

I-Transformations de Fourier

Exercice 1 Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes

1. $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, 2. $f(t) = \frac{t}{a^2+t^0}$, 3. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{si } |t| \leq \pi \\ 0, & \text{si } |t| > \pi \end{cases}$

Solution.

1. $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.

La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(a-i\lambda)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\lambda)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a-i\lambda} + \frac{1}{a+i\lambda} \right], \end{aligned}$$

donc

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \lambda^2}.$$

2. $f(t) = \frac{t}{a^2+t^0}$.

On remarque que

$$f(t) = tG(t),$$

où

$$G(t) = \frac{1}{a^2 + t^0} = \mathcal{F} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a|t|} \right].$$

En utilisant la propriété de dérivation on a

$$F(\lambda) = \mathcal{F}[tG](\lambda) = i \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{F}[G](\lambda)$$

et en utilisant la propriété de dualité on trouve

$$\mathcal{F}[G](\lambda) = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}e^{-a|t|}\right]\right](\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}}e^{-a|\lambda|}.$$

Donc

$$F(\lambda) = \frac{i\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{-a|\lambda|} = \frac{i\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} \begin{cases} -ae^{-a\lambda}, & \text{si } \lambda > 0 \\ ae^{a\lambda}, & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

d'où

$$F(\lambda) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-a|\lambda|} \operatorname{sgn}(\lambda)$$

où sgn est la fonction signe définie par

$$\operatorname{sgn}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda > 0 \\ -1, & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}.$$

$$3. f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{si } |t| \leq \pi \\ 0, & \text{si } |t| > \pi \end{cases}.$$

On remarque que la fonction f est impaire, on a alors

$$F(\lambda) = -iF_s(\lambda)$$

où F_s désigne la transformée de Fourier sinus. On a

$$F(\lambda) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(t) \sin(\lambda t) dt.$$

Pour calculer cette intégrale, on va utiliser la relation trigonométrique suivante

$$\cos(t - \lambda t) - \cos(t + \lambda t) = 2 \sin t \sin \lambda t$$

et on aura pour $\lambda \neq \pm 1$,

$$F(\lambda) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(1 - \lambda)\pi}{1 - \lambda} - \frac{\sin(1 + \lambda)\pi}{1 + \lambda} \right],$$

d'où

$$F(\lambda) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda \pi}{1 - \lambda^2}.$$

■

Exercise 2 Représenter les fonctions suivantes par une intégrale de Fourier

$$1. f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < |t| < a \\ 0, & \text{si } |t| > a \end{cases}, \quad 2. g(t) = \begin{cases} t, & \text{si } |t| < a \\ 0, & \text{si } |t| > a \end{cases}, \quad 3. h(x) = e^{-|x|} + e^{-ax^2}.$$

Solution.

$$1. f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < |t| < a \\ 0, & \text{si } |t| > a \end{cases}.$$

Pour $\lambda \neq 0$, on a

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-i\lambda t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}$$

donc la représentation de f par une intégrale de Fourier est

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

$$2. g(t) = \begin{cases} t, & \text{si } |t| < a \\ 0, & \text{si } |t| > a \end{cases}.$$

On remarque que

$$g = tf.$$

Par la propriété de dérivation, on déduit la transformée de Fourier de g

$$G(\lambda) = iF'(\lambda) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\lambda \cos(\lambda a) - \sin(\lambda a)}{\lambda^2}.$$

D'où

$$g(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\lambda \cos(\lambda a) - \sin(\lambda a)}{\lambda^2} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

$$3. h(x) = e^{-|x|} + e^{-ax^2}.$$

Pour cet exemple, on utilise l'exercice 1 (1) pour $a = 1$, et l'exercice 4 pour $\alpha = a$ et on trouve

$$h(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1 + \lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \right] e^{i\lambda x} d\lambda.$$

■

Exercice 3 En utilisant la transformée de Fourier montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \pi w}{w} \sin xt \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{pour } 0 < t < \pi \\ 0, & \text{pour } t > \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi w}{1 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-t}$$

Solution.

1/ Montrons que pour tout $t > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \pi w}{w} \sin xt \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{pour } 0 < t < \pi \\ 0, & \text{pour } t > \pi \end{cases}$$

En effet, posons

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\eta}{2}, & \text{pour } |t| < \pi \\ 0, & \text{pour } |t| > \pi \end{cases}$$

La transformée de Fourier sinus de f est

$$\begin{aligned} F_s(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin wt \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\pi} \frac{\eta}{2} \sin wt \, dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos w\pi}{w} \right). \end{aligned}$$

En utilisant la transformée inverse de Fourier sinus, on trouve

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(w) \sin wt \, dw = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \pi w}{w} \sin xt \, dw.$$

2/ Maintenant, on montre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi w}{1 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-t}.$$

On pose

$$g(t) = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}.$$

Comme g est une fonction paire sur $\mathbb{R}$ et d'après l'exercice 1 (exemple 1, pour $a = 1$), la transformée de Fourier cosinus de g est donnée par

$$\mathcal{F}_c[g](w) = \mathcal{F}[g](w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+w^2}.$$

Donc pour tout $t > 0$

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_c(g)(w) \cos wt \, dw = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+w^2} \, dw..$$

■

Exercice 4 Soit $\alpha > 0$ et f une fonction définie par $f(t) = \exp(-\alpha t^2)$.

1. Montrer que la transformée de Fourier F de f est solution d'une équation différentielle du 1^{ère} ordre.

2. Trouver F . Sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Solution.

1. On montre que F est solution d'une équation différentielle du 1^{ère} ordre.

En effet, il est clair que

$$f'(t) = -2\alpha t f(t)$$

donc

$$\mathcal{F}[f'](\lambda) = -2\alpha \mathcal{F}[tf](\lambda)$$

et en utilisant les propriétés de dérivation suivantes

$$\mathcal{F}[f'](\lambda) = i\lambda F(\lambda) \text{ et } \mathcal{F}[tf] = iF'(\lambda)$$

on obtient l'équation différentielle du 1^{ère} ordre

$$\lambda F(\lambda) = -2\alpha F'(\lambda).$$

2. Maintenant on calcule F .

Comme F est solution de l'équation différentielle du 1^{ère} ordre suivante

$$\frac{F'}{F} = \frac{-\lambda}{2\alpha}$$

on a donc

$$F(\lambda) = c \exp\left(\frac{-\lambda^2}{4\alpha}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Il reste à trouver la valeur de c .

$$c = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{it \cdot 0} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

Par conséquent

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp \frac{-\lambda^2}{4\alpha}.$$

■

II-Transformations de Laplace

Exercice 5 Déterminer la transformée de Laplace des fonctions définies par :

$$1. f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 < t < T \\ 0, & \text{pour } t > T \end{cases}, \quad 2. f_2(t) = \begin{cases} t, & \text{pour } 0 < t < T \\ 0, & \text{pour } t > T \end{cases}.$$

Solution.

$$1. f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 < t < T \\ 0, & \text{pour } t > T \end{cases}.$$

La transformée de Laplace de f_1 est

$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^T e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT}}{p}.$$

$$2. f_2(t) = \begin{cases} t, & \text{pour } 0 < t < T \\ 0, & \text{pour } t > T \end{cases}.$$

D'abord, on remarque que

$$f_2(t) = t f_1(t).$$

En utilisant la propriété de dérivation, La transformée de Laplace de f_2 est

$$F_2(p) = \mathcal{L}[t f_1](p) = -\frac{\partial}{\partial p} F_1(p).$$

Donc

$$F_2(p) = \frac{1 - e^{-pT} (1 + pT)}{p^2}.$$

■

Exercice 6 Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = (x^2 - 1)^2, \quad 2. g(x) = \sin 2x - 3 \cos 2x, \quad 3. h(x) = e^{-x} \cos 3x, \quad 4. k(x) = e^{-2x} (x^3 + 1).$$

Solution.

$$1. f(x) = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1.$$

On a par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[x^4] - 2\mathcal{L}[x^2] + \mathcal{L}[1]$$

avec

$$\mathcal{L}[1](p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-px} dx = \frac{1}{p}.$$

et par la propriété de dérivation généralisée on a

$$\mathcal{L}[x^n](p) = \mathcal{L}[x^n \cdot 1](p) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{L}[1](p)$$

où $\frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{L}[1]$ désigne la dérivée n^{eme} de $\mathcal{L}[1]$ qui est égale à

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n} \mathcal{L}[1](p) = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[\frac{1}{p} \right] = \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}}$$

c'est à dire que

$$\mathcal{L}[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Donc

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[x^4] - 2\mathcal{L}[x^2] + \mathcal{L}[1] = \frac{4!}{p^5} - 2\frac{2!}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{24}{p^5} - \frac{4}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

$$2. g(x) = \sin 2x - 3 \cos 2x.$$

D'abord, on calcule $\mathcal{L}[\sin 2x]$ et $\mathcal{L}[\cos 2x]$:

$$\mathcal{L}[\sin 2x] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right] = \frac{1}{2i} [\mathcal{L}[e^{2ix}] - \mathcal{L}[e^{-2ix}]]$$

et

$$\mathcal{L}[\cos 2x] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right] = \frac{1}{2} [\mathcal{L}[e^{2ix}] + \mathcal{L}[e^{-2ix}]]$$

La propriété de modulation donne

$$\mathcal{L}[e^{2ix}](p) = \mathcal{L}[e^{2ix} \cdot 1](p) = \mathcal{L}[1](p - 2i) = \frac{1}{p - 2i}$$

et

$$\mathcal{L}[e^{-2ix}](p) = \mathcal{L}[e^{-2ix}.1](p) = \mathcal{L}[1](p+2i) = \frac{1}{p+2i}$$

et on obtient

$$\mathcal{L}[\sin 2x](p) = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p-2i} - \frac{1}{p+2i} \right] = \frac{2}{p^2+4}$$

et

$$\mathcal{L}[\cos 2x](p) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-2i} + \frac{1}{p+2i} \right] = \frac{p}{p^2+4}$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}[g](p) = \mathcal{L}[\sin 2x](p) - 3\mathcal{L}[\cos 2x](p) = \frac{2}{p^2+4} - 3\frac{p}{p^2+4} = \frac{2-3p}{p^2+4}.$$

3. $h(x) = e^{-c} \cos 3x$.

La propriété de modulation donne

$$\mathcal{L}[h](p) = \mathcal{L}[\cos 3x](p+1).$$

Et avec le fait que

$$\mathcal{L}[\cos 3x](p) = \frac{p}{p^2+9}$$

on trouve

$$\mathcal{L}[h](p) = \frac{P+1}{(p+1)^2+9} = \frac{P+1}{p^2+2p+10}.$$

4. $k(x) = e^{-2x}(x^3+1)$.

Toujours par la modulation

$$\mathcal{L}[k](p) = \mathcal{L}[x^3+1](p+2)$$

avec

$$\mathcal{L}[x^3](p) + \mathcal{L}[1](p) = \frac{3!}{p^4} + \frac{1}{p}$$

on a alors

$$\mathcal{L}[k](p) = \frac{6}{(p+2)^4} + \frac{1}{p+2}.$$

■

Remarque.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. De la même manière que les exemples précédents, on peut vérifier les résultats suivants :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L}[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a} & \mathcal{L}[e^{ax}x^n](p) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, n \in \mathbb{N} & \mathcal{L}[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2} \\ \mathcal{L}[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2} & \mathcal{L}[\cosh ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2} & \mathcal{L}[\sinh ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2} \\ \mathcal{L}[e^{ax} \cos bx](p) = \frac{p-a}{(p-a)^2+b^2} & \mathcal{L}[e^{ax} \sin bx](p) = \frac{b}{(p-a)^2+b^2} & \mathcal{L}[e^{ax} \sinh bx](p) = \frac{a}{(p-a)^2+b^2} \end{array}$$

Exercice 7 Trouver les originaux des fractions rationnelles suivantes :

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{1}{p^2-3} & F_2(p) &= \frac{1}{(p+a)^2} & F_3(p) &= \frac{p^2}{(p-1)(p-3)} \\ F_4(p) &= \frac{p+1}{p^2+p+2} & F_5(p) &= \frac{p-5}{p^2+8p+15} & F_6(p) &= \frac{p}{(p^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Solution.

1. $F_1(p) = \frac{1}{p^2-3}.$

La décomposition de F_1 en éléments simples est

$$F_1(p) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{1}{p-\sqrt{3}} - \frac{1}{p+\sqrt{3}} \right].$$

Comme

$$\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}$$

donc

$$\frac{1}{p-\sqrt{3}} = \mathcal{L}[1](p-\sqrt{3}) = \mathcal{L}[e^{\sqrt{3}x}.1](p)$$

et de même

$$\frac{1}{p+\sqrt{3}} = \mathcal{L}[1](p+\sqrt{3}) = \mathcal{L}[e^{-\sqrt{3}x}](p)$$

et on a

$$F_1(p) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathcal{L}[e^{\sqrt{3}x} - e^{-\sqrt{3}x}](p) = \mathcal{L}\left[\frac{\sinh(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}\right](p).$$

Donc la fonction originale de F_1 est

$$f_1(x) = \frac{\sinh(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}.$$

On peut faire une autre méthode en utilisant la remarque précédente pour $a = \sqrt{3}$, on peut écrire

$$F_1(p) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{p^2 - (\sqrt{3})^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{L}[\sinh(\sqrt{3}x)](p).$$

2. $F_2(p) = \frac{1}{(p+a)^2}.$

On sait que

$$\mathcal{L}[x](p) = \frac{1}{p^2}.$$

Donc

$$F_2(p) = \mathcal{L}[x](p+a) = \mathcal{L}[e^{-ax}x]$$

et on déduit l'originale

$$f_2(x) = e^{-ax}x.$$

3. $F_3(p) = \frac{p^2}{(p-1)(p-3)}$
On décompose

$$F_3(p) = 1 + \frac{\frac{-1}{2}}{p-1} + \frac{\frac{9}{2}}{p-3}$$

Sachant que l'originale de 1 est la pulsion de Dirac notée δ .

On a

$$f_3(x) = \delta(x) - \frac{1}{2}e^x + \frac{9}{2}e^{3x}.$$

4. $F_4(p) = \frac{p+1}{p^2+p+2}$.
On peut écrire

$$F_4(p) = \frac{p+1}{(p+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \left[\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} \right] + \frac{1}{\sqrt{7}} \left[\frac{\sqrt{\frac{7}{4}}}{(p+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} \right].$$

Comme

$$\mathcal{L} \left[\cos \left(\sqrt{\frac{7}{4}}x \right) \right] (p) = \frac{p}{p^2 + \frac{7}{4}} \text{ et } \mathcal{L} \left[\sin \left(\sqrt{\frac{7}{4}}x \right) \right] (p) = \frac{\sqrt{\frac{7}{4}}}{p^2 + \frac{7}{4}}$$

on a

$$\begin{aligned} F_4(p) &= \mathcal{L} \left[\cos \left(\sqrt{\frac{7}{4}}x \right) \right] \left(p + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \mathcal{L} \left[\sin \left(\sqrt{\frac{7}{4}}x \right) \right] \left(p + \frac{1}{2} \right) \\ &= \mathcal{L} \left[e^{-\frac{1}{2}x} \cos \left(\sqrt{\frac{7}{4}}x \right) \right] (p) + \frac{1}{\sqrt{7}} \mathcal{L} \left[e^{-\frac{1}{2}x} \sin \left(\sqrt{\frac{7}{4}}x \right) \right] (p) \end{aligned}$$

Donc l'originale est

$$f_4(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left[\cos \left(\sqrt{\frac{7}{4}}x \right) + \frac{\sqrt{7}}{7} \sin \left(\sqrt{\frac{7}{4}}x \right) \right]$$

5. $F_5(p) = \frac{p-5}{p^2+8p+15}$.

On remarque que F_5 s'écrit commr

$$F_5(p) = \frac{p-5}{(p+4)^2-1} = \left[\frac{p+4}{(p+4)^2-1} \right] - 9 \left[\frac{1}{(p+4)^2-1} \right].$$

Comme

$$\mathcal{L}[\cosh(x)](p) = \frac{p}{p^2-1} \text{ et } \mathcal{L}[\sinh(x)](p) = \frac{1}{p^2-1}$$

on a

$$\begin{aligned} F_5(p) &= \mathcal{L}[\cosh(x)](p+4) - 9\mathcal{L}[\sinh(x)](p+4) \\ &= \mathcal{L}[e^{-4x}\cosh(x)](p) - 9\mathcal{L}[e^{-4x}\sinh(x)](p). \end{aligned}$$

D'où

$$f_5(x) = e^{-4x}(\cosh(x) - 9\sinh(x)).$$

6. $F_6(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$.

On remarque que

$$F_6(p) = \frac{-1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{p^2+1} \right]$$

et

$$\frac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}[\sin t](p)$$

En utilisant la propriété de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{L}[f](p) = -\mathcal{L}[t.f](p)$$

on trouve

$$F_6(p) = \frac{1}{2} \mathcal{L}[t.\sin t](p).$$

Donc

$$f_6(t) = \frac{t}{2} \sin t.$$

■

Exercice 8 (Propriété de translation) Trouver les originaux de :

$$F_1(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}, \quad F_2(p) = \frac{e^{-(\frac{1}{3})p}}{p^2+p+1}, \quad F_3(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1} + \frac{e^{-(\frac{1}{3})p}}{(p+a)^2},$$

$$F_4(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1}e^{-p} - \frac{p-5}{p^2+8p+15}e^{-2p} + \frac{p}{(p^2+1)^2}e^{-3p}.$$

Solution.

On rappelle que la transformée de Laplace de la fonction retardée

$$f(t-a)H(t-a) = \begin{cases} f(t-a), & \text{pour } t > a \\ 0, & \text{pour } t < a \end{cases}$$

est

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)](p) = e^{-ap}\mathcal{L}[f](p).$$

1. $F_1(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}.$

Comme

$$\frac{1}{p-1} = \mathcal{L}[e^t](p)$$

on a

$$F_1(p) = e^{-2p}\mathcal{L}[e^t](p) = \mathcal{L}[e^{t-2}H(t-2)](p)$$

d'où

$$f_1(t) = e^{t-2}H(t-2) = \begin{cases} e^{t-2}, & \text{pour } t > 2 \\ 0, & \text{pour } t < 2 \end{cases}$$

2. $F_2(p) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{3}\right)p}}{p^2+p+1}.$

D'abord, on cherche la fonction f originale de $\frac{1}{p^2+p+1}$ puis on déduit f_2 l'originale de F_2 .

En effet, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2+p+1} &= \sqrt{\frac{4}{3}} \left[\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] = \sqrt{\frac{4}{3}} \mathcal{L} \left[\sin \left(\sqrt{\frac{3}{4}} t \right) \right] \left(p + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \mathcal{L} \left[e^{-\frac{1}{2}t} \sin \left(\sqrt{\frac{3}{4}} t \right) \right] (p) \end{aligned}$$

cela signifie que l'originale f de $\frac{1}{p^2+p+1}$ est

$$f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \left(\sqrt{\frac{3}{4}} t \right)$$

et on déduit que l'originale de F_2 est

$$f_2(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{3}\right)} \sin \left(\sqrt{\frac{3}{4}} \left(t - \frac{1}{3} \right) \right) H \left(t - \frac{1}{3} \right).$$

$$3. F_3(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1} + \frac{e^{-\left(\frac{1}{3}\right)p}}{(p+a)^2}.$$

On a vu que

$$\frac{1}{p-1} = \mathcal{L}[e^t](p) \text{ et } \frac{1}{(p+a)^2} = \mathcal{L}[e^{-at}](p)$$

donc

$$f_3(t) = e^{t-2}H(t-2) + e^{-a\left(t-\frac{1}{3}\right)}\left(t-\frac{1}{3}\right)H\left(t-\frac{1}{3}\right).$$

$$4. F_4(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1}e^{-p} - \frac{p-5}{p^2+8p+15}e^{-2p} + \frac{p}{(p^2+1)^2}e^{-3p}.$$

D'abord, on va déterminer les originaux $\frac{p+1}{p^2+p+1}$, $\frac{p-5}{p^2+8p+15}$ et $\frac{p}{(p^2+1)^2}$.

D'après l'exercice 7,

$$\frac{p-5}{p^2+8p+15} = \mathcal{L}[f_5](p) \text{ et } \frac{p}{(p^2+1)^2} = \mathcal{L}[f_6](p)$$

où

$$f_5(t) = e^{-4t}(\cosh(t) - 9\sinh(t)) \text{ et } f_6(t) = \frac{t}{2}\sin t.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{p+1}{p^2+p+1} &= \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right] \end{aligned}$$

donc l'originale f de $\frac{p+1}{p^2+p+1}$ est

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Par conséquent, la fonction originale de F_4 est

$$f_4(t) = f(t-1)H(t-1) - f_5(t-2)H(t-2) + f_6(t-3)H(t-3).$$

■

Exercice 9 (Propriété de l'intégration) *Trouver les images (transformée de Laplace) des fonctions :*

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{x} \quad f_2(x) = \frac{\sinh x}{x} \quad f_3(x) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \quad f_4(x) = \frac{1 - \cos(\omega x)}{x}$$

Solution.

Rappelons que

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(x)}{x} \right] (p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f](\lambda) d\lambda.$$

1. $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}.$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{\sin x}{x} \right] (p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[\sin x](\lambda) d\lambda = \int_p^{+\infty} \frac{\infty}{\lambda^2 + 1} d\lambda \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan p = \arctan \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

2. $f_2(x) = \frac{\sinh x}{x}.$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{\sinh x}{x} \right] (p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[\sinh x](\lambda) d\lambda = \int_p^{+\infty} \frac{\infty}{\lambda^2 - 1} d\lambda \\ &= \ln \sqrt{\frac{p+1}{p-1}}. \end{aligned}$$

3. $f_3(x) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}.$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right] (p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[e^{-ax} - e^{-bx}](\lambda) d\lambda = \int_p^{+\infty} \left[\frac{1}{\lambda + a} - \frac{1}{\lambda + b} \right] d\lambda \\ &= \ln \frac{p+b}{p+a}. \end{aligned}$$

4. $f_4(x) = \frac{1 - \cos(\omega x)}{x}.$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{1 - \cos(\omega x)}{x} \right] (p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[1 - \cos(\omega x)](\lambda) d\lambda = \int_p^{+\infty} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \right] d\lambda \\ &= \ln \frac{\sqrt{p^2 + \omega^2}}{p}. \end{aligned}$$

■

Exercice 10 (Produit de convolution) *En utilisant la transformée de Laplace trouver la fonction inconnue f telle que :*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t) \cos(x-t) dt &= f'(x) \quad \text{avec } f(0) = 1, \\ \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt &= 2[f(x) - x].\end{aligned}$$

Solution.

On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions f, g notée $f * g$ est une fonction définie comme suit

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt$$

et ayant les propriétés suivantes

$$f * g = g * f \quad (\text{commutativité})$$

et

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p). \quad (*)$$

1. Résolvons l'équation

$$\int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = f'(x) \quad (1)$$

avec

$$f(0) = 1.$$

Posons $g(t) = \cos t$.

L'équation (1) est équivalente à l'équation suivante

$$(f * g)(x) = f'(x). \quad (2)$$

En composant les deux membres de l'équation (2) par la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ et en appliquant la propriété (*) on obtient

$$\mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p) = \mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f'](p).$$

La propriété de dérivation suivante

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)$$

entraîne

$$\mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)$$

avec

$$\mathcal{L}[\cos x](p) = \frac{p}{p^2 + 1} \text{ et } f(0) = 1.$$

Donc

$$\mathcal{L}[f](p) = \frac{p^2 + 1}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}.$$

Par conséquent, la solution f est l'originale de la fraction rationnelle $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}$ qui est

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

2. Maintenant, on va résoudre l'équation

$$\int_0^x (x-t)^2 f(t) dt = 2[f(x) - x] ..$$

Posons $g(x) = x^2$.

On a

$$(g * f)(x) = \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt = 2[f(x) - x]$$

donc

$$\mathcal{L}[g](p) \cdot \mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[g * f](p) = 2[\mathcal{L}[f](p) - \mathcal{L}[x](p)] = 2\left[\mathcal{L}[f](p) - \frac{1}{p^2}\right].$$

et avec

$$\mathcal{L}[g](p) = \mathcal{L}[x^2](p) = \frac{2}{p^3}$$

on trouve

$$\mathcal{L}[f](p) = \frac{p}{p^3 - 1}.$$

Donc la solution f est l'originale de la fraction rationnelle

$$F(p) = \frac{p}{p^3 - 1}.$$

La Décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + p + 1)(p - 1)} = \frac{1/3}{p - 1} - \frac{1}{3} \left(\frac{p - 1}{p^2 + p + 1} \right)$$

Donc

$$f = \frac{1}{3}f_1 - \frac{1}{3}f_2$$

où f_1 est l'originale de $\frac{1}{p-3}$ qui vaut

$$f_1(x) = e^{3x}.$$

Il reste à déterminer l'originale f_2 de

$$\frac{p - 1}{p^2 + p + 1}.$$

.

En fait

$$\begin{aligned} \frac{p - 1}{p^2 + p + 1} &= \frac{p + \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}/2}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \mathcal{L} \left[\cos \sqrt{\frac{3}{4}} x \right] \left(p + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{3} \mathcal{L} \left[\sin \sqrt{\frac{3}{4}} x \right] \left(p + \frac{1}{2} \right) \\ &= \mathcal{L} \left[e^{-\frac{1}{2}x} \cos \sqrt{\frac{3}{4}} x \right] (p) - \sqrt{3} \mathcal{L} \left[e^{-\frac{1}{2}x} \sin \sqrt{\frac{3}{4}} x \right] (p) \end{aligned}$$

Donc

$$f_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\cos \sqrt{\frac{3}{4}} x - \sqrt{3} \sin \sqrt{\frac{3}{4}} x \right)$$

et ainsi on a

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x} \left(\cos \sqrt{\frac{3}{4}} x - \sqrt{3} \sin \sqrt{\frac{3}{4}} x \right).$$

■

Exercice 11 En utilisant le produit de convolution trouver les originaux de:

$$1. F_1(p) = \frac{1}{(p+4)^4}, \quad 2. F_2(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}, \quad 3. F_3(p) = \frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\Omega^2)}, \quad \omega^2 + \Omega^2 \neq 0.$$

Solution.

$$1. F_1(p) = \frac{1}{(p+4)^4}.$$

On écrit F_1 comme produit

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{1}{(p+4)} \cdot \frac{1}{(p+4)^3} \\ &= \mathcal{L}[e^{-4x}](p) \cdot \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}x^2e^{-4x}\right](p) \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-4x} * \frac{1}{2}x^2e^{-4x}\right](p) \end{aligned}$$

donc l'originale de F_1 est

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{-4x} * \left(\frac{1}{2}x^2e^{-4x}\right) = \int_0^x e^{-4(x-t)} \left(\frac{1}{2}t^2e^{-4t}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}e^{-4x} \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{6}e^{-4x}. \end{aligned}$$

$$2. F_2(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}.$$

On a

$$\begin{aligned} F_2(p) &= \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{1}{(p^2+1)} \\ &= \mathcal{L}[e^{-4x}](p) \cdot \mathcal{L}[\sin x](p) \\ &= \mathcal{L}[e^{-4x} * \sin x](p) \end{aligned}$$

donc l'originale de F_2 est

$$\begin{aligned} f_2(x) &= e^{-4x} * \sin x = \int_0^x e^{-4(x-t)} \sin t dt \\ &= e^{-4x} \int_0^x e^{4t} \sin t dt = \frac{1 + e^{4x}(4 \sin x - \cos x)}{17}. \end{aligned}$$

$$3. F_3(p) = \frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\Omega^2)}.$$

On peut supposer que $\Omega \neq 0$ et on écrit

$$\begin{aligned} F_3(p) &= \frac{p}{(p^2+\omega^2)} \cdot \frac{1}{(p^2+\Omega^2)} \\ &= \mathcal{L}[\cos(\omega x)](p) \cdot \mathcal{L}\left[\frac{1}{\Omega} \sin(\Omega x)\right](p) \\ &= \frac{1}{\Omega} \mathcal{L}[\cos(\omega x) * \sin(\Omega x)](p) \end{aligned}$$

d'où

$$f_3(x) = \frac{1}{\Omega} \cos(\omega x) * \sin(\Omega x) = \frac{1}{\Omega} \int_0^x \cos(\omega(x-t)) \cdot \sin(\Omega t) dt.$$

En utilisant la relation trigonométrique

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

on a

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{1}{2\Omega} \int_0^x [\sin(\omega x - (\omega - \Omega)t) - \sin(\omega x - (\omega + \Omega)t)] dt \\ &= \frac{\cos(\Omega x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \Omega^2}. \end{aligned}$$

■

Exercise 12 Trouver la solution des équations différentielles :

1. $y'' - y = \sin 2x, \quad y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1$
2. $y'' + 2y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0$
3. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0$
4. $\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = x + 5y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x - 3y \end{cases} \quad \text{tel que } \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}.$

Solution.

1. On cherche la fonction $y(x)$ solution de l'équation différentielle

$$y'' - y = \sin 2x, \tag{1}$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1.$$

On compose les deux membre de l'équation (1) par la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ on trouve

$$\mathcal{L}[y''](p) - \mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[\sin 2x](p) = \frac{2}{p^2 + 4}. \tag{*}$$

On pose $Y = \mathcal{L}[y]$.

En utilisant la propriété de dérivation

$$\mathcal{L}[y''](p) = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0)$$

et les conditions

$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -1$$

l'équation (*) devient

$$p^2 Y(p) - p + 1 - \mathcal{Y}(p) = \frac{2}{p^2 + 4}$$

et cela donne

$$Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p^2-1)(p^2+4)}.$$

La solution y de l'équation différentielle (1) est l'originale de la fraction rationnelle $Y(p)$. On peut écrire

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p+1} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2+4} \right) \\ &= \mathcal{L} \left[e^{-x} + \frac{2}{5} \left(\sinh x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \right] (p). \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation différentielle (1) est

$$y(x) = e^{-x} + \frac{2}{5} \sinh x - \frac{1}{5} \sin(2x).$$

2. On cherche la fonction $y(x)$ solution de l'équation différentielle (2) suivante

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \quad (2)$$

Posons $Y = \mathcal{L}[y]$. On a

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-x}] = \frac{1}{p+1} \quad (**)$$

avec

$$\mathcal{L}[y''] (p) = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - p$$

et

$$\mathcal{L}[y'] (p) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Donc l'équation (**) devient

$$(p^2 Y(p) - p) + 2(pY(p) - 1) + \mathcal{Y} = \frac{1}{p+1}$$

et cela donne

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{p+2}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^3} \\ &= \mathcal{L}[e^{-x}] (p) + \mathcal{L}[xe^{-x}] (p) + \frac{1}{2} \mathcal{L}[x^2 e^{-x}] (p). \end{aligned}$$

D'où

$$y(x) = e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right).$$

3. On considère le problème suivant

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \quad (3)$$

On cherche la solution non nulle de l'équation (3).

On a

$$\mathcal{L}[xy''] + 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[xy] = \mathcal{L}[0] = 0. \quad (***)$$

En utilisant la propriété de dérivation suivante

$$\mathcal{L}[xf](p) = -\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{L}[f](p)$$

l'équation (***) devient

$$-\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] - \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{L}[y] = 0$$

et cela entraîne

$$-\frac{\partial}{\partial p} (p^2 Y(p) - p) + 2(pY(p) - 1) - \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{Y}(p) = 0$$

et on obtient une équation du premier ordre suivant

$$\frac{\partial}{\partial p} Y(p) = \frac{-1}{p^2 + 1}.$$

Donc

$$-\mathcal{L}[xy](p) = \frac{\partial}{\partial p} Y(p) = \frac{-1}{p^2 + 1} = -\mathcal{L}[\sin x]$$

d'où la solution

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

4. Maintenant on va considérer le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = x + 5y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x - 3y \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}. \quad (S)$$

Posons

$$X(p) = \mathcal{L}[x](p) \text{ et } Y(p) = \mathcal{L}[y](p).$$

Pour résoudre ce système on compose d'abord les deux membres de chacune de ces équations par $\mathcal{L}$ et on obtient

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = pX(p) - x(0) = \mathcal{L}\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] = X + 5Y \\ pY(p) - 2 = pY(p) - y(0) = \mathcal{L}\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right] = X - 3Y \end{cases}.$$

D'où le système algébrique

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 5Y = 1 \\ -X + (p+3)Y = 2 \end{cases}$$

qui a comme solution

$$\begin{cases} X(p) = \frac{p+13}{p^2+2p-8} \\ Y(p) = \frac{2p-1}{p^2+2p-8} \end{cases}.$$

Maintenant, on cherche les originaux x et y des fractions rationnelles X et Y .

On a

$$\begin{cases} X(p) = \frac{p+13}{p^2+2p-8} = \frac{p+1}{(p+1)^2-9} + 4 \cdot \frac{3}{(p+1)^2-9} \\ Y(p) = \frac{2p-1}{p^2+2p-8} = 2 \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2-9} - \frac{3}{(p+1)^2-9} \end{cases}.$$

Donc la solution du système d'équations différentielles (S) est

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} (\cosh(3t) + 4 \sinh(3t)) \\ y(t) = e^{-t} (2 \cosh(3t) - \sinh(3t)). \end{cases}$$

■