Chapitre 2

Holomorphie - Harmonicité

2.1 Exercices

Exercice 2.1

En utilisant les règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $f(z) = (2-i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6$,

b) $f(z) = 5(iz)^3 - 10z^2 + 3 - 4i$,

c) $f(z) = (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i)$,

d) $f(z) = (z^2 + 2z + 7i)^2 (z^4 - 4iz)^3$,

e) $f(z) = \dfrac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}$,

f) $f(z) = -5iz^2 + \dfrac{2+i}{z^2}$,

g) $f(z) = (z^4 - 2iz^2 + z)^{10}$,

h) $f(z) = \left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i}\right)^3$.

Exercice 2.2

Montrer que la fonction $f(z) = x + 4iy$ n'est dérivable en aucun point.

Exercice 2.3

Soit la fonction $f(z) = |z|^2$; montrer que f est dérivable qu'à l'origine (même chose pour $g(z) = \overline{z}$ et $h(z) = |z|$).

Exercice 2.4

Montrer que la fonction dé nie par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z = 0 \\ \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \end{cases}$$

est non dérivable à l'origine. (on pourra considérer les chemins le long des axes).

Exercice 2.5

Étudier l'holomorphie des fonctions suivantes (en précisant leurs domaines).

a) $f(z) = z^3$,

b) $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$,

c) $f(z) = \operatorname{Re} z$,

d) $f(z) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$,

e) $f(z) = x^2 + y^2$,

f) $f(z) = x + \sin x \operatorname{Ch} y + i(y + \cos x \operatorname{Sh} y)$,

g) $f(z) = y + ix$,

h) $f(z) = 4z - 6\overline{z} + 3$,

i) $f(z) = \overline{z}^2$,

j) $f(z) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$,

k) $f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1)$,

l) $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$,

m) $f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - i\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$,

n) $f(z) = \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + i\frac{y^3+x^2y-y}{x^2+y^2}$.

Exercice 2.6

Déterminer les constantes a, b, c et d de telle sorte que la fonction f soit holomorphe dans chacun des cas

a) $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$, **b)** $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i\left(cx^2 + dxy + y^2\right)$.

Exercice 2.7

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann montrer que les fonctions suivantes ne sont pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, néanmoins elle sont dérivables sur les chemins indiquées

a) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$, l'axe des abscisses,

b) $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2$, les deux axes,

c) $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$, les deux axes,

d) $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$, $y = x + 2$.

Exercice 2.8

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction complexe, on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

1. Montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta.$$

2. Exprimer les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires et montrer que
$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r}.$$
3. Appliquer les résultats trouvés pour étudier l'holomorphie des fonctions
$$f(z) = \frac{\cos\theta}{r} - i\frac{\sin\theta}{r} \quad \text{et} \quad g(z) = 5r\cos\theta + r^4\cos(4\theta) + i\left(5r\sin\theta + r^4\sin(4\theta)\right).$$

Exercice 2.9

Soient U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes

1. f est constante.
2. $P = \mathrm{Re}(f)$ est constante.
3. $Q = \mathrm{Im}(f)$ est constante.
4. $\overline{f}$ est holomorphe sur U.
5. $|f|$ est constante.

Exercice 2.10

Vérifier que les fonctions données sont harmoniques et déterminer leurs conjuguées harmoniques dans chacun des cas suivants.

a) $u(x,y) = x$, **b)** $u(x,y) = 2x - 2xy$, **c)** $u(x,y) = x^2 - y^2$,

d) $u(x,y) = -e^{-x}\sin y$, **e)** $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, **f)** $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

Exercice 2.11

Vérifier que la fonction u donnée est harmonique et déterminer sa conjuguée harmonique v, puis expliciter la fonction complexe $f(z) = u + iv$ en fonction de z dans les cas suivants

a) $u(x,y) = xy + x + 2y$ avec $f(2i) = -1 + 5i$,

b) $u(x,y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$ avec $f(1+i) = 5 + 4i$.

Exercice 2.12

Soit v la fonction définie par $v(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1. Montrer que v est harmonique dans un domaine D qui ne contient pas l'origine.

2. Trouver une fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ qui soit holomorphe sur le domaine D.

3. Exprimer f en fonction de z.

Exercice 2.13

Soit $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ une fonction holomorphe sur un domaine D. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann sous forme polaire monter que u et v satisfont à l'équation de Laplace sous forme polaire

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Application : montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$$\textbf{a)}\ u(x,y) = r^3\cos(3\theta), \quad \textbf{b)}\ u(x,y) = \frac{10r^2 - \sin(2\theta)}{r^2}.$$

Exercice 2.14

Trouver toutes les fonctions conjuguées harmoniques qui correspondent aux formes suivantes :

$$\textbf{a)}\ u = F\left(x^2 + y^2\right), \quad \textbf{b)}\ u = F(ax + by), \quad \textbf{c)}\ u = F(xy), \quad \textbf{d)}\ u = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 2.15

Déterminer les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ de la variable $z = x + iy$ dans chacun des cas suivants :

1. P ne dépend que de $x\cos\varphi + y\sin\varphi$ où φ est un angle donné.

2. $P^2 + Q^2$ ne dépend que de x.

3. $\dfrac{P}{Q}$ ne dépend que de x.

2.2 Solutions

Exercice 2.1

En utilisant les règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $f(z) = (2-i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6$, **b)** $f(z) = 5(iz)^3 - 10z^2 + 3 - 4i$,

c) $f(z) = (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i)$, **d)** $f(z) = (z^2 + 2z + 7i)^2 (z^4 - 4iz)^3$,

e) $f(z) = \dfrac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}$, **f)** $f(z) = -5iz^2 + \dfrac{2+i}{z^2}$,

g) $f(z) = (z^4 - 2iz^2 + z)^{10}$, **h)** $f(z) = \left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i}\right)^3$.

Solution.

On rappelle que les règles de dérivation des fonctions de la variable complexe, concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions réelles.
Ainsi les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

a) $f'(z) = 5(2-i)z^4 + 4iz^3 - 6z$.

b) $f'(z) = 15i(iz)^2 - 20z = -15iz^2 - 20z$.

c)
$$\begin{aligned} f'(z) &= (z^6 - 1)\tfrac{d}{dz}(z^2 - z + 1 - 5i) + (z^2 - z + 1 - 5i)\tfrac{d}{dz}(z^6 - 1) \\ &= (z^6 - 1)(2z - 1) + (z^2 - z + 1 - 5i)(6z^5) \\ &= 8z^7 - 7z^6 + (6 - 30i)z^5 - 2z + 1. \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} f'(z) &= (z^2 + 2z + 7i)^2 \tfrac{d}{dz}(z^4 - 4iz)^3 + (z^4 - 4iz)^3 \tfrac{d}{dz}(z^2 + 2z + 7i)^2 \\ &= (z^2 + 2z + 7i)^2\, 3(4z^3 - 4i)(z^4 - 4iz)^2 + (z^4 - 4iz)^3\, 2(2z + 2)(z^2 + 2z + 7i) \\ &= (z^4 - 4iz)^2 (z^2 + 2z + 7i)\left(3(z^2 + 2z + 7i)(4z^3 - 4i) + 2(z^4 - 4iz)(2z + 2)\right) \\ &= (z^4 - 4iz)^2 (z^2 + 2z + 7i)(16z^5 + 28z^4 + 84iz^3 - 28iz^2 - 40iz + 84). \end{aligned}$$

e) $$f'(z) = \frac{(3z + 1 - i)\tfrac{d}{dz}(iz^2 - 2z) - (iz^2 - 2z)\tfrac{d}{dz}(3z + 1 - i)}{(3z + 1 - i)^2}$$

$$= \frac{(3z+1-i)(2iz-2)-(iz^2-2z)(3)}{(3z+1-i)^2} = \frac{3iz^2+(2+2i)z-2+2i}{(3z+1-i)^2}.$$

f) $f'(z) = -10iz - \dfrac{4+2i}{z^3}$.

g) $f'(z) = 10(4z^3-4iz+1)(z^4-2iz^2+z)^9$.

h) $f'(z) = 3\left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2+9i}\right)^2 \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2+9i}\right)$

$$= 3\left(\frac{(4+2i)z}{(2-i)z^2+9i}\right)^2 \left(\frac{-2(5z^2+9-18i)}{((2-i)z^2+9i)^2}\right)$$

$$= \frac{-24(3+4i)z^2(5z^2+9-18i)}{((2-i)z^2+9i)^4}.$$

Exercice 2.2

Montrer que la fonction $f(z) = x + 4iy$ n'est dérivable en aucun point.

Solution.

Par définition, la fonction f n'est pas dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si la limite $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ n'existe pas, *i.e.* la limite dépend de la manière dont z tend vers z_0.

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. On a

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x+4iy-(x_0+4iy_0)}{x+iy-(x_0+iy_0)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x-x_0+4i(y-y_0)}{x-x_0+i(y-y_0)}.$$

Pour $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1$.

Pour $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{4i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = 4$.

La limite obtenue dépendant de la façon dont $z \to z_0$, la dérivée n'existe pas *i.e.* la fonction f n'est dérivable en aucun point.

Exercice 2.3

Soit la fonction $f(z) = |z|^2$; montrer que f est dérivable qu'à l'origine (même chose pour $g(z) = \overline{z}$ et $h(z) = |z|$).

Solution.

a) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$ *i.e.* $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. On a
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

Pour $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0$.

Pour $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite cherchée est
$$\lim_{y\to y_0} \frac{y^2 - y_0^2}{i(y - y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{(y - y_0)(y + y_0)}{i(y - y_0)} = -2iy_0.$$

Pour $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$, la limite $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ dépendant de la façon dont $z \to z_0$, donc la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}^*$.

Si $z_0 = 0$ *i.e.* $(x_0, y_0) = (0,0)$. On a
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2\,\overline{z}}{z\overline{z}} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0.$$

Donc f est dérivable qu'à l'origine avec $f'(0) = 0$.

b) Si $z = x+iy$ et $z_0 = x_0+iy_0$ alors $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{x - x_0 - i(y - y_0)}{x - x_0 + i(y - y_0)}$.

Si $y = y_0$, $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Si $x = x_0$, $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1$.

Pour tout z_0 dans $\mathbb{C}$, la limite n'existe pas donc la fonction g n'est dérivable en aucun point.

c) Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$. On a
$$\lim_{z\to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

Si $y = y_0$, $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{x^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x - x_0} = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$.

Si $x = x_0$, $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{\sqrt{x_0^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{i(y - y_0)} = \dfrac{-iy_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$.

Ainsi $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{h(z) - h(0)}{z - 0} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|}{z} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{|re^{i\theta}|}{re^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, la limite en $z = 0$ n'existe pas car elle dépend de θ. La fonction h aussi n'est dérivable en aucun point.

Exercice 2.4

Montrer que la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z = 0 \\ \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \end{cases}$$

est non dérivable à l'origine. (on pourra considérer les chemins le long des axes).

Solution.

On a

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}{x + iy}.$$

Pour $y = 0$ et $x \to 0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + ix}{x} = 1 + i$.

Pour $x = y = t$ et $t \to 0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{it}{t + it} = \dfrac{i}{1+i} = \dfrac{1+i}{2}$.

La limite $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ dépend de la façon dont $z \to 0$, donc la fonction f n'est pas dérivable à l'origine $z = 0$.

Exercice 2.5

Étudier l'holomorphie des fonctions suivantes (en précisant leurs domaines).

a) $f(z) = z^3$,

b) $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$,

c) $f(z) = \operatorname{Re} z$,

d) $f(z) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$,

e) $f(z) = x^2 + y^2$,

f) $f(z) = x + \sin x \operatorname{Ch} y + i(y + \cos x \operatorname{Sh} y)$,

g) $f(z) = y + ix$,

h) $f(z) = 4z - 6\overline{z} + 3$,

i) $f(z) = \overline{z}^2$,

j) $f(z) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$,

k) $f(z) = \begin{array}{l} 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 \\ +i(8xy + 5y - 1), \end{array}$

l) $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$,

m) $f(z) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - i\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$,

n) $f(z) = \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + i\frac{y^3+x^2y-y}{x^2+y^2}$.

Solution.

Nous rappelons que si $f = u + iv$ et les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$sont continues dans un domaine D, alors les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sont nécessaires et suffisantes pour que f soit holomorphe dans D.
En notant que $x = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$, les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

a) La fonction $f(z) = z^3$ ne contient pas le terme $\overline{z}$, donc d'après la condition de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, la fonction $f(z) = z^3$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

b) Comme précédemment $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$ ne contient pas le terme $\overline{z}$, donc elle est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

c) On a $f(z) = \operatorname{Re} z = x$. Posons $u = x$ et $v = 0$.
Il est claire que $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, la première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite. Alors la fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

d) On a $u = e^{-x} \cos y$ et $v = -e^{-x} \sin y$. Les dérivées partielles de u et v sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x} \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x} \sin y.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x} \cos y \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x} \sin y,$$

la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.
On remarque aussi que $f(z)$ n'est que e^{-z}, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car elle ne contient pas le terme $\overline{z}$.

e) On a $f(z) = x^2 + y^2 = |z|^2 = z\overline{z}$ et donc $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = z$. La condition de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ n'est satisfaite qu'en $z_0 = 0$. La fonction f est dérivable en $z_0 = 0$ car

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{z\overline{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \overline{z} = 0,$$

mais elle n'est pas holomorphe en 0 car il n'y a pas d'un disque ouvert centré en 0 sur lequel f est dérivable.
Alors la fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

f) On a $u = x + \sin x \operatorname{Ch} y$ et $v = y + \cos x \operatorname{Sh} y$ et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \cos x \operatorname{Ch} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \cos x \operatorname{Ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{Sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{Sh} y.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ car

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \cos x \operatorname{Ch} y \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \sin x \operatorname{Sh} y.$$

La fonction f, qui n'est que $z + \sin z$, est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$.

g) On a $u = y$ et $v = x$ et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

La première condition de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ est satisfaite, mais la seconde condition $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ n'est pas satisfaite en aucun point. Donc la fonction f, qui est $i\overline{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

h) On a $f(z) = 4z - 6\overline{z} + 3$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = -6 \neq 0$. Alors f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

i) On a $f(z) = \overline{z}^2$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 2\overline{z} \neq 0$ sauf en 0. Alors f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$. Mais elle est dérivable en 0 car

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}^2}{z} = 0 \text{ à cause de } \lim_{z \to 0} \left| \frac{\overline{z}^2}{z} \right| = \lim_{z \to} |z| = 0.$$

j) On a $u = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$ et $v = e^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{x^2 - y^2} \left(x \cos(2xy) - y \sin(2xy) \right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{x^2 - y^2} \left(y \cos(2xy) + x \sin(2xy) \right). \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction f, qui n'est que e^{z^2}, est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$.

k) On a $u = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9$ et $v = 8xy + 5y - 1$ et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 8x + 5 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -8y.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction f, qui n'est que $4z^2 + 5z + 9 - i$, est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$.

l) On a $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{z}{|z|^2}=\dfrac{z}{z\overline{z}}=\dfrac{1}{\overline{z}}$et donc $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{-1}{\overline{z}^2}\neq 0$. Alors f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

m) On a $f(z)=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}-i\frac{y}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{\overline{z-1}}{|z-1|^2}=\dfrac{1}{z-1}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

n) On a $f(z)=\frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2}+i\frac{y^3+x^2y-y}{x^2+y^2}=\dfrac{z^2\overline{z}+\overline{z}}{z\overline{z}}=\dfrac{z^2+1}{z}=z+\dfrac{1}{z}$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Exercice 2.6

Déterminer les constantes a,b,c et d de telle sorte que la fonction f soit holomorphe dans chacun des cas

a) $f(z)=3x-y+5+i(ax+by-3)$, **b)** $f(z)=x^2+axy+by^2+i\left(cx^2+dxy+y^2\right)$.

Solution.

a) On a $u=3x-y+5$ et $v=ax+by-3$. Les dérivées partielles de u et v sont continues et elles sont données par

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=b,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=a.$$

Les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\rightarrow b=3\\ \text{et}\quad &\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\rightarrow a=1\end{aligned}$$

sont alors nécessaires et suffisantes pour que f soit holomorphe. Dans ce cas

$$f(z)=3x-y+5+i(x+3y-3)=(3+i)z+5-3i.$$

b) On a $u=x^2+axy+by^2$ et $v=cx^2+dxy+y^2$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy.$$

Les équations de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ donnent

$$2x+ay=dx+2y\quad\text{et}\quad ax+2by=-2cx-dy.$$

Ce qui implique que $a=d=2$ et $b=c=-1$. Dans ce cas

$$f(z)=x^2+2xy-y^2+i\left(-x^2+2xy+y^2\right)=(1-i)z^2.$$

Exercice 2.7

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann montrer que les fonctions suivantes ne sont pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, néanmoins elle sont dérivables sur les chemins indiquées

a) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$, l'axe des abscisses,

b) $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2$, les deux axes,

c) $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$, les deux axes,

d) $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$, $y = x + 2$.

Solution.

a) On a $u = x^2 + y^2$ et $v = 2xy$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad \to \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad \to \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

La deuxième équation de Cauchy-Riemann n'est satisfaite qu'aux points de l'axe des abscisses $y = 0$. Si $z_0 = x_0$ un point de cet axe des abscisses, alors la fonction f est dérivable en z_0 car

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2 + 2ixy - x_0^2}{x + iy - x_0} \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \left(\frac{x^2 - y^2 + 2ixy - x_0^2}{x + iy - x_0} + \frac{2y^2}{x + iy - x_0} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \left(\frac{x^2 - y^2 + 2ixy - x_0^2}{x + iy - x_0} + \frac{2y^2}{x + iy - x_0} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \left(x + iy + x_0 + \frac{2y^2}{x + iy - x_0} \right) \\ &= 2x_0, \end{aligned}$$

mais elle n'est pas holomorphe en z_0 car il n'y a pas d'un disque ouvert centré en z_0 sur lequel f est dérivable.

Alors la fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

b) On a $u = 3x^2y^2$ et $v = -6x^2y^2$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -12x^2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -12xy^2.$$

Les équations de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites que lorsque $xy = 0$ c'est-à-dire aux points des deux axes $y = 0$ et $x = 0$. Sur les deux axes la fonction est dérivable car si $z_0 = x_0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \frac{3x^2y^2 - 6ix^2y^2}{x + iy - x_0} = 0$$

et si $z_0 = iy_0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{3x^2y^2 - 6ix^2y^2}{x + iy - iy_0} = 0.$$

Pour la même raison que celle qui précède f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

c) On a $u = x^3 + 3xy^2 - x$ et $v = y^3 + 3x^2y - y$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 + 3x^2 - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy.$$

Comme précédemment, les équations de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites que lorsque $xy = 0$. Sur les deux axes $xy = 0$ la fonction est dérivable car si $z_0 = x_0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y) - x_0^3 + x_0}{x + iy - x_0} \\
&= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2y) - x_0^3}{x + iy - x_0} - 1 \\
&= 3x_0^2 - 1 \quad \text{(en posant } x = x_0 + r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta\text{)},
\end{aligned}$$

et si $z_0 = iy_0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y) - i(y_0^3 - y_0)}{x + iy - iy_0} \\
&= 3y_0^2 - 1 \quad \text{(en posant } x = r\cos\theta \text{ et } y = y_0 + r\sin\theta\text{)}.
\end{aligned}$$

Alors la fonction f n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

d) On a $u = x^2 - x + y$ et $v = y^2 - 5y - x$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y - 5, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1.$$

Les équations de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites que lorsque $2x - 1 = 2y - 5$ ou bien $y = x + 2$. Sur la droite $y = x + 2$ la fonction est dérivable car si $z_0 = x_0 + i(x_0 + 2)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0 + 2}} \frac{x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x) - ((1 + i)x_0^2 - 2ix_0 + 2 - 6i)}{x + iy - x_0 - i(x_0 + 2)} \\
&= 2x_0 - 1 - i \quad \text{(en posant } x = x_0 + r\cos\theta \text{ et } y = x_0 + 2 + r\sin\theta\text{)}.
\end{aligned}$$

Alors la fonction f n'est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$$f(z) = x^2 + 2xy - y^2 + i\left(-x^2 + 2xy + y^2\right) = (1-i)\, z^2.$$

Exercice 2.8

Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction complexe, on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

1. Montrer que
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta.$$
2. Exprimer les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires et montrer que
$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r}.$$
3. Appliquer les résultats trouvés pour étudier l'holomorphie des fonctions
$$f(z) = \frac{\cos\theta}{r} - i\frac{\sin\theta}{r} \quad \text{et} \quad g(z) = 5r\cos\theta + r^4\cos(4\theta) + i\left(5r\sin\theta + r^4\sin(4\theta)\right).$$

Solution.

1. On a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ ou $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$. D'où
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta, \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta. \tag{2.2}$$

2. De la même façon
$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta, \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial y} r\cos\theta. \tag{2.4}$$
D'après les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, les équations (2.4) et (2.3) peuvent être écrites comme
$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial y} r\cos\theta = \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta = r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta = -\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right).$$

En tenant compte de (2.1) et (2.2), on trouve les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\quad \text{et}\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{2.5}$$
On rappelle que si $f=u+iv$ est holomorphe dans un domaine D de $\mathbb{C}$, alors la dérivée de f est donnée par
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\;=\;\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\;=\;\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y},\quad z\in D. \tag{2.6}$$
En multipliant (2.1) par $\cos\theta$, (2.2) par $-\dfrac{\sin\theta}{r}$ et en additionnant, il vient, tenant compte de (2.5)
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r}. \tag{2.7}$$
De même en multipliant (2.1) par $\sin\theta$, (2.2) par $\dfrac{\cos\theta}{r}$ et en additionnant, il vient, tenant compte de (2.5)
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r}. \tag{2.8}$$
En tenant compte de (2.7) et (2.8), la dérivée de f peut s'écrire
$$\begin{aligned}f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}&=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r}-i\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r}\right)\\&=(\cos\theta-i\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial r}.\end{aligned}$$

3. Pour $f(z)=\dfrac{\cos\theta}{r}-i\dfrac{\sin\theta}{r}$, on a $u=\dfrac{\cos\theta}{r}$ et $v=-\dfrac{\sin\theta}{r}$, et donc
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=-\frac{\cos\theta}{r^2}=\frac{1}{r}\left(-\frac{\cos\theta}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\\ \frac{\partial v}{\partial r}&=\frac{\sin\theta}{r^2}=-\frac{1}{r}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires sont satisfaites, alors la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Pour $g(z)=5r\cos\theta+r^4\cos(4\theta)+i\left(5r\sin\theta+r^4\sin(4\theta)\right)$, on a $u=5r\cos\theta+r^4\cos(4\theta)$ et $v=5r\sin\theta+r^4\sin(4\theta)$. D'où
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=5\cos\theta+4r^3\cos(4\theta)=\frac{1}{r}\left(5r\cos\theta+4r^4\cos(4\theta)\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\\ \frac{\partial v}{\partial r}&=5\sin\theta+4r^3\sin(4\theta)=-\frac{1}{r}\left(-5r\sin\theta-4r^4\sin(4\theta)\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Il vient alors que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.9

Soient U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes

1. f est constante.
2. $P = \operatorname{Re}(f)$ est constante.
3. $Q = \operatorname{Im}(f)$ est constante.
4. $\overline{f}$ est holomorphe sur U.
5. $|f|$ est constante.

Solution.

Il est clair que la condition 1) implique les autres. Comme $f = u + iv$ est holomorphe sur U, alors pour $z = x + iy \in U$, $x, y \in \mathbb{R}$, il vient $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.
La connexité de U implique alors l'équivalence de 2) et 3). Par suite, la condition 2) implique la condition 1). D'où l'équivalence 1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3).
De $2u = f + \overline{f}$, on déduit que, si 4) est vérifié, on a u holomorphe sur U. Comme $\operatorname{Im}(u) = 0$, l'équivalence de 2) et 3) nous fournit alors l'implication 4) $\Longrightarrow$ 2). On en déduit l'équivalence des conditions 1) à 4).
Si 5) est vérifié, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f|^2 = u^2 + v^2 = C$ pour tout $z \in U$. Si $C = 0$, il vient $f = 0$. Supposons $C \neq 0$. Pour $z \in U$, on a

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Compte tenu des conditions de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ on obtient

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Le système précédent aux inconnues $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ est homogène, et a pour déterminant $u^2 + v^2 = C \neq 0$. On voit donc que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. Comme U est connexe, u est donc constante. Ainsi 5) $\Longrightarrow$ 2). Par suite, les conditions 1) à 5) sont équivalentes.

Exercice 2.10

Vérifier que les fonctions données sont harmoniques et déterminer leurs conjuguées harmoniques dans chacun des cas suivants.

a) $u(x,y) = x$, **b)** $u(x,y) = 2x - 2xy$, **c)** $u(x,y) = x^2 - y^2$,

d) $u(x,y) = -e^{-x}\sin y$, **e)** $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, **f)** $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

Solution.

On rappelle qu'une fonction u de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω est dite harmonique si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pour tout } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

La fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est notée Δu et est appelée laplacien de u.
Notons que toutes les fonctions de a) à f) sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Ainsi si u une fonction harmonique dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Alors une fonction v est dite harmonique conjuguée de u si les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann et dans ce cas $f = u + iv$ est une fonction holomorphe sur $\Omega \subset \mathbb{C}$.

a) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Donc $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v conjuguée harmonique de u, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{2.10}$$

En intégrant l'équation (2.9) par rapport à y, il vient

$$v = y + C_1(x), \tag{2.11}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.11) dans (2.10) on obtient

$$\frac{d}{dx}C_1(x) = 0 \quad \to \quad C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.11), $v = y + c$.

b) On a $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2-2y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2x$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Donc $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0+0=0$, d'où la fonction u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2-2y, \tag{2.12}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2x. \tag{2.13}$$

En intégrant l'équation (2.12) par rapport à y, il vient

$$v=2y-y^2+C_1(x), \tag{2.14}$$

Par substitution de (2.14) dans (2.13) on obtient

$$\frac{d}{dx}C_1(x)=2x \quad \rightarrow \quad C_1(x)=x^2+c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.14), $v=2y-y^2+x^2+c$.

c) On a $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$. Donc $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$, alors u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \tag{2.15}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y. \tag{2.16}$$

En intégrant l'équation (2.15) par rapport à y, il vient

$$v=2xy+C_1(x), \tag{2.17}$$

Par substitution de (2.17) dans (2.16) on obtient

$$2y+\frac{d}{dx}C_1(x)=2y \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}C_1(x)=0 \quad \rightarrow \quad C_1(x)=c,$$

D'où de (2.17), $v=2xy+c$.

d) On a $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{-x}\sin y, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-e^{-x}\sin y, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^{-x}\cos y$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-x}\sin y$. Donc $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{-x}\sin y+e^{-x}\sin y=0$, alors u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-x}\sin y, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x} \cos y. \tag{2.19}$$

En intégrant l'équation (2.18) par rapport à y, il vient

$$v = -e^{-x} \cos y + C_1(x), \tag{2.20}$$

Par substitution de (2.20) dans (2.19) on obtient

$$e^{-x} \cos y + \frac{d}{dx} C_1(x) = e^{-x} \sin y \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1(x) = c,$$

D'où de (2.20), $v = -e^{-x} \cos y + c$.

e) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$, alors u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy. \tag{2.22}$$

En intégrant l'équation (2.21) par rapport à y, il vient

$$v = 3x^2 y - y^3 + C_1(x), \tag{2.23}$$

Par substitution de (2.23) dans (2.22) on obtient

$$6xy + \frac{d}{dx} C_1(x) = 6xy \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1(x) = c,$$

D'où de (2.23), $v = 3x^2 y - y^3 + c$.

f) On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \left((1+x) \cos y - y \sin y \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \left((2+x) \cos y - y \sin y \right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \left((1+x) \sin y + y \cos y \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \left((2+x) \cos y - y \sin y \right).$$

D'où $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \left((2+x) \cos y - y \sin y \right) - e^x \left((2+x) \cos y - y \sin y \right) = 0$ ce qui montre que u est harmonique.

Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \left((1+x) \cos y - y \sin y \right), \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x}\left((1+x)\sin y+y\cos y\right). \tag{2.25}$$

En intégrant l'équation (2.24) par rapport à y, il vient

$$v=e^{x}\left(x\sin y+y\cos y\right)+C_1\left(x\right), \tag{2.26}$$

Par substitution de (2.26) dans (2.25) on obtient

$$e^{x}\left((1+x)\sin y+y\cos y\right)+\frac{d}{dx}C_1\left(x\right)=e^{x}\left((1+x)\sin y+y\cos y\right)\quad\rightarrow\quad C_1\left(x\right)=c,$$

D'où de (2.26), $v=e^{x}\left(x\sin y+y\cos y\right)+c$.

Exercice 2.11

Vérifier que la fonction u donnée est harmonique et déterminer sa conjuguée harmonique v, puis expliciter la fonction complexe $f\left(z\right)=u+iv$ en fonction de z dans les cas suivants

a) $u\left(x,y\right)=xy+x+2y$ avec $f\left(2i\right)=-1+5i$,

b) $u\left(x,y\right)=4xy^{3}-4x^{3}y+x$ avec $f\left(1+i\right)=5+4i$.

Solution.

Remarquons que les fonction u des deux cas a) et b) sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) On a $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Donc $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v conjuguée harmonique de u, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=y+1, \tag{2.27}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-x-2. \tag{2.28}$$

En intégrant l'équation (2.27) par rapport à y, il vient

$$v=\frac{1}{2}y^{2}+y+C_1\left(x\right), \tag{2.29}$$

où $C_1\left(x\right)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.29) dans (2.28) on obtient

$$\frac{d}{dx}C_1\left(x\right)=-x-2\quad\rightarrow\quad C_1\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^{2}-2x+c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.29),

$$v = \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c.$$

Nous présentons trois méthodes pour expliciter f en fonction de z :

Méthode 1.

On a $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Posons $y = 0$, $f(x) = u(x,0) + iv(x,0)$. En remplaçant x par z on trouve $f(z) = u(z,0) + iv(z,0)$. Comme $u(z,0) = z$ et $v(z,0) = -\frac{1}{2}z^2 - 2z + c$, alors $f(z) = z - \frac{1}{2}iz^2 - 2iz + ic$. La condition $f(2i) = -1 + 5i$ donne

$$f(z) = (1-2i)z - \frac{1}{2}iz^2 - 3 + i.$$

Méthode 2.

On a

$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= xy + x + 2y + i\left(\frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c\right) \\ &= xy + \frac{1}{2}iy^2 - \frac{1}{2}ix^2 + x + 2y + iy - 2ix + ic \\ &= -\frac{1}{2}i\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + x + iy - 2i(x+iy) + ic \\ &= -\frac{1}{2}iz^2 + z - 2iz + ic. \end{aligned}$$

Méthode 3.

On sait que $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. D'où par substitution dans $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ on trouve, après des calculs fastidieux, que z disparaît et que seul subsiste le résultat $(1-2i)z - \frac{1}{2}iz^2 + ic$.

En général la méthode 1 est préférable aux méthodes 2 et 3 quand à la fois u et v sont connus.

Méthode 4.

Pour une fonction f holomorphe sur un domaine D on a $f(z) + f(\overline{z}) = 2u(x,y)$. En remplaçant x par $\dfrac{z}{2}$ et y par $-i\dfrac{z}{2}$ on trouve

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) - f(0).$$

Alors

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) = 2\left(\frac{z}{2}\left(-i\frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2} - iz\right) + 2ic$$

$$= -\frac{1}{2}iz^2 + (1-2i)\,z + 2ic.$$

En général la méthode 1 est préférable aux méthodes 2 et 3 quand à la fois u et v sont connus.

b) On a $\frac{\partial u}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y + 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -24xy$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 12xy^2 - 4x^3$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 24xy$. Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -24xy + 24xy = 0$, d'où la fonction u est harmonique.
Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y + 1, \tag{2.30}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2. \tag{2.31}$$

En intégrant l'équation (2.30) par rapport à y, il vient

$$v = y^4 - 6x^2y^2 + C_1(x)\,, \tag{2.32}$$

Par substitution de (2.32) dans (2.31) on obtient

$$-12xy^2 + \frac{d}{dx}C_1(x) = 4x^3 - 12xy^2 \quad \to \quad \frac{d}{dx}C_1(x) = 4x^3 \quad \to \quad C_1(x) = x^4 + c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.32), $v = y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + c$. Alors

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = z + iz^4 + ic.$$

Avec la condition $f(1+i) = 5 + 4i$ on trouve $f(z) = iz^4 + z + 4 + 7i$.

Exercice 2.12

Soit v la fonction définie par $v(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1. Montrer que v est harmonique dans un domaine D qui ne contient pas l'origine.
2. Trouver une fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ qui soit holomorphe sur le domaine D.
3. Exprimer f en fonction de z.

Solution.

Remarquons que la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ qui ne contient pas l'origine.

1. On a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2x\frac{\left(3y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^3},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2x\frac{\left(3y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^3}.$$

Donc $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ce qui montre que v est harmonique.

2. Pour trouver une fonction u pour que $f = u + iv$ soit holomorphe sur le domaine D, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann, qui s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \tag{2.33}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}. \tag{2.34}$$

En intégrant l'équation (2.33) par rapport à x, il vient

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} + C_1(y), \tag{2.35}$$

où $C_1(y)$ est une fonction réelle de y.

Par substitution de (2.35) dans (2.34) on obtient

$$\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{d}{dy}C_1(y) = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \quad \to \quad C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.35),

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} + c.$$

3. On a

$$\begin{aligned} f(z) = u(x, y) + iv(x, y) &= \frac{y}{x^2 + y^2} + c + i\frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{i(x - iy)}{(x - iy)(x + iy)} + c = \frac{i}{x + iy} + c \\ &= \frac{i}{z} + c \end{aligned}$$

Exercice 2.13

Soit $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ une fonction holomorphe sur un domaine D. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann sous forme polaire monter que u et v satisfont à l'équation de Laplace sous forme polaire

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Application : montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

$$\textbf{a)}\ u(x,y) = r^3\cos(3\theta), \quad \textbf{b)}\ u(x,y) = \frac{10r^2 - \sin(2\theta)}{r^2}.$$

Solution.

D'après le problème 2.8, les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires sont

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r}, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{2.37}$$

Pour éliminer v on dérive (2.36) par rapport à r et (2.37) par rapport à θ, d'où

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \tag{2.39}$$

Mais $\dfrac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta\partial r}$ si l'on suppose les dérivées partielles secondes continues. D'où d'après (2.38) et (2.39)

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{ou} \quad r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

De la même façon, par élimination de u on trouve $r^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0.$

Application :

a) On a $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 3r^2\cos(3\theta)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 6r\cos(3\theta)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -3r^3\sin(3\theta)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -9r^3\cos(3\theta)$. Donc

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2(6r\cos(3\theta)) + r\left(3r^2\cos(3\theta)\right) - 9r^3\cos(3\theta) = 0,$$

ce qui montre que u est harmonique.

b) On a $u(x,y) = \dfrac{10r^2 - \sin(2\theta)}{r^2} = 10 - \dfrac{\sin(2\theta)}{r^2}$ donc

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2\frac{\sin(2\theta)}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -6\frac{\sin(2\theta)}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -2\frac{\cos(2\theta)}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 4\frac{\sin(2\theta)}{r^2}.$$

Alors

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2\left(-6\frac{\sin(2\theta)}{r^4}\right) + r\left(2\frac{\sin(2\theta)}{r^3}\right) + 4\frac{\sin(2\theta)}{r^2} = 0,$$

ce qui montre que u est harmonique.

Exercice 2.14

Trouver toutes les fonctions conjuguées harmoniques qui correspondent aux formes suivantes :

$$\textbf{a)}\ u = F\left(x^2+y^2\right), \quad \textbf{b)}\ u = F(ax+by), \quad \textbf{c)}\ u = F(xy), \quad \textbf{d)}\ u = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Solution.

a) Il faut d'abord déterminer la fonction F pour laquelle u soit harmonique.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2xF'\left(x^2+y^2\right), & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2F'\left(x^2+y^2\right) + 4x^2F''\left(x^2+y^2\right), \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2yF'\left(x^2+y^2\right), & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2F'\left(x^2+y^2\right) + 4x^2F''\left(x^2+y^2\right).
\end{aligned}$$

Donc $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4F'(x^2+y^2) + 4(x^2+y^2)F''(x^2+y^2)$, alors u est harmonique si et seulement si

$$F'(s) + sF''(s) = 0,$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 et elle est équivalente à

$$\frac{F''(s)}{F'(s)} = -\frac{1}{s}.$$

En intégrant par rapport à s, on trouve

$$\ln F'(s) = -\ln s + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ ou bien } F'(s) = \frac{c_2}{s}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

En intégrant une autre fois par rapport à s, on obtient

$$F(s) = c_2 \ln s + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}.$$

Donc l'expression de F doit être $F(x^2+y^2) = c_2 \ln(x^2+y^2) + c_3$ avec $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Dans ce cas $\dfrac{\partial u}{\partial x} = c_2 \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = c_2 \dfrac{2y}{x^2+y^2}$.
Maintenant, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann pour trouver une fonction v conjuguée harmonique de u. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = c_2 \frac{2x}{x^2+y^2}, \tag{2.40}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -c_2 \frac{2y}{x^2+y^2}. \tag{2.41}$$

En intégrant l'équation (2.40) par rapport à y, il vient

$$v = 2c_2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C_1(x), \tag{2.42}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.42) dans (2.41) on obtient

$$-c_2 \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{d}{dx} C_1(x) = -c_2 \frac{2y}{x^2+y^2} \quad \to \quad \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \quad \to \quad C_1(x) = c_4,$$

où c_4 désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.42), $v = 2c_2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_4$.

b) Pour $u = F(ax+by)$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = aF'(ax+by), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 F''(ax+by), \frac{\partial u}{\partial y} = bF'(ax+by) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 F''(ax+by).$$

Donc $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (a^2+b^2) F''(ax+by)$, d'où la fonction u est harmonique si et seulement si $u = F(ax+by) = ax+by+c_1$, où c_1 une constante dans $\mathbb{R}$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = a, \tag{2.43}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -b. \tag{2.44}$$

En intégrant l'équation (2.43) par rapport à y, il vient

$$v = ay + C_1(x), \tag{2.45}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.45) dans (2.44) on obtient

$$\frac{d}{dx} C_1(x) = -b \quad \to \quad C_1(x) = -bx + c_2,$$

où c_2 désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.45), $v = ay - bx + c_2$.

c) Pour $u = F(xy)$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yF'(xy), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 F''(xy), \frac{\partial u}{\partial y} = xF'(xy) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 F''(xy).$$

Donc $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) F''(xy)$, d'où la fonction u est harmonique si et seulement si $u = F(xy) = c_1 xy + c_2$, où c_1, c_2 sont des constantes dans $\mathbb{R}$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = c_1 y, \tag{2.46}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -c_1 x. \tag{2.47}$$

En intégrant l'équation (2.46) par rapport à y, il vient

$$v = \frac{c_2}{2} y^2 + C_1(x), \tag{2.48}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.48) dans (2.47) on obtient

$$\frac{d}{dx} C_1(x) = -c_1 x \quad \rightarrow \quad C_1(x) = -\frac{c_1}{2} x^2 + c_2,$$

où c_2 désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.48), $v = \frac{c_1}{2}(y^2 - x^2) + c_2$.

d) Pour $u = F\left(\frac{y}{x}\right)$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} F'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} F'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} F''\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} F''\left(\frac{y}{x}\right).$$

Donc

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\left(2\frac{y}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) F''\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

d'où la fonction u est harmonique si et seulement si

$$2sF'(s) + \left(s^2 + 1\right) F''(s) = 0,$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 et elle est équivalente à

$$\frac{F''(s)}{F'(s)} = -\frac{2s}{s^2 + 1}.$$

En intégrant par rapport à s, on trouve

$$\ln F'(s) = -\ln\left(s^2 + 1\right) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ ou bien } F'(s) = \frac{c_2}{s^2 + 1}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

En intégrant une autre fois par rapport à s, on obtient

$$F(s) = c_2 \operatorname{Arctg} s + c_3, \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Donc l'expression de F doit être $F\left(\frac{y}{x}\right) = c_2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c_3$ avec $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Dans ce cas $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -c_2 \frac{y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = c_2 \frac{x}{x^2+y^2}$. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -c_2 \frac{y}{x^2+y^2}, \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -c_2 \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{2.50}$$

En intégrant l'équation (2.49) par rapport à y, il vient

$$v = -\frac{c_2}{2} \ln\left(x^2+y^2\right) + C_1(x), \tag{2.51}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.51) dans (2.50) on obtient

$$-c_2 \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{d}{dx} C_1(x) = -c_2 \frac{x}{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad C_1(x) = c_4,$$

où c_4 désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.51), $v = -\frac{c_2}{2} \ln\left(x^2+y^2\right) + c_4$.

Exercice 2.15

Déterminer les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ de la variable $z = x + iy$ dans chacun des cas suivants :

1. P ne dépend que de $x \cos\varphi + y \sin\varphi$ où φ est un angle donné.
2. $P^2 + Q^2$ ne dépend que de x.
3. $\dfrac{P}{Q}$ ne dépend que de x.

Solution.

1. Soit $P(x,y) = F(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$. D'après la question b) de l'exercice 2.14 pour $a = \cos\varphi$ et $b = \sin\varphi$, la fonction $P = c_1(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et la fonction v conjuguée harmonique de u est $Q = c_1(y\cos\varphi - \sin\varphi x) + c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$. Les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ dans ce cas sont

$$f(z) = c_1(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + c_2 + ic_1(y\cos\varphi - \sin\varphi x) + ic_3$$

$$
\begin{aligned}
&= c_1 \cos\varphi\,(x+iy) + c_1 \sin\varphi\,(y-ix) + c_2 + ic_3 \\
&= c_1 z \cos\varphi - ic_1 z \sin\varphi + c_2 + ic_3 \\
&= c_1 e^{-\varphi} z + c_2 + ic_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2. Soit $f = P + iQ$ telle que $P^2(x,y) + Q^2(x,y) = F(x)$ où F est une fonction positive non identiquement nulle sur un domaine connexe. En dérivant par rapport à x et puis y on trouve

$$
\begin{aligned}
2P(x,y)\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + 2Q(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= F'(x), \\
2P(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + 2Q(x,y)\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 0.
\end{aligned}
$$

Compte tenu des conditions de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$ on obtient

$$
\begin{cases}
P(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) - Q(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2}F'(x), \\
Q(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) + P(x,y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0.
\end{cases}
$$

Le déterminant de ce système en $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ est $D = P^2(x,y) + Q^2(x,y) \equiv F(x) \neq 0$. En résolvant ce système on obtient

$$
\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}P(x,y)\frac{F'(x)}{F(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2}Q(x,y)\frac{F'(x)}{F(x)},
$$

ou encore comme $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ on aura

$$
\frac{\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)}{P(x,y)} = \frac{1}{2}\frac{F'(x)}{F(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{1}{2}\frac{F'(x)}{F(x)}.
$$

En intégrant par rapport à x puis en prenant l'exponentielle des deux côtés on trouve

$$
P(x,y) = G_1(y)\sqrt{F(x)} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = G_2(y)\sqrt{F(x)},
$$

où G_1 et G_2 sont des fonctions de y. Comme $P^2(x,y) + Q^2(x,y) = F(x)$ alors $G_1^2(y) + G_2^2(y) = 1$ et donc

$$
P(x,y) = G(y)\sqrt{F(x)} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \sqrt{F(x)}\sqrt{1 - G^2(y)},
$$

où G est une fonction qui ne dépend que de y et qui satisfait la condition $1 - G^2(y) \geq 0$ sur un domaine connexe.

Pour déterminer la forme des fonctions F et G on utilise les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} &\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{F'(x)}{\sqrt{F(x)}}G(y) = -\frac{G(y)\,G'(y)}{\sqrt{1-G^2(y)}}\sqrt{F(x)},\\
\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} &\Longrightarrow G'(y)\sqrt{F(x)} = -\frac{1}{2}\frac{F'(x)}{\sqrt{F(x)}}\sqrt{1-G^2(y)}.
\end{aligned}$$

Ces deux équations sont identiques et peuvent s'écrire

$$-\frac{G'(y)}{\sqrt{1-G^2(y)}} = \frac{1}{2}\frac{F'(x)}{F(x)} = c_1, \text{ où } c_1 \text{ est une constante dans } \mathbb{R}.$$

En intégrant on trouve

$$F(x) = c_2 e^{2c_1 x} \text{ et } G(y) = \cos(c_1 y + c_3), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ dans ce cas sont

$$\begin{aligned}
f(z) &= c_4 e^{c_1 x}\cos(c_1 y + c_3) + i c_4 e^{c_1 x}\sin(c_1 y + c_3), \quad c_4 \in \mathbb{R}\\
&= \alpha e^{cz}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

3. Soit $f = P + iQ$ telle que $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} = F(x)$ ou bien $P(x,y) = F(x)\,Q(x,y)$ où F est une fonction non identiquement nulle sur un domaine connexe. En dérivant par rapport à x et puis y on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= F'(x)\,Q(x,y) + F(x)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),\\
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= F(x)\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y).
\end{aligned}$$

Compte tenu des conditions de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ on obtient

$$\begin{cases}
F(x)\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -F'(x)\,Q(x,y)\\
\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) + F(x)\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0.
\end{cases}$$

En résolvant ce système en $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ on obtient

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{F(x)\,F'(x)}{1+F^2(x)}Q(x,y), \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{F'(x)}{1+F^2(x)}Q(x,y). \tag{2.53}$$

En intégrant l'équation (2.52) par rapport à x, il vient

$$Q(x,y) = \frac{G(y)}{\sqrt{1+F^2(x)}}, \tag{2.54}$$

où $G(y)$ est une fonction réelle de y.

Par substitution de (2.54) dans (2.53) on obtient

$$\frac{G'(y)}{\sqrt{1+F^2(x)}} = \frac{F'(x)}{1+F^2(x)} \frac{G(y)}{\sqrt{1+F^2(x)}},$$

ce qui implique

$$\frac{G'(y)}{G(y)} = \frac{F'(x)}{1+F^2(x)} = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Encore en intégrant cet équation on trouve

$$F(x) = \operatorname{tg}(c_1 x + c_2) \quad \text{et} \quad G(y) = c_3 e^{c_1 y}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$Q(x,y) = \frac{G(y)}{\sqrt{1+F^2(x)}} = c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2).$$

Pour déterminer la fonction P on utilise les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = c_1 c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2), \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = c_1 c_3 e^{c_1 y} \sin(c_1 x + c_2). \tag{2.56}$$

En intégrant l'équation (2.56) par rapport à y, il vient

$$P(x,y) = c_3 e^{c_1 y} \sin(c_1 x + c_2) + C(x), \tag{2.57}$$

où $C(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.57) dans (2.55) on obtient

$$c_1 c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2) + C'(x) = c_1 c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2) \quad \to \quad C(x) = c_4, \ c_4 \in \mathbb{R}.$$

La constante c_4 doit être nulle car $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ ne dépend que de x. D'où

$$P(x,y) = c_3 e^{c_1 y} \sin(c_1 x + c_2), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions holomorphes $f = P + iQ$ dans ce cas sont

$$\begin{aligned} f(z) &= c_3 e^{c_1 y} \sin(c_1 x + c_2) + i c_3 e^{c_1 y} \cos(c_1 x + c_2), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, \\ &= \alpha e^{ciz}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$