
Département de Mathématiques et Informatique

Module: Analyse 5

Série n°2
Transformées de Laplace

Exercice 1 :

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions définies par:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 < t < T; \\ 0, & \text{pour } t > T. \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} t, & \text{pour } 0 < t < T; \\ 0, & \text{pour } t > T. \end{cases}$$

Exercice 2 :

Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^2; \quad \sin 2x - 3 \cos 2x; \quad e^{-x} \cos 3x; \quad e^{-2x} (x^3 + 1). \\ e^{\alpha t} \sin(\omega t) \quad ; \quad e^{\alpha t} \operatorname{sh}(\omega t) \quad ; \quad t^2 e^{-t} \quad ; \\ 2 \cos(2t - 1) + 3 \sin(5t) \quad ; \quad \frac{\cos t - 1}{t} \quad ; \quad \frac{\sin t}{t} \quad ; \\ 4e^{-3t} + 5 + 6e^{-3t} \sin(t + 2) \quad ; \quad \frac{sh t}{t} \quad ; \quad (sh t)^2. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Calculer en utilisant les transformées de Laplace les intégrales

suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^2 \sin t e^{-2t} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt \quad ; \\ \int_0^{+\infty} t e^{-2t} \cos t dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t} dt. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Trouver les originaux des fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{1}{p^2 - 3}, \quad \frac{1}{(p + a)^2}, \quad \frac{p^2}{(p - 1)(p - 3)}, \quad \frac{p + 1}{p^2 + p + 2}, \quad \frac{p - 5}{p^2 + 8p + 15}, \quad \frac{p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Exercice 5 :

Trouver les originaux de:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-2p}}{p - 1}; \quad \frac{e^{-(1/3)p}}{p^2 + p + 1}; \quad \frac{e^{-2p}}{p - 1} + \frac{e^{-(1/3)p}}{(p + a)^2}, \\ \frac{p + 1}{p^2 + p + 2} e^{-p} - \frac{p - 5}{p^2 + 8p + 15} e^{-2p} + \frac{p}{(p^2 + 1)^2} e^{-3p} \end{aligned}$$

Trouver les images (transformée de Laplace) des fonctions

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\sinh x}{x}, \quad \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}, \quad \frac{1 - \cos \omega x}{x}.$$

Exercice 6 :

En utilisant la transformée de Laplace trouver la fonction inconnue f telle que:

$$\int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = f'(x) \quad \text{avec } f(0) = 1,$$

$$\int_0^x (x-t)^2 f(t) dt = 2[f(x) - x].$$

Exercice 7 Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace, les équations intégrales et intégral-différentielles suivantes :

$$\int_0^x e^{x-t} y(t) dt = e^x \quad ; \quad y(x) - \int_0^x y(t) \cos(x-t) dt = e^x \quad ;$$

$$2y(x) - \int_0^x y(t) y(x-t) dt = \sin x \quad ; \quad \begin{cases} y''(x) - \int_0^x e^{2(x-t)} y'(t) dt = e^{2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Exercice 8 :

En utilisant le produit de convolution trouver les originaux de:

$$\frac{1}{(p+4)^4} \quad \frac{1}{(p+1)(p^2+1)} \quad \frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\Omega^2)}$$

Exercice 9 :

Trouver la solution des équations différentielles

$$\begin{aligned} \diamond \quad & y'' - y = \sin 2x & y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = -1 \\ \diamond \quad & y'' + 2y' + y = e^{-x} & y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0 \\ \diamond \quad & xy'' + y' + xy = 0 & y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y' = 0 \\ \diamond \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y, \end{cases} \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} x(0) = 1; \\ y(0) = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 10 Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace, pour $t \geq 0$, les équations et les systèmes d'équations différentielles :

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$\begin{cases} 2x'(t) + y'(t) = x(t) - 1 \\ 7x'(t) + 4y'(t) = -3y(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x''(t) + y(t) = 1 \\ y''(t) + 4x(t) = 0 \\ x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \end{cases}.$$