

	Année universitaire : 2022-2023
Domaine : Mathématique et informatique	Module : Analyse 5

Série n° 3

Équations aux dérivées partielles

Exercice 1 : Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.

- a) $u_{xx} + x^2 u_y = y$, b) $(u_x)^2 + u u_y = 1$, c) $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$,
d) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$, e) $u_{xx} + u_x + \sin(u) = e^y$, f) $u_{xx} u_{yy} + u_y + u_x + u = 0$.

Exercice 2 : Vérifier que les fonctions $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $u(x, y) = e^x \sin y$ sont bien des solutions de l'équation $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Exercice 3 : Déterminer la solution générale de l'équation $u_{yy} + u = 0$, où $u = u(x, y)$.

Exercice 4 : Déterminer la solution générale de $u_{xx} - u_{yy} = 0$, où $u = u(x, y)$ en utilisant les nouvelles coordonnées : $\xi = x + y$ et $\eta = x - y$.

Exercice 5 : Montrer que l'équation de la chaleur $u_t = k(u_{xx} + u_{yy})$ exprimée en coordonnées polaires :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x} \text{ est}$$

$$u_t = k \left(u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r \right) \quad \text{où} \quad u = u(x, y, t) = u(r, \theta, t).$$

Exercice 6 : Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + cu_x + \lambda u = 0 \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = f(x),$$

où $\lambda > 0$, $f(x)$ est une fonction donnée et $u = u(x, t)$.

Exercice 7 : Résoudre le problème à valeur initiale suivant.

$$u_t + cu_x = h(x, t) \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = f(x),$$

où c est un nombre réel non nul, $h(x, t)$ est une fonction donnée et $u = u(x, t)$.

Exercice 8 : Résoudre le problème à valeur initiale $u_t + e^x u_x = 0$ avec $u(x, 0) = x$, où $u = u(x, t)$.

Exercice 9 : Considérer la solution de d'Alembert de l'équation des ondes pour le déplacement initial $f(x)$ et la vitesse initiale $g(x)$ suivants :

- a) $f(x) = x$ et $g(x) = 0$, b) $f(x) = 0$ et $g(x) = x$,
c) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -c \cos x$, d) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = c \cos x$.

Exercice 10 : Considérer l'EDP linéaire non-homogène

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x, t),$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

où c est un nombre réel positif, $h(x, t)$, $f(x)$, $g(x)$ sont des fonctions données et $u = u(x, t)$.

a) Montrer que ce problème est équivalent au système

$$\begin{cases} v_t + cv_x = h(x, t), & v(x, 0) = g(x) - cf'(x), \\ u_t - cu_x = v, & u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

b) Déterminer la solution du problème à valeur initiale

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = x + t \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = x \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = \sin x$$

en procédant comme nous l'avons fait en décrivant la solution de d'Alembert pour l'équation des ondes.

Exercice 11 : Déterminer pour quels points (x, y) du plan, chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes est a) hyperbolique, b) parabolique et c) elliptique.

$$\textbf{i)} \quad xu_{xx} - xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 3u_x = 0, \quad \textbf{ii)} \quad xu_{xx} + xyu_{xy} + yu_{yy} - (x + 3)u_y = u,$$

$$\textbf{iii)} \quad e^x u_{xx} + xyu_{xy} - u_{yy} + 5yu_x = e^x, \quad \textbf{iv)} \quad x^2 u_{xx} + 2(x - y)u_{xy} + u_{yy} = 0,$$

$$\textbf{v)} \quad u_{xx} - 5u_{xy} - (x + y)u_{yy} + 4u_x - xu_y = \sin x$$

Exercice 12 : Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes

- a) déterminer les points du plan xy où ces équations sont hyperboliques,
- b) déterminer les coordonnées caractéristiques de ces équations sur le domaine où celles-ci sont hyperboliques,
- c) effectuer le changement de coordonnées pour celles trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

$$\textbf{i)} \quad 2y^2 u_{xx} - xyu_{xy} - x^2 u_{yy} + 4yu_x - 3u = 0, \quad \textbf{ii)} \quad x^2 u_{xx} - xyu_{xy} - 6y^2 u_{yy} + u_x = 0.$$

Exercice 13 : Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante.

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - u_x = 0,$$

- a) déterminer les points du plan xy où cette équation est parabolique,
- b) déterminer les coordonnées caractéristiques de cette équation sur le domaine où celle-ci est parabolique
- c) effectuer le changement de coordonnées pour les coordonnées trouvées en b) de façon à obtenir l'équation canonique correspondante.

Exercice 14 : Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 ci-dessous, déterminer le type de l'équation, les équations caractéristiques, les coordonnées caractéristiques et ensuite réduire l'équation sous sa forme canonique

$$\textbf{a)} \quad u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x - 3u = 0, \quad \textbf{b)} \quad u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + u_x = 0.$$