(x^n f(x))(\omega) = i^n \dfrac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}(f(x))(\omega)$.

Corrigé.

a) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x))(\omega) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)x} dx \\ &= \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)} e^{-(a+i\omega)x}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g(x))(\omega) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-i\omega x} dx = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-i\omega x} dx = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x} dx \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)} e^{(a-i\omega)x}\right]_{x=-\infty}^{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)}.\end{aligned}$$

b) On remarque que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x)+g(x))(\omega) &= \mathcal{F}(f(x))(\omega) + \mathcal{F}(g(x))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)} \\ &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}.\end{aligned}$$

Alors la représentation de $f+g$ par une intégrale de Fourier est

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}e^{i\omega x}d\omega=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+a^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

Pour $x=0$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+a^2}d\omega=\frac{\pi}{a}\left(f(0)+g(0)\right)=\frac{\pi}{a}.$$

c) On a

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=e^{-ax}\chi_{[0,+\infty[}(x)+e^{ax}\chi_{]-\infty,0[}(x)\\&=\begin{cases}e^{ax} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ e^{-ax} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}=\begin{cases}e^{-a(-x)} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ e^{-ax} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}\\&=e^{-a|x|}.\end{aligned}$$

d) Comme $e^{-a|x|}=f(x)+g(x)$, alors

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\omega)=\mathcal{F}\left(f(x)+g(x)\right)(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}.$$

Pour $n=1$ et $n=2$ avec $f(x)=e^{-a|x|}$ dans la formule $\mathcal{F}\left(x^n f(x)\right)(\omega)=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}\left(f(x)\right)(\omega)$ on obtient

$$\mathcal{F}\left(xe^{-a|x|}\right)(\omega)=i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\omega)=i\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}\right)=-2ai\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\left(\omega^2+a^2\right)^2}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x^2e^{-a|x|}\right)(\omega)&=-\frac{d^2}{d\omega^2}\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\omega)=i\frac{d}{d\omega}\left(-2ai\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\tfrac{\omega}{(\omega^2+a^2)^2}\right)=2a\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{d}{d\omega}\left(\tfrac{\omega}{(\omega^2+a^2)^2}\right)\\&=2a\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{\left(\omega^2+a^2\right)^2-\omega(4\omega)\left(\omega^2+a^2\right)}{\left(\omega^2+a^2\right)^4}=2a\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{a^2-3\omega^2}{\left(a^2+\omega^2\right)^3}.\end{aligned}$$

Exercice 2 (3.5 points) : 2 pts + 1.5 pts.

À l'aide de la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x)=\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{si } x\notin[-1,1]\end{cases},$$

calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$

Corrigé.

On remarque que la fonction f est paire, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f(x)\right)(\omega)&=\mathcal{F}_{\cos}\left(f(x)\right)(\omega)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\omega x)\,dx=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^1\cos(\omega x)\,dx\\&=\left[\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\right]_{x=0}^{x=1}=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}.\end{aligned}$$

Ces calculs ne sont valables que si $\omega \neq 0$. Si $\omega = 0$, on doit calculer $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Elle vaut $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, ce qui est cohérent avec l'expression précédente en faisant tendre ω vers 0.

En utilisant l'égalité de Parseval $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f(x))(\omega)|^2\,d\omega$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}\right|^2 d\omega = \int_{-1}^{1} |1|^2\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2.$$

Ou encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega = 2,$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \pi.$$

Exercice 3 (5 points) : 1) 1.5 pts. **2)** 2 pts, **3)** 1.5 pts.

1) Déterminer a, b et c de sorte que $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+4} + \frac{c}{p+2}$.

2) En déduire la fonction causale f dont la transformée de Laplace est $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p+2)}$.

3) Déterminer alors la fonction causale g dont la transformée de Laplace est $G(p) = e^{-p}F(p)$.

Corrigé.

1) Pour déterminer c on multiplie les deux cotés de l'égalité $\frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+4} + \frac{c}{p+2}$ par $p+2$ puis on remplace p par -2. On trouve que $c = \frac{-2}{(-2)^2+4} = \frac{-1}{4}$.

Pour déterminer a on multiplie les deux cotés de l'égalité $\frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+4} + \frac{c}{p+2}$ par p puis on fait p tendre vers $+\infty$. On obtient $a = -c = \frac{1}{4}$.

Il reste à déterminer b. Par exemple pour $p = 0$, on obtient $0 = \frac{b}{4} + \frac{c}{2}$, ce qui donne $b = -2c = \frac{1}{2}$.

Alors

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p+2)} = \frac{\frac{1}{4}p + \frac{1}{2}}{p^2+4} + \frac{\frac{-1}{4}}{p+2}.$$

2) La fraction $F(p)$ peut être écrite sous la forme

$$F(p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+2^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{p^2+2^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+2}.$$

Sachant que $\mathcal{L}(\cos(ax))(p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \mathcal{L}(\sin(ax))(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$ et $\mathcal{L}(e^{ax})(p) = \frac{1}{p-a}$, il vient que l'original recherché est

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)\mathcal{U}(x),$$

où $\mathcal{U}(x)$ est la fonction d'Heaviside définie par

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

3) Pour trouver l'original de la fonction $G(p) = e^{-p}F(p)$ on utilise le théorème de translation ou de retard

$$\mathcal{L}\left(f\left(x-a\right)\mathcal{U}\left(x-a\right)\right)(p) = e^{-ap}\mathcal{L}\left(f\left(x\right)\mathcal{U}\left(x\right)\right)(p)$$

et on trouve que l'original est

$$\begin{aligned} g\left(x\right) &= f\left(x-1\right)\mathcal{U}\left(x-1\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\cos\left(2x-2\right) + \frac{1}{4}\sin\left(2x-2\right) - \frac{1}{4}e^{-2x+2}\right)\mathcal{U}\left(x-1\right). \end{aligned}$$

Exercice 4 (5 points) : 1) 1.5+1.5 pts. **2)** 1+1 pts.

1) Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$f\left(x\right) = \int_0^x t^m e^{-\alpha t}dt, \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*, \qquad g\left(x\right) = \int_0^x e^{-4t}\sin(2t)dt.$$

2) En déduire la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-\alpha t}dt, \alpha > 0, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-4t}\sin(2t)dt.$$

Corrigé.

1) D'après les propriétés de la transformée de Laplace on a

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x h\left(t\right)dt\right)(p) = \frac{\mathcal{L}\left(h\left(t\right)\right)(p)}{p}, \quad \mathcal{L}\left(e^{-\alpha x}h\left(x\right)\right)(p) = \mathcal{L}\left(h\left(x\right)\right)(p+\alpha) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\left(x^m\right)(p) = \frac{m!}{p^{m+1}}.$$

Alors

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x t^m e^{-\alpha t}dt\right)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left(t^m e^{-\alpha t}dt\right)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left(t^m\right)(p+\alpha) = \frac{m!}{p\left(p+\alpha\right)^{m+1}}$$

et

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x e^{-4t}\sin(2t)dt\right)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left(e^{-4t}\sin(2t)\right)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left(\sin(2t)\right)(p+4) = \frac{2}{p\left(\left(p+4\right)^2+4\right)}.$$

2) En utilisant le théorème de la valeur finale $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{p\to0^+} p\mathcal{L}\left(f\left(x\right)\right)(p)$ on trouve

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-\alpha t}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^m e^{-\alpha t}dt = \lim_{p\to0^+} p\mathcal{L}\left(\int_0^x t^m e^{-\alpha t}dt\right)(p) = \lim_{p\to0^+} p\left(\frac{m!}{p\left(p+\alpha\right)^{m+1}}\right) = \frac{m!}{\alpha^{m+1}}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-4t}\sin(2t)dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-4t}\sin(2t)dt = \lim_{p\to0^+} p\mathcal{L}\left(\int_0^x e^{-4t}\sin(2t)dt\right)(p) \\ &= \lim_{p\to0^+} p\left(\frac{2}{p\left(\left(p+4\right)^2+4\right)}\right) = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$