
Département de Mathématiques et Informatique

Module: Analyse 5

Série N°1
Transformées de Fourier

Exercice 1 : Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes, et représenter f à l'aide d'une intégrale de Fourier.

1). $f(t) = e^{-a|t|}$, ou $a > 0$

2). $f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}$.

3). $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{si } |t| \leq \pi \\ 0, & \text{si } |t| > \pi \end{cases}$

4). $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } |t| = 1 \\ 0, & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$

5). $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ -1, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$

6). $f(t) = \begin{cases} 1+t, & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$

Exercice 2 1. Trouver la transformée de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$

2. Représenter les graphes de f et de sa transformée pour $a = 3$.

Exercice 3 Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes

1. $f(x) = e^{-x^2}$

2. $f(x) = xe^{-4x^2}$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$

4. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$

5. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$

Exercice 4 1. Utiliser les résultats de l'exercice 2 pour évaluer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha a) \cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Exercice 5 : Représenter les fonctions suivantes par une intégrale de Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 < |x| < a; \\ 0, & \text{pour } |x| > a. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{pour } 0 < |x| < a; \\ 0, & \text{pour } |x| > a. \end{cases}$$

$$h(t) = e^{-|x|} + e^{-2x^2},$$

$$J(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pour } 0 < x < a; \\ -x^2, & \text{pour } -a < x < 0; \\ 0, & \text{pour } |x| > a. \end{cases}$$

Exercice 6 1. En utilisant la transformée de Fourier montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \pi \omega}{\omega} \sin \omega t d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{pour } 0 < t < \pi; \\ 0, & \text{pour } t > \pi. \end{cases}$$

2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-t}$$

Exercice 7 Soit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1. Trouver la transformée de Fourier de f en sinus
2. Trouver la transformée de Fourier de f en cosinus
3. Donner la représentation graphique de f et de ses transformées.
4. Utiliser les résultats précédents pour montrer que :

$$a) \int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \quad b) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 8 Soit $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

1. Trouver la transformée de Fourier de f .
2. Evaluer l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^3}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Exercice 9 Soit $f(x) = \exp(-mx)$, $m > 0$

1. Trouver la transformée de Fourier en cosinus de f .
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(pv)}{v^2 + \beta^2} dv = \frac{\pi}{2\beta} \exp(-p\beta)$, $p > 0, \beta > 0$.
3. Par application de l'identité de Parseval, évaluer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

Exercice 10 1. Trouver la transformée de Fourier en sinus de $\exp(-x)$, $x \geq 0$

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(mx)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} \exp(-m)$, $m > 0$.
3. Par application de l'identité de Parseval, évaluer $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}$

Exercice 11 1. La convolution de deux fonctions f et g est définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - u)g(u) du \quad (\text{sous réserve de convergence})$$

a) Montrer que $f * g = g * f$

b) Montrer que $F(f * g) = F(g)F(f)$

2. Résoudre l'équation intégrale suivante : $y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)r(x - u)du$
où g et r sont des fonctions données.

Exercice 12 1. Résoudre les équations intégrales suivantes

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(s)}{(x-s)^2 + a^2} ds = \frac{1}{x^2 + b^2}, 0 < a < b ;$$

$$3. \int_0^{+\infty} y(t) \cos(xt) dt = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Exercice 13 En utilisant la transformée de Fourier, trouver une solution de l'équation intégrale-différentielle:

$$y(u) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u) e^{-a|u|} du = e^{-a|t|}$$

Exercice 14 : Soit $\alpha > 0$; et la fonction f définie par $f(t) = e^{-\alpha t^2}$

1. On pose $F(s) = \mathcal{F}[f](s)$, montrer que F est solution d'une équation différentielle du 1^{ère} ordre.
2. Trouver F .

Exercice 15 Résoudre, en utilisant la transformée de Fourier, l'équation différentielle $y''(t) + 2t y'(t) + 2y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Exercice 16 1. Calculer la transformée de Fourier en cosinus de $f(t) = (1+t) \exp(-t)$

2. Résoudre pour $t \geq 0$, le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) + 2y(t) = 0 \\ y''(t) + x''(t) - x(t) = -\exp(-t) \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$$

Indication : Utiliser la transformée de Fourier en cosinus.

Exercice 17 Résoudre l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

f, f', f'' étant des fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.

Indication : Utiliser la transformée de Fourier de $u(x,t)$ par rapport à x .

Exercice 18 Résoudre l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 & t > 0, x \in [0, \pi] \\ u(x,0) = \sin(x) & x \in [0, \pi] \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -2 \sin x & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Indication : Utiliser la transformée de Fourier en cosinus de $u(x,t)$ par rapport à t .