Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumedienne[1]

Faculté des Mathématiques

Département d'Analyse

Manuel des solutions aux exercices de

Notes de Cours du module

Analyse Complexe (Math 4)

Par

LAADJ Toufik[2]

Pour

Deuxième année Licence
Domaine : Sciences et Technologies

Février 2014

[1] USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.
[2] Page Web : http://perso.usthb.dz/~tlaadj/

Table des matières

Chapitre 0

Les nombres complexes

Sommaire

Exercice 0.1

Soient $z = 2 - i, w = 1 + 3i$.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme $x + iy$: **a)** $\frac{z}{w}$, b) $\frac{zw}{z+w}$.

Solution.

Pour écrire un quotient de deux nombres complexes sous forme algébrique $x + iy$, on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur. Noter que le conjugué de $a + ib$ est $a - ib$.

a) $\frac{z}{w} = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2-6i-i+3i^2}{1^2-(3i)^2} = \frac{2-7i-3}{1+9} = \frac{-1}{10} - \frac{7}{10}i.$

b) $\frac{zw}{z+w} = \frac{(2-i)(1+3i)}{2-i+1+3i} = \frac{5+5i}{3+2i} = \frac{(5+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{25}{13} + \frac{5}{13}i.$

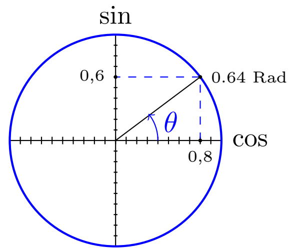
Exercice 0.2

Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

a) $z = 4 + 3i$, **b)** $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$, c) $z = \cos\theta - i\sin\theta$ $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$.

Solution.

Le module ou la valeur absolue d'un nombre complexe $a + ib$ est définie par $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. L'argument principale d'un nombre complexe non nul $a + ib$ est l'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ définie par $\cos\theta = \dfrac{a}{r}, \sin\theta = \dfrac{b}{r}$.



a) $r = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,

$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$, $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$,

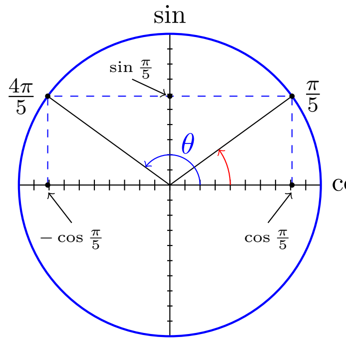
alors l'argument principale $\theta \simeq 0,64$ Rad.

b)
$$r = \left|-\cos\tfrac{\pi}{5} + i\sin\tfrac{\pi}{5}\right| = \sqrt{\left(-\cos\tfrac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin\tfrac{\pi}{5}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\tfrac{\pi}{5} + \sin^2\tfrac{\pi}{5}} = 1,$$

$$\cos\theta = \frac{-\cos\frac{\pi}{5}}{1} = -\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{1} = \sin\frac{\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right),$$

d'où l'argument principale $\theta = \dfrac{4\pi}{5}$.



$\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}$

$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{4\pi}{5}$

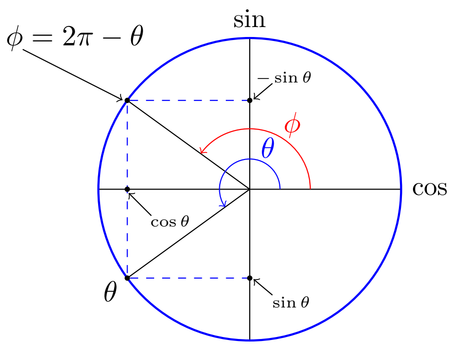
c) On note l'argument de z par ϕ pour ne pas confondre avec θ.

$$r = |\cos\theta - i\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1,$$

$$\cos\phi = \frac{\cos\theta}{1} = \cos\theta = \cos(-\theta) = \cos(2\pi - \theta),$$

$$\sin\phi = \frac{-\sin\theta}{1} = -\sin\theta = \sin(-\theta) = \sin(2\pi - \theta),$$

On a ajouté 2π à $-\theta$ pour que ϕ soit dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, alors l'argument principale de z est $\phi = 2\pi - \theta$.



$\cos\phi = \cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$

$\sin\phi = -\sin\theta = \sin(2\pi - \theta)$

Exercice 0.3

Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.

a) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-3i| \leq |z-3|\}$, **b)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-i| < 3\}$,

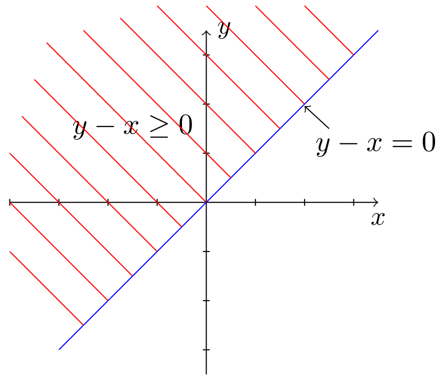
c) $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-i| > 3\}$, **d)** $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z < 1\}$.

Solution.

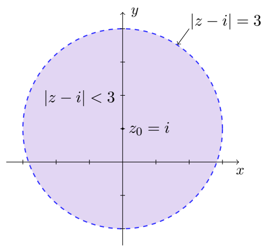
a) Si $z = x + iy$, l'inégalité $|z-3i| \leq |z-3|$ devient alors, en prenant le carré de deux membres

$$x^2 + (y-3)^2 \leq (x-3)^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad -6y \leq -6x.$$

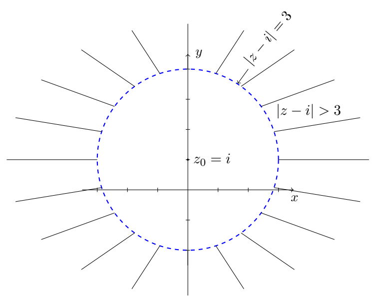
D'où $y - x \geq 0$. L'ensemble $|z-3i| \leq |z-3|$ est donc la partie dessus de la droite $y - x = 0$, la droite y comprise. Dans la figure ci-contre, c'est la partie hachurée.



b) L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-i| < 3\}$ est un disque de centre $z_0 = i \equiv (0,1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle $|z-i| = 3$ non compris. Voir la figure ci-contre.



c) L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-i| > 3\}$ est l'extérieur du cercle de centre $z_0 = i \equiv (0,1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle non compris. C'est la partie hachurée dans la figure ci-contre.

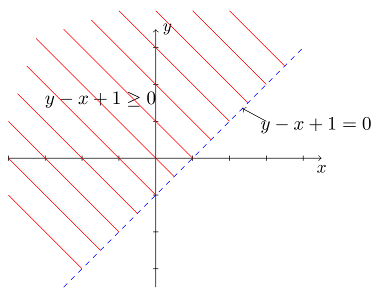


d) L'ensemble $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z < 1$ s'écrit sous forme

$$x - y < 1 \text{ ou } y - x + 1 > 0.$$

C'est la partie dessus de la droite $y - x + 1 = 0$, la droite non comprise.

Voir la partie hachurée dans la figure ci-contre.



Exercice 0.4

Résoudre les équations : **a)** $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$, **b)** $(z-1)^4 = 1$.

Solution.

a) Tout d'abord, on remarque que $z^3+3z^2+3z+3 = (z+1)^3+2$, donc notre problème revient à résoudre l'équation $(z+1)^3 = -2$. En écrivant -2 sous forme polaire,

$$(z+1)^3 = 2\left\{\cos(\pi+2k\pi) + i\sin(\pi+2k\pi)\right\}, k \in \mathbb{Z},$$

alors, d'après la formule de De Moivre,

$$z+1 = 2^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right\}, k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$z = 2^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right\} - 1,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Si $k=0,\ \ z = z_0 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1.$

Si $k=1,\ \ z = z_1 = 2^{\frac{1}{3}}(\cos\pi + i\sin\pi) - 1 = -2^{\frac{1}{3}} - 1.$

Si $k=2,\ \ z = z_2 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) - 1 = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1.$

En considérant $k = 3, 4, \ldots$ aussi bien que des valeurs négatives $-1, -2, \ldots$ on retrouve les trois valeurs de z déjà obtenues. Ce sont donc les seules solutions ou racines de l'équation donnée. En général, pour les racines n-ièmes, $k = 0, 1, \ldots n-1$, et il y en a n.

b) Sous forme polaire $1 = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = (z-1)^4,\ \ k \in \mathbb{Z}$. D'après la formule de De Moivre, $z - 1 = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$ ou $z = 1 + \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2},\ \ k = 0, 1, 2, 3.$

Si $k=0,\ \ z = z_0 = 1 + \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 1 = 2.$

Si $k=1,\ \ z = z_1 = 1 + \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 1 + i.$

Si $k=2,\ \ z = z_2 = 1 + \cos\pi + i\sin\pi = 1 - 1 = 0.$

Si $k=3,\ \ z = z_3 = 1 + \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 1 - i.$

Exercice 0.5

Donner les nombres complexes suivants sous forme $x+iy$.
a) $(1+i)^{1000}$, **b)** $\left(\sqrt{3}-i\right)^3\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-5}$.

Solution.

a) Sous forme polaire $1+i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right\}$. En élevant à la puissance 1000 les deux membres de cette égalité et à l'aide de la formule de De Moivre

$$\begin{aligned}(1+i)^{1000} &= \sqrt{2}^{1000}\left\{\cos\left(1000\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)+i\sin\left(1000\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)\right\}\\ &= \sqrt{2}^{1000}\left\{\cos\left(250\pi+2000k\pi\right)+i\sin\left(250\pi+2000k\pi\right)\right\}\\ &= 2^{500}\left(1+i0\right)=2^{500}.\end{aligned}$$

b) Sous forme polaire

$$\begin{aligned}\sqrt{3}-i &= 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right\},\\ -1+i\sqrt{3} &= 2\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right\}.\end{aligned}$$

D'après la formule de De Moivre,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^3 &= 2^3\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)\right\},\\ \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-5} &= 2^{-5}\left\{\cos\left(-\frac{10\pi}{3}-10k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}-10k\pi\right)\right\}.\end{aligned}$$

Si on a deux nombres complexes s'écrivant sous forme polaire $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_2\right)$ et $z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$, alors le produit $z_1z_2=r_1r_2\left\{\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right\}$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^3\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-5} &= 2^32^{-5}\left\{\cos\left(-\frac{23\pi}{6}-4k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{23\pi}{6}-4k\pi\right)\right\}\\ &= 2^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}i.\end{aligned}$$

Exercice 0.6

Calculer $i^{\frac{1}{6}}$ et représenter les résultats dans le plan complexe.

Solution. $i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \;\; k \in \mathbb{Z}$.

$$i^{\frac{1}{6}} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right), \;\; k = 0, 1, ...5.$$

Si $k = 0$, $z = z_0 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \simeq 0.97 + 0.26i$.

Si $k = 1$, $z = z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} \simeq 0.26 + 0.97i$.

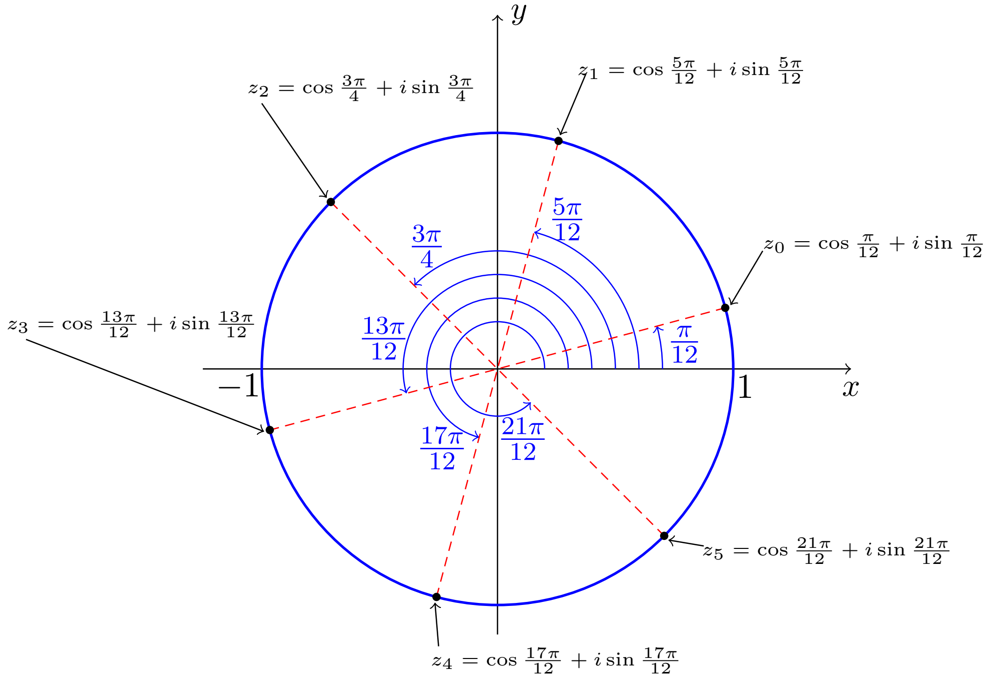
Si $k = 2$, $z = z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Si $k = 3$, $z = z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12} \simeq -0.97 - 0.26i$.

Si $k = 4$, $z = z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12} \simeq -0.26 - 0.97i$.

Si $k = 5$, $z = z_5 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Ces racines sont représentées dans la figure ci-dessous. On notera qu'elles sont également réparties sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine.



Exercice 0.7

Calculer les sommes suivantes :

a) $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$, **b)** $\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$.

Solution. Posons $C_n = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$ et $S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$. Si $z = \cos x + i \sin x$, alors d'après la formule de De Moivre,

$$z^2 = \cos 2x + i \sin 2x,\ \ z^3 = \cos 3x + i \sin 3x, ...z^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Par addition membre à membre de ces formules,

$$\begin{aligned} z + z^2 + ... + z^n &= \cos x + i \sin x + \cos 2x + i \sin 2x + ... + \cos nx + i \sin nx \\ &= C_n + iS_n. \end{aligned}$$

Le terme à gauche est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison $r = z$ et de premier terme z. Cette somme peut s'écrire sous la forme

$$z + z^2 + ... + z^n = z\frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Alors $C_n = \operatorname{Re}\left(\dfrac{z - z^{n+1}}{1 - z}\right)$ et $S_n = \operatorname{Im}\left(\dfrac{z - z^{n+1}}{1 - z}\right)$, donc il nous reste à séparer les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{z - z^{n+1}}{1 - z}$.

Nous avons

$$\frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{\left(z - z^{n+1}\right) z^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{n+1}{2}} z^{\frac{n+1}{2}}}{\left(1 - z\right) z^{-\frac{1}{2}}} = \frac{z^{\frac{n+1}{2}} \left(z^{-\frac{n}{2}} - z^{\frac{n}{2}}\right)}{\left(z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Puisque $z^{-\frac{n}{2}} - z^{\frac{n}{2}} = -2i \sin \frac{nx}{2}$ et $z^{\frac{n+1}{2}} = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$, alors

$$\frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{-2i \sin \frac{nx}{2} \left\{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right\}}{-2i \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}} + i\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

D'où

$$C_n = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

et

$$S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Chapitre 1

Fonctions élémentaires

Sommaire

Exercice 1.1

Séparer les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

a) $f(z) = e^{-z}$, **b)** $f(z) = \sin z$, **c)** $f(z) = \operatorname{Ch} z$, **d)** $f(z) = 2^{z^2}$, **e)** $f(z) = z^{2-i}$.

Solution.

a) $f(z) = e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}(\cos y - i\sin y) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y$,

b) $$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} = \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos x}{2i} + \frac{i(e^{-y} + e^{y})\sin x}{2i}$$

$$= i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x + \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x = \operatorname{Ch} y \sin x + i \operatorname{Sh} y \cos x.$$

Autre méthode : $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$.

Puisque $\cos(iy) = \operatorname{Ch} y$ et $\sin(iy) = i \operatorname{Sh} y$, on trouve $\sin z = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y$.

c) $f(z) = \operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch}(x+iy) = \operatorname{Ch} x \operatorname{Ch}(iy) + \operatorname{Sh} x \operatorname{Sh}(iy)$.

En notant que $\operatorname{Ch}(iy) = \cos y$ et $\operatorname{Sh}(iy) = i \sin y$, on obtient

$$f(z) = \operatorname{Ch} x \cos y + i \operatorname{Sh} x \sin y.$$

d) $f(z) = 2^{z^2} = e^{z^2 \operatorname{Log}(2)} = e^{(x+iy)^2(\ln(2)+2ik\pi)},\ k \in \mathbb{Z}$

$$= e^{\left(x^2-y^2+2ixy\right)(\ln(2)+2ik\pi)} = e^{\left(x^2-y^2\right)\ln(2) - 4k\pi xy + 2i\left\{\left(x^2-y^2\right)k\pi + xy\ln 2\right\}}$$

$$= e^{\left(x^2-y^2\right)\ln(2) - 4k\pi xy}\left\{\cos\left[2\left(x^2-y^2\right)k\pi + 2xy\ln 2\right] + i\sin\left[2\left(x^2-y^2\right)k\pi + 2xy\ln 2\right]\right\}.$$

Pour la détermination principale ($k=0$), $f(z) = 2^{\left(x^2-y^2\right)}\left\{\cos(2xy\ln 2) + i\sin(2xy\ln 2)\right\}$.

e) $f(z) = z^{2-i} = e^{(2-i)\operatorname{Log}(z)} = e^{(2-i)(\ln(|z|)+i\arg(z))} = e^{2\ln(|z|)+\arg(z)+i(2\arg(z)-\ln(|z|))}$

$$= e^{2\ln(|z|)+\arg(z)}\left\{\cos(2\arg(z) - \ln|z|) + i\sin(2\arg(z) - \ln|z|)\right\}.$$

Puisque $\arg(z)$ peut s'écrire sous forme $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et $\ln(|z|) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$, on trouve

$\operatorname{Re}(f(z)) = \left(x^2+y^2\right)e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$ et

$\operatorname{Im}(f(z)) = \left(x^2+y^2\right)e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}\sin\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$

Noter que $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et donc f est une fonction multiforme.

Exercice 1.2

Démontrer les relations suivantes :

a) $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 y - \cos^2 x}$, **b)** $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 y - \sin^2 x}$,

c) $|\operatorname{Sh} z| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - \cos^2 y}$, **d)** $|\operatorname{Ch} z| = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - \sin^2 y}$.

Solution.

Nous pouvons calculer le module d'un nombre complexe w, soit par définition en identifiant ses parties réelles et imaginaires ou par la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$.

Nous allons utiliser la propriété $|w|^2 = w\overline{w}$ ici.

a) $|\sin z|^2 = \sin z\overline{\sin z} = \left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\left(\dfrac{e^{-i\overline{z}}-e^{i\overline{z}}}{-2i}\right) = \dfrac{e^{i(z-\overline{z})}-e^{i(z+\overline{z})}-e^{-i(z+\overline{z})}+e^{-i(z-\overline{z})}}{4}$.
Puisque $z-\overline{z}=2iy$ et $z+\overline{z}=2x$, on a
$|\sin z|^2 = \dfrac{e^{-2y}-e^{2ix}-e^{-2ix}+e^{2y}}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}-\dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Ch}\,(2y)-\cos(2x)\right)$.
En utilisant les transformations $\mathrm{Ch}\,(2y) = 2\,\mathrm{Ch}^2\,y-1$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x-1$, on trouve le résultat demandé $|\sin z|^2 = \dfrac{1}{2}\left(2\,\mathrm{Ch}^2\,y-1-(2\cos^2 x-1)\right) = \mathrm{Ch}^2\,y-\cos^2 x$.

b)
$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 = \cos z\overline{\cos z} &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{-i\overline{z}}+e^{i\overline{z}}}{2}\right) = \frac{e^{i(z-\overline{z})}+e^{i(z+\overline{z})}+e^{-i(z+\overline{z})}+e^{-i(z-\overline{z})}}{4}\\
&= \frac{e^{-2y}+e^{2ix}+e^{-2ix}+e^{2y}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}+\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ch}\,(2y)+\cos(2x)\right).
\end{aligned}$$

Par les transformations $\mathrm{Ch}\,(2y) = 2\,\mathrm{Ch}^2\,y-1$ et $\cos(2x) = 1-2\sin^2 x$, on obtient la relation cherchée $|\cos z|^2 = \dfrac{1}{2}\left(2\,\mathrm{Ch}^2\,y-1+1-2\sin^2 x\right) = \mathrm{Ch}^2\,y-\sin^2 x$.

c) Nous avons $\mathrm{Sh}\,z = \mathrm{Sh}\,(x+iy) = \dfrac{e^{x+iy}-e^{-(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{i(y-ix)}-e^{-i(y-ix)}}{2} = i\sin(y-ix)$.
D'après la relation **a)**,

$$|\mathrm{Sh}\,z| = |i\sin(y-ix)| = |\sin(y-ix)| = \sqrt{\mathrm{Ch}^2\,(-x)-\cos^2 y} = \sqrt{\mathrm{Ch}^2\,x-\cos^2 y}.$$

d) $\mathrm{Ch}\,z = \mathrm{Ch}\,(x+iy) = \dfrac{e^{x+iy}+e^{-(x+iy)}}{2} = \dfrac{e^{i(y-ix)}+e^{-i(y-ix)}}{2} = \cos(y-ix)$.
D'après la relation **b)**, $|\mathrm{Ch}\,z| = |\cos(y-ix)| = \sqrt{\mathrm{Ch}^2\,(-x)-\sin^2 y} = \sqrt{\mathrm{Ch}^2\,x-\sin^2 y}$.

Exercice 1.3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\mathrm{Im}\,(\sin z) = 0$, **b)** $\mathrm{Re}\,(\mathrm{Sh}\,z) = 0$, **c)** $\sin z = \frac{4}{3}i$, **d)** $\mathrm{Sh}\,z = \frac{i}{2}$, **e)** $e^z = -2$.

Solution.

a) D'après l'**exercice 1.1 b)**, $\sin z = \sin x\,\mathrm{Ch}\,y + i\cos x\,\mathrm{Sh}\,y$.

La partie imaginaire de $\sin z$ s'annule si $\cos x\,\mathrm{Sh}\,y = 0$, ce qui est équivalent à $\cos x = 0$ ou $\mathrm{Sh}\,y = 0$. D'où $x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $y = 0$.

b) Tout d'abord, nous séparons les parties réelles et imaginaires de la fonction $\mathrm{Sh}\,z$.

Nous avons

$$\operatorname{Sh} z=\operatorname{Sh}(x+iy)=\operatorname{Sh} x \operatorname{Ch}(iy)+\operatorname{Ch} x \operatorname{Sh}(iy)=\operatorname{Sh} x\cos y+i\operatorname{Ch} x\sin y.$$

La partie réelle de $\operatorname{Sh} z$ s'annule si $\operatorname{Sh} x\cos y=0$, d'où $x=0$ ou $y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

c) D'après l'**exercice 1.1 b)**, $\sin z=\sin x\operatorname{Ch} y+i\cos x\operatorname{Sh} y$. Alors $\sin z=\dfrac{4}{3}i$ entraîne $\sin x\operatorname{Ch} y=0$ et $\cos x\operatorname{Sh} y=\dfrac{4}{3}$. Puisque $\operatorname{Ch} y\geq 1$, on aura $\sin x=0$ ou $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient

$$\cos(k\pi)\operatorname{Sh} y=\frac{4}{3}\quad\text{ou}\quad \operatorname{Sh} y=\frac{4}{3\cos(k\pi)}=\frac{4}{3(-1)^k},$$

d'où $y=\operatorname{Argsh}\left(\dfrac{4}{3(-1)^k}\right)=(-1)^k\operatorname{Argsh}\left(\dfrac{4}{3}\right)$, et donc les racines cherchés sont

$$z_k=k\pi+i(-1)^k\operatorname{Argsh}\left(\frac{4}{3}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

d) D'après la question **b)**, $\operatorname{Sh} z=\operatorname{Sh} x\cos y+i\operatorname{Ch} x\sin y$. Donc l'équation $\operatorname{Sh} z=\dfrac{i}{2}$ est équivalente à $\operatorname{Sh} x\cos y=0$ et $\operatorname{Ch} x\sin y=\dfrac{1}{2}$.

Si $\operatorname{Sh} x=0$, i.e. $x=0$, on aura

$$\sin y=\frac{1}{2}\quad\text{ou}\quad\left\{y=\frac{\pi}{6}+2k\pi\text{ ou }y=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Si $\cos y=0$ i.e. $y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, on obtient $\operatorname{Ch} x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k\operatorname{Ch} x=\dfrac{1}{2}$ ou $\operatorname{Ch} x=\dfrac{(-1)^k}{2}$ et ceci n'est pas possible car $\operatorname{Ch} x\geq 1$.

Alors, les racines de l'équation $\operatorname{Sh} z=\dfrac{i}{2}$ sont

$$z_k=i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\quad\text{ou}\quad z_k=i\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}.$$

e) Si $e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y=-2$, alors $e^x\cos y=-2$ et $e^x\sin y=0$.

Puisque $e^x>0$, on aura $\sin y=0$ ou $y=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^x\cos(k\pi)=-2\text{ ou }e^x=\frac{-2}{\cos(k\pi)}=\frac{-2}{(-1)^k}=2(-1)^{k+1}.$$

Ceci est possible seulement si $k+1$ est un nombre pair. Dans ce cas $x=\ln 2$. Alors les racines de l'équation $e^z=-2$ sont $z_k=\ln 2+i(1+2k)\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 1.4

Démontrer que $e^{(\operatorname{Log} z)} = z$ et montrer que

l'égalité $\operatorname{Log}(e^z) = z$ n'est pas toujours vérifiée.

Solution.

Soit z un nombre complexe, nous avons

$$\begin{aligned} e^{(\operatorname{Log} z)} &= e^{\ln(|z|)+i\arg(z)} = e^{\ln(|z|)}\left\{\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\right\} \\ &= |z|\left\{\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\right\}. \end{aligned}$$

La dernière formule est exactement l'écriture du nombre complexe z sous forme trigonométrique, i.e. $|z|\left\{\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\right\} = z$, d'où $\operatorname{Log}(e^z) = z$.

En ce qui concerne la deuxième partie de l'exercice, par exemple dans le cas de la détermination principale, si nous prenons $z = 4i\pi$, nous obtiendrons $\operatorname{Log}(e^z) = \operatorname{Log}(e^{4i\pi}) = \operatorname{Log}(1) = 0$ ce qui est différent de $4i\pi$.

Exercice 1.5

Calculer **a)** $\operatorname{Log}(1+i)$, **b)** i^i, **c)** $(1-i)^{3-3i}$.

Solution.

a) $\operatorname{Log}(1+i) = \ln(|1+i|) + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

b) $i^i = e^{i\operatorname{Log} i} = e^{i(\ln|i| + i\arg i)} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}$.

c) $(1-i)^{3-3i} = e^{(3-3i)\operatorname{Log}(1-i)} = e^{(3-3i)\{\ln(|1-i|)+i\arg(1-i)\}}$

$$\begin{aligned} &= e^{(3-3i)\left\{\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right\}} = e^{3\ln\sqrt{2}+3\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+3i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} e^{3\left(-\frac{1}{4}+2k\right)\pi}\left\{\cos\left(3\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right) + i\sin\left(3\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2}\right)\right)\right\} \\ &= 2\sqrt{2}e^{3\left(-\frac{1}{4}+2k\right)\pi}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi + 3\ln\sqrt{2}\right) - i\sin\left(\frac{3}{4}\pi + 3\ln\sqrt{2}\right)\right\}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 1.6

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(2z)}{\mathrm{Ch}(iz)+i\,\mathrm{Sh}(iz)}$, **b)** $\lim\limits_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$.

Solution.

a) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(2z)}{\mathrm{Ch}(iz)+i\,\mathrm{Sh}(iz)} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{Ch}\left(i\frac{\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{Sh}\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{0}{0}$ forme indéterminée.

Donc on doit trouver un moyen pour enlever l'indétermination, pour cela on va remplacer $\mathrm{Ch}(iz)$ par $\cos z$ et $i\,\mathrm{Sh}(iz)$ par $-\sin z$. On obtient

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\mathrm{Ch}(iz)+i\,\mathrm{Sh}(iz)} &= \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2z)}{\cos z-\sin z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 z-\sin^2 z}{\cos z-\sin z}\\ &= \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos z-\sin z)(\cos z+\sin z)}{\cos z-\sin z} = \cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \dfrac{e^{-i\pi}+1}{e^{-i\frac{\pi}{2}}+i} = \dfrac{-1+1}{-i+i} = \dfrac{0}{0}$ forme indéterminée.

Par décomposition de numérateur $e^{2z}+1 = (e^z)^2 - i^2 = (e^z-i)(e^z+i)$ nous voyons que

$$\lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{(e^z-i)(e^z+i)}{e^z+i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - i = -2i.$$

Exercice 1.7

Montrer que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas.

Solution.

Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

Si $z\to 0$ le long de l'axe des x, alors $y=0$ et $z=x+iy=x$, $\overline{z}=x-iy=x$; la limite cherchée est donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$.

Si $z\to 0$ le long de l'axe des y, alors $x=0$ et $z=x+iy=iy$, $\overline{z}=x-iy=-iy$; la limite cherchée est $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-iy}{iy} = -1$.

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z\to 0$, il n'y a pas de limite.

Chapitre 2

Dérivation dans le domaine complexe

Sommaire

Exercice 2.1

À l'aide de la définition calculer la dérivée de $f(z) = z^2 - z$.

Solution.

Par définition, la dérivée en z_0 si elle existe est

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z - (z_0^2 - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z_0^2 - (z - z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0) - (z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0 - 1)}{z - z_0} = 2z_0 - 1.$$

La limite existe pour tout z_0 dans $\mathbb{C}$, donc la dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = 2z - 1, z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 2.2

Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.

a) $f(z) = \overline{z}$, pour $z \in \mathbb{C}$, **b)** $f(z) = \operatorname{Re} z$, pour $z \in \mathbb{C}$, **c)** $f(z) = \operatorname{Im} z$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Solution.

Par définition, la fonction f n'est pas dérivable en z_0 si la limite $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'existe pas, i.e. la limite dépend de la manière dont z tend vers z_0.

a) Si $z = x + iy$, $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{x - iy - (x_0 - iy_0)}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Pour $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Pour $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite cherchée est $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1$.

La limite obtenue dépendant de la façon dont $z \to z_0$, la dérivée n'existe pas i.e. la fonction f n'est dérivable en aucun point.

b) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{x - x_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Si $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite est $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Si $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite est $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{0}{iy - iy_0} = 0$.

c) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \dfrac{y - y_0}{x + iy - (x_0 + iy_0)}$.

Si $y = y_0$ et $x \to x_0$, la limite est $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{0}{x - x_0} = 0$.

Si $x = x_0$ et $y \to y_0$, la limite est $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{y - y_0}{iy - iy_0} = \dfrac{1}{i} = -i$.

Exercice 2.3

Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.

a) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin y)$, sur $\mathbb{C}$, **b)** $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

c) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, sur $\mathbb{C}$, **d)** $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$, sur $\mathbb{C}$.

Solution.

Si les dérivées partielles sont continues dans le domaine indiqué, les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

a) $u = e^{-y}\cos x$ et $v = e^{-y}\sin y$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\sin x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}\sin y + e^{-y}\cos y$.

Il est claire que $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$, la première équation de Cauchy-Riemann n'est pas satisfaite. Alors la fonction f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Pour la même raison que celle qui précède f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

c) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$.

Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

d) $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = x^2 - y^2 + 2xy$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont ainsi satisfaites et la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.4

a) Montrer que la fonction u définie ci-dessous est harmonique.

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe.

b) Mêmes questions pour la fonction

$$u(x, y) = y \cos y \operatorname{Ch} x + x \sin y \operatorname{Sh} x, \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Solution.

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$.

On obtient $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les équations de Cauchy-Riemann.

Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2x - 3. \tag{2.2}$$

En intégrant l'équation (2.1) par rapport à y, il vient

$$v = 2xy - y^2 - 2y + C_1(x), \tag{2.3}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.3) dans (2.2) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx} C_1(x) = 2y + 2x - 3 \;\; \rightarrow \;\; \frac{d}{dx} C_1(x) = 2x - 3 \;\; \rightarrow \;\; C_1(x) = x^2 - 3x + c,$$

où c désigne une constante. D'où de (2.3)

$$v = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + c.$$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y \cos y \operatorname{Sh} x + \sin y \operatorname{Sh} x + x \sin y \operatorname{Ch} x = (y \cos y + \sin y) \operatorname{Sh} x + x \sin y \operatorname{Ch} x$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (y \cos y + \sin y) \operatorname{Ch} x + \sin y \operatorname{Ch} x + x \sin y \operatorname{Sh} x = (y \cos y + 2 \sin y) \operatorname{Ch} x + x \sin y \operatorname{Sh} x. \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y \operatorname{Ch} x - y \sin y \operatorname{Ch} x + x \cos y \operatorname{Sh} x = (\cos y - y \sin y) \operatorname{Ch} x + x \cos y \operatorname{Sh} x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-\sin y - \sin y - y \cos y) \operatorname{Ch} x - x \sin y \operatorname{Sh} x, \tag{2.5}$$

Par addition de (2.4) et (2.5) on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, la fonction u est donc harmonique. Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = (y \cos y + \sin y) \operatorname{Sh} x + x \sin y \operatorname{Ch} x, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = (-\cos y + y \sin y) \operatorname{Ch} x - x \cos y \operatorname{Sh} x. \tag{2.7}$$

En intégrant (par parties) l'équation (2.6) par rapport à y, il vient

$$v = (y \sin y + \cos y - \cos y) \operatorname{Sh} x - x \cos y \operatorname{Ch} x + C_1(x) = y \sin y \operatorname{Sh} x - x \cos y \operatorname{Ch} x + C_1(x). \tag{2.8}$$

Par substitution de (2.8) dans (2.7) on obtient

$$y \sin y \operatorname{Ch} x - \cos y \operatorname{Ch} x - x \cos y \operatorname{Sh} x + \frac{d}{dx} C_1(x) = (-\cos y + y \sin y) \operatorname{Ch} x - x \cos y \operatorname{Sh} x$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} C_1(x) = 0 \quad \rightarrow C_1(x) = c, \text{ où } c \text{ désigne une constante.}$$

D'où de (2.8) on obtient

$$v = y \sin y \operatorname{Sh} x - x \cos y \operatorname{Ch} x + c.$$

Exercice 2.5

Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes?
a) $\frac{z+3}{z^2-1}$, **b)** $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)}$.

Solution.

a) Nous avons $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1} = \frac{z+3}{(z-1)(z+1)}$, puisque

$$\lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z+3}{(z+1)} = 2 \neq 0,$$

le point $z = 1$ est un pôle simple.

De même $z = -1$ est aussi un pôle simple à cause de

$$\lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{z+3}{(z-1)} = -1 \neq 0.$$

Nous pouvons déterminer δ tel qu'il n'existe pas d'autre singularité que $z = 1$ dans le cercle $|z - 1| = \delta$, il suffit de choisir $\delta = 1$, on en déduit que $z = 1$ est pont singulier isolé. De la même façon $z = -1$ est aussi un point singulier isolé.

b) On obtient des singularités pour $\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0$, i.e. $\dfrac{1}{z^2} = k\pi$ ou $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}, k \in \mathbb{Z}^*$. De plus comme $g\left(z\right)$ n'est pas définie pour $z = 0$, ce point est aussi une singularité. De même, puisque $z = 0$ est une singularité de $g\left(\frac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{\sin\left(z^2\right)}$, $z = \infty$ est une singularité de $g\left(z\right)$.
Décrivons maintenant la nature de ces singularités. En utilisant la règle de L'Hôpital

$$\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \left(z - \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) g\left(z\right) = \lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{z - \frac{1}{\sqrt{k\pi}}}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{1}{\frac{-2}{z^3}\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{-1}{2k\pi\sqrt{k\pi}\cos\left(k\pi\right)} \neq 0$$

et

$$\lim_{z\to\frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \left(z + \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) g\left(z\right) = \lim_{z\to\frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{z + \frac{1}{\sqrt{k\pi}}}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z\to\frac{-1}{\sqrt{k\pi}}} \frac{1}{\frac{-2}{z^3}\cos\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{-1}{2k\pi\sqrt{k\pi}\cos\left(k\pi\right)} \neq 0.$$

Les singularités $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}, k \in \mathbb{Z}^*$ sont donc des pôles simples. Comme nous pouvons entourer chacune de ces singularités par un cercle de rayon δ_k n'en contenant pas d'autre, on en déduit qu'elles sont isolées.
Etant donné que l'on ne peut pas trouver d'entier n tel que $\lim_{z\to 0}\left(z - 0\right)^n g\left(z\right) = A \neq 0$, on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle. De plus comme tout cercle de rayon δ centré en $z = 0$ contient d'autres singularités que $z = 0$, on en déduit que $z = 0$ est une singularité non isolée.

Chapitre 3

Intégration dans le domaine complexe

Sommaire

Exercice 3.1

Calculer $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)\, dx + (3x - y)\, dy$ le long de

a) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$,

b) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0,3)$ à $(2,3)$ et $(2,3)$ à $(2,4)$,

c) le segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,4)$.

Solution.

a) Les points $(0,3)$ et $(2,4)$ de la parabole correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = 1$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\int_{t=0}^{1} \left\{2\left(t^2+3\right) + (2t)^2\right\} 2dt + \left\{3\,(2t) - \left(t^2+3\right)\right\} 2tdt = \int_0^1 \left(24t^2 + 12 - 2t^3 - 6t\right) dt = \frac{33}{2}.$$

b) Le long du segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,3)$, $y=3$, $dy=0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{x=0}^{2}\left(6+x^2\right)dx+(3x-3)\,0=\int_0^2\left(6+x^2\right)dx=\frac{44}{3}.$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(2,3)$ et $(2,4)$, $x=2$, $dx=0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{y=3}^{4}(2y+4)\,0+(6-y)\,dy=\int_3^4(6-y)\,dy=\frac{5}{2}.$$

Le résultat demandé est donc $=\dfrac{44}{3}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{103}{6}$.

c) Une équation de la droite joignant $(0,3)$ à $(2,4)$ est $2y-x=6$. On en tire $x=2y-6$. D'où la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{y=3}^{4}\left\{2y+(2y-6)^2\right\}2dy+\left\{3\,(2y-6)-y\right\}dy=\int_3^4\left(8y^2-39y+54\right)dy=\frac{97}{6}$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant $y=\dfrac{1}{2}\,(x+6)$.

Exercice 3.2

Évaluer $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ de $z=0$ à $z=4+2i$ le long de la courbe C dans les cas suivants.

a) la courbe C définie par $z=t^2+it$,

b) la courbe C formée des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4+2i$.

Solution.

a) Les points $z=0$ et $z=4+2i$ sur C correspondant à $t=0$ et à $t=2$. L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\int_{t=0}^{2}\overline{(t^2+it)}d\left(t^2+it\right)=\int_0^2\left(t^2-it\right)(2t+i)\,dt=\int_0^2\left(2t^3-it^2+t\right)dt=10-\frac{8}{3}i.$$

Autre méthode. L'intégrale donnée s'écrit

$$\int_C(x-iy)\,(dx+idy)=\int_C xdx+ydy+i\int_C xdy-ydx$$

Les équations paramétriques de C sont $x=t^2$, $y=t$ de $t=0$ à $t=2$; l'intégrale curviligne a donc pour valeur

$$\int_{t=0}^{2}\left(t^2\right)(2tdt)+(t)\,(dt)+i\int_{t=0}^{2}\left(t^2\right)(dt)-(t)\,(2tdt)=\int_0^2\left(2t^3+t\right)dt+i\int_0^2\left(-t^2\right)dt=10-\frac{8}{3}i.$$

b) L'intégrale donnée vaut

$$\int_C (x - iy)\,(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i\int_C xdy - ydx.$$

La droite qui joint 0 à $2i$ joint les points $(0,0)$ et $(0,2)$, on a donc sur cette droite $x = 0$, $dx = 0$ et la valeur de l'intégrale est

$$\int_{y=0}^{2} (0)\,(0) + ydy + i\int_{y=0}^{2} (0)\,(dy) - y\,(0) = \int_{y=0}^{2} ydy = 2.$$

Sur le segment de droite $2i$, $4 + 2i$ on a $y = 2$, $dy = 0$, d'où

$$\int_{x=0}^{4} xdx + (2)\,(0) + i\int_{x=0}^{4} (x)\,(0) - 2dx = \int_{0}^{4} xdx + i\int_{0}^{4} (-2)\,dx = 8 - 8i.$$

Et le résultat demandé est $= 2 + (8 - 8i) = 10 - 8i$.

Exercice 3.3

Évaluer les intégrales $\oint_C dz$, $\oint_C zdz$ et $\oint_C z - idz$, où C est une courbe fermée simple.

Solution.

Ce sont des conséquences du théorème de Cauchy car les fonctions 1, z et $z - i$ sont holomorphes dans C et ont des dérivées continues.

Ces résultats peuvent aussi être établis directement à partir de la définition de l'intégrale.

Exercice 3.4

Évaluer $\oint_C \frac{1}{z-a} dz$ où C désigne une courbe fermée et $z = a$ est
a) à l'extérieur de C, **b)** à l'intérieur de C.

Solution.

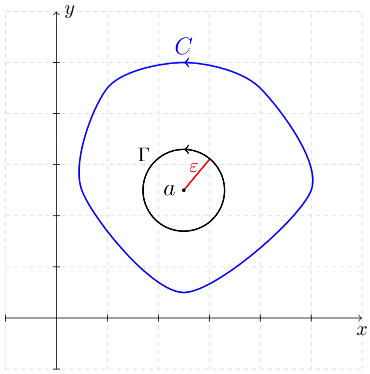
a) Si a est à l'extérieur de C, alors $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C.

Alors d'après le théorème de Cauchy $\oint\limits_C \dfrac{1}{z-a} dz = 0$.

b) Supposons a intérieur à C et soit Γ un cercle de rayon ε, centré en $z = a$, tel que Γ soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé car $z = a$ est un point intérieur].

D'après une conséquence du théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z-a}dz = \oint_\Gamma \frac{1}{z-a}dz. \tag{3.1}$$



D'autre part sur Γ, $|z-a| = \varepsilon$ ou $z - a = \varepsilon e^{i\theta}$, i.e. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. D'où tenant compte de $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$, le deuxième membre de (3.1) devient

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

qui est le résultat cherché.

Exercice 3.5

Soit C le cercle $|z| = 3$. Évaluer

a) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz$, **b)** $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$, **c)** $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{(z+1)(z-4)}dz$.

Solution.

a) De $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$, on tire

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz = \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2}dz - \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1}dz.$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $a = 1$ donne

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2}dz = 2\pi i \left\{\sin\left(\pi 2^2\right) + \cos\left(\pi 2^2\right)\right\} = 2\pi i,$$

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1}dz = 2\pi i \left\{\sin\left(\pi 1^2\right) + \cos\left(\pi 1^2\right)\right\} = -2\pi i,$$

car $z = 1$ et $z = 2$ sont à l'intérieur de C et $\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ est holomorphe dans C. L'intégrale considérée vaut donc $2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$.

b) Soit $f(z) = e^{2z}$ et $a = -1$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \tag{3.2}$$

Si $n = 3$, alors $f'''(z) = 8e^{2z}$ et $f'''(-1) = 8e^{-2}$. Dans ces conditions la formule (3.2) devient

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{2z}}{(z-a)^4} dz,$$

d'où l'on tire la valeur de l'intégrale considérée $\frac{8}{3}\pi i e^{-2}$.

c) Les singularités de $z \to \frac{e^z}{(z+1)(z-4)}$ sont $z_1 = -1$ et $z_2 = 4$. Seul $z_1 = -1$ est à l'intérieur de C. Alors la fonction $f(z) = \frac{e^z}{z-4}$ est holomorphe dans C et donc par l'application de la formule intégrale de Cauchy on aura

$$\oint_C \frac{e^z}{(z+1)(z-4)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z+1} dz = 2\pi i\, f(-1) = -\frac{2}{5}\pi i e^{-1}.$$

Exercice 3.6

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Indication : Poser $z = e^{i\theta}$, C le cercle unité $|z| = 1$, d'où $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Solution.

On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ ou $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
On a donc, si C désigne le cercle unité $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta &= \oint_C \left\{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\}^4 \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^4 i} \oint_C \frac{1}{z}\left(z^4 + 4z^3\frac{1}{z} + 6z^2\frac{1}{z^2} + 4z\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right) dz \\
&= \frac{1}{16i} \oint_C \frac{1}{z}\left(z^4 + 4z^2 + 6 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right) dz = \frac{1}{16i} \oint_C \left(z^3 + 4z + \frac{6}{z} + \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5}\right) dz \\
&= \frac{1}{16i} \oint_C \left(z^3 + 4z\right) dz + \frac{3}{8i} \oint_C \frac{1}{z} dz + \frac{1}{4i} \oint_C \frac{1}{z^3} dz + \frac{1}{16i} \oint_C \frac{1}{z^5} dz.
\end{aligned}$$

La fonction z^3+4z est holomorphe dans C, donc d'après le théorème de Cauchy $\oint\limits_C (z^3+4z)\,dz = 0$.

Pour $f(z) = 1$ et $a = 0$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit $f^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{1}{z^{n+1}}dz$.

Si $n = 0,\ 2,\ 4$, on obtient

$$\oint\limits_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i,\quad \oint\limits_C \frac{1}{z^3}dz = 0,\quad \oint\limits_C \frac{1}{z^5}dz = 0.$$

D'où $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{3}{8i}(2\pi i) = \frac{3}{4}\pi.$

Chapitre 4

Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent

Sommaire

Exercice 4.1

Déterminer le domaine de convergence des séries

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n! z^n$.

Solution.

a) Si $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, alors $u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. D'où si l'on ne tient pas compte de la valeur $z = 0$, valeur pour laquelle la série converge, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|-\frac{z^2(2n-1)!}{(2n+1)!}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^2(2n-1)!}{(2n-1)!(2n+1)(2n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^2}{(2n+1)(2n)} = 0 < 1.$$

pour tout z fini. La série converge donc quel que soit z, ce que l'on traduit en disant la série converge pour $|z| < +\infty$. De façon équivalente on peut dire que le cercle de convergence est infini ou que le rayon de convergence $R = +\infty$.

b) Si $u_n = n!z^n$, $u_{n+1} = (n+1)!z^{n+1}$. En excluant $z = 0$ valeur pour laquelle la série donnée converge, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}(n+1)\,|z| = +\infty.$$

La série converge donc seulement pour $z = 0$.

Exercice 4.2

Soit $f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z)$, où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour $z = 0$.

a) Développer $f(z)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

b) Déterminer le domaine de convergence de la série de **(a)**.

Solution.

a) On a

$$\begin{array}{llll} f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z) & f(0) = 0, & f'(z) = \dfrac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} & f'(0) = 1, \\ f''(z) = -(1+z)^{-2} & f''(0) = -1, & f'''(z) = -(-2)(1+z)^{-3} & f'''(0) = 2!, \\ \ldots & & & \end{array}$$

$$f^{(n+1)}(z) = (-1)^n\, n!\,(1+z)^{-(n+1)}, \qquad f^{(n+1)}(0) = (-1)^n\, n!.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(z) = \mathrm{Log}\,(1+z) &= f(0) + f'(0)\,z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^2 + \ldots \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \end{aligned}$$

Autre méthode. Si $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$. On obtient alors par intégration entre 0 et z

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

b) Le *n-ième* terme est $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}z^n = a_n z^n$. D'après le critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{n+1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1,$$

et la série converge pour $|z| < 1$.

On peut montrer que la série converge pour $|z| = 1$ sauf pour $z = -1$.

Ce résultat est aussi une conséquence du fait que la série converge dans un cercle qui s'étend jusqu'à la singularité la plus proche (i.e. $z = -1$) de $(f(z))$.

Exercice 4.3

Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

a) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z = 1$, **b)** $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -2$.

Solution.

a) Soit $z - 1 = u$. Alors $z = 1 + u$ et

$$\begin{aligned}\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} \cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3}\left\{1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \ldots\right\} \\ &= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2^4}{4!}e^2 u + \ldots \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2}{3}e^2(z-1) + \ldots\end{aligned}$$

Le point $z = 1$ est un pôle d'ordre trois, ou pôle triple. La série converge pour toute valeur de $z \neq 1$.

b) Soit $z + 2 = u$. D'où

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u} \cdot \frac{1}{1-u} = \frac{2-u}{u}\left(1 + u + u^2 + u^3 + \ldots\right) \\ &= \left(\frac{2}{u} + 2 + 2u + 2u^2 + \ldots\right) - \left(1 + u + u^2 + u^3 + \ldots\right) \\ &= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \ldots = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \ldots\end{aligned}$$

Le point $z = -2$ est un pôle simple. La série converge pour toute valeur de z telle que $0 < |z+2| < 1$.

Chapitre 5

Théorème des résidus

Sommaire

Exercice 5.1

Trouver les résidus de **(a)** $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)}$ et **(b)** $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

Solution.

(a) $f(z)$ possède un pôle double en $z = -1$ et des pôles simples en $z = \pm 2i$.

Le résidu en $z=-1$ est

$$\lim_{z\to-1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2\cdot\frac{z^2-2z}{(z+1)^2\,(z^2+4)}\right\}=\lim_{z\to-1}\frac{(z^2+4)\,(2z-2)-(z^2-2z)\,(2z)}{(z^2+4)^2}=-\frac{14}{25}.$$

Le résidu en $z=2i$ est

$$\lim_{z\to2i}\left\{(z-2i)\cdot\frac{z^2-2z}{(z+1)^2\,(z+2i)\,(z-2i)}\right\}=\frac{-4-4i}{(2i+1)^2\,(4i)}=\frac{7+i}{25}.$$

Le résidu en $z=-2i$ est

$$\lim_{z\to-2i}\left\{(z+2i)\cdot\frac{z^2-2z}{(z+1)^2\,(z+2i)\,(z-2i)}\right\}=\frac{-4+4i}{(-2i+1)^2\,(-4i)}=\frac{7-i}{25}.$$

(b) $f(z)=\dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ possède des pôles doubles en $z=0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ ...$ i.e. $z=m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$.

Méthode 1.

Le résidu en $z=m\pi$ est

$$\lim_{z\to m\pi}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-m\pi)^2\,\frac{e^z}{\sin^2 z}\right\}=\lim_{z\to m\pi}\frac{e^z\left[(z-m\pi)^2\sin z+2\,(z-m\pi)\sin z-2\,(z-m\pi)^2\cos z\right]}{\sin^3 z}$$

En posant $z-m\pi=u$ ou $z=u+m\pi$, cette limite peut être écrite sous la forme

$$\lim_{u\to0}\frac{e^{u+m\pi}\left[u^2\sin u+2u\sin u-2u^2\cos u\right]}{\sin^3 u}=e^{m\pi}\lim_{u\to0}\frac{u^2\sin u+2u\sin u-2u^2\cos u}{\sin^3 u}=e^{m\pi}.$$

Méthode 2. (à l'aide des séries de Laurent)

Cette méthode consiste à développer $f(z)=\dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ en série de Laurent dans le voisinage de $z=m\pi$ et à chercher le coefficient de $\dfrac{1}{z-m\pi}$ qui est le résidu demandé. On pose pour simplifier les calculs, $z=u+m\pi$. On doit alors développer la fonction en série de Laurent dans le voisinage de $u=0$; la fonction considérée prend alors la forme $\dfrac{e^{m\pi u}}{\sin^2(m\pi+u)}=e^{m\pi}\dfrac{e^u}{\sin^2 u}$.
À l'aide des développements de Maclaurin de e^u et $\sin u$ on trouve par division

$$e^{m\pi}\frac{e^u}{\sin^2 u}=e^{m\pi}\frac{1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+...}{\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-...\right)^2}=e^{m\pi}\frac{1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+...}{u^2\left(1-\frac{u^2}{3!}+\frac{u^4}{5!}-...\right)^2}$$

$$=e^{m\pi}\frac{1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+...}{u^2\left(1-\frac{u^2}{3}+\frac{2u^4}{45}-...\right)}=e^{m\pi}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{6}+\frac{u}{3}+...\right),$$

le résidu en $z=m\pi$ est donc $e^{m\pi}$.

Exercice 5.2

Calculer $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}dz$ le long du cercle C d'équation **(a)** $|z| = 3$ et **(b)** $|z| = 1$.

Solution.

(a) La fonction à intégrer $\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}$ possède un pôle double $z=0$ et deux pôles simples en $z=-1\pm i$ [racines de z^2+2z+2]. Tous ces pôles sont intérieurs à $C : |z| = 3$.

Le résidu en $z=0$ est

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{z^2\frac{e^z}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}\right\} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(z^2+2z+2\right)e^z - e^z\left(2z+2\right)}{\left(z^2+2z+2\right)^2} = 0.$$

Le résidu en $z=-1+i$ est

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -1+i}\left\{\left(z-(-1+i)\right)\frac{e^z}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}\right\} &= \lim_{z\to -1+i}\frac{e^z}{z^2}\lim_{z\to -1+i}\left\{\frac{z-(-1+i)}{\left(z^2+2z+2\right)}\right\}\\ &= \frac{e^{-1+i}}{\left(-1+i\right)^2}\cdot\frac{1}{2i} = \frac{e^{-1+i}}{4}.\end{aligned}$$

Le résidu en $z=-1-i$ est

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -1-i}\left\{\left(z-(-1-i)\right)\frac{e^z}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}\right\} &= \lim_{z\to -1-i}\frac{e^z}{z^2}\lim_{z\to -1-i}\left\{\frac{z-(-1-i)}{\left(z^2+2z+2\right)}\right\}\\ &= \frac{e^{-1-i}}{\left(-1-i\right)^2}\cdot\frac{1}{-2i} = \frac{e^{-1-i}}{4}.\end{aligned}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}dz &= \text{somme des résidus intérieur à } |z| = 3.\\ &= 0 + \frac{e^{-1+i}}{4} + \frac{e^{-1-i}}{4} = \frac{e^{-1}}{2}\cos\left(1\right).\end{aligned}$$

(b) Le seul pôle intérieur à $|z| = 1$ est $z=0$. Puisque le résidu en $z=0$ est 0, on a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^2\left(z^2+2z+2\right)}dz = 0.$$

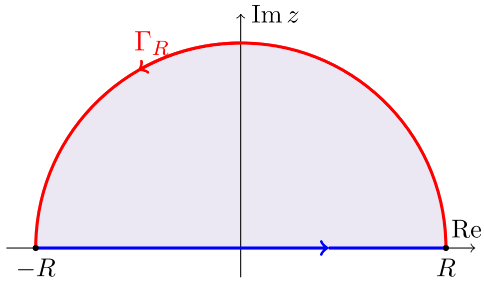
Exercice 5.3

Évaluer **(a)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$ et **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

Solution.

(a)

On considère $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^6+1}dz$, où C désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du segment $[-R,+R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.



Puisque $z^6+1=0$ pour $z=e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{7\pi i}{6}}, e^{\frac{9\pi i}{6}}, e^{\frac{11\pi i}{6}}$, ces valeurs de z sont les pôles simples de $\dfrac{1}{z^6+1}$.

Seuls les pôles $e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}$ et $e^{\frac{5\pi i}{6}}$ sont à l'intérieur de C, d'où en utilisant la règle de L'Hôpital :

$$\begin{aligned}
\text{Résidu en } e^{\frac{\pi i}{6}} &= \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{6}}} \left\{\left(z-e^{\frac{\pi i}{6}}\right)\frac{1}{z^6+1}\right\} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}},\\
\text{Résidu en } e^{\frac{3\pi i}{6}} &= \lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{6}}} \left\{\left(z-e^{\frac{3\pi i}{6}}\right)\frac{1}{z^6+1}\right\} = \lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}},\\
\text{Résidu en } e^{\frac{5\pi i}{6}} &= \lim_{z\to e^{\frac{5\pi i}{6}}} \left\{\left(z-e^{\frac{5\pi i}{6}}\right)\frac{1}{z^6+1}\right\} = \lim_{z\to e^{\frac{5\pi i}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{2}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_C \frac{1}{z^6+1}dz = 2\pi i\left\{\frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{6}}+\frac{1}{6}e^{\frac{-5\pi i}{2}}+\frac{1}{6}e^{\frac{-25\pi i}{2}}\right\} = \frac{2\pi}{3},$$

i.e.

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^6+1}dx + \int_{\Gamma_R}\frac{1}{z^6+1}dz = \frac{2\pi}{3}. \tag{5.1}$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (5.1) quand $R\to+\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{1}{z^6+1}dz = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{(R\,e^{i\theta})^6+1}R\,ie^{i\theta}d\theta = 0,$$

on obtient $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^6+1}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx = \frac{2\pi}{3}.$

Noter que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3}.$

(b) Les pôles de $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ situés à l'intérieur du contour C de la figure de **(a)** sont $z=i$ d'ordre 2 et $z=-1+i$ d'ordre 1.

Le résidu en $z=i$ est

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right\}=\frac{-12+9i}{100}.$$

Le résidu en $z=-1+i$ est

$$\lim_{z\to -1+i}\left\{(z-(-1+i))\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-(-1+i))(z-(-1-i))}\right\}=\frac{3-4i}{25}.$$

D'où

$$\oint_C\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}dz=2\pi i\left\{\frac{-12+9i}{100}+\frac{3-4i}{25}\right\}=\frac{7\pi}{50}$$

ou

$$\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx+\int_{\Gamma_R}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}dz=\frac{7\pi}{50}.$$

En prenant la limite de ces expressions quand $R\to+\infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}dz=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\left(R\,e^{i\theta}\right)^2}{\left((R\,e^{i\theta})^2+1\right)^2\left((R\,e^{i\theta})^2+2R\,e^{i\theta}+2\right)}R\,ie^{i\theta}d\theta=0,$$

nous obtenons le résultat demandé. i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx=\frac{7\pi}{50}.$$

Exercice 5.4

Évaluer **(a)** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}d\theta$ et **(b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta$.

Solution.

(a) Soit $z=e^{i\theta}$. D'où $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $dz=izd\theta$ et alors

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}d\theta=\oint_C\frac{1}{3-2\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{dz}{iz}=\oint_C\frac{2}{(1-2i)\,z^2+6iz-1-2i}dz,$$

où C est le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

Les pôles de $\dfrac{2}{(1-2i)\,z^2+6iz-1-2i}$ sont les pôles simples

$$z=\frac{-6i\pm\sqrt{(6i)^2-4\,(1-2i)\,(-1-2i)}}{2\,(1-2i)}=\frac{-6i\pm 4i}{2\,(1-2i)}=2-i \text{ ou } \frac{2-i}{5}.$$

Seul $\dfrac{2-i}{5}$ est à l'intérieur de C.

Le résidu en $\dfrac{2-i}{5}$ est

$$\lim_{z\to\frac{2-i}{5}}\left\{\left(z-\frac{2-i}{5}\right)\frac{2}{(1-2i)\,z^2+6iz-1-2i}\right\}=\lim_{z\to\frac{2-i}{5}}\frac{2}{2\,(1-2i)\,z+6i}=\frac{1}{2i}$$

d'après la règle de L'Hôpital.
D'où $\displaystyle\oint_C\frac{2}{(1-2i)\,z^2+6iz-1-2i}dz=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi$, qui est la valeur demandée.

(b) On pose $z=e^{i\theta}$. D'où $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $dz=ie^{i\theta}dz=izd\theta$ et donc

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta=\oint_C\frac{1}{2+\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{dz}{iz}=\oint_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz,$$

où C est le cercle unité centré à l'origine.
Les pôles de $\dfrac{2}{z^2+4iz-1}$ sont obtenus en résolvant $z^2+4iz-1=0$ et sont donnés par

$$z=\frac{-2i\pm\sqrt{(2i)^2-(-1)\,(1)}}{1}=-2i\pm\sqrt{-3}=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)i.$$

Seul $\left(-2+\sqrt{3}\right)i$ est à l'intérieur de C, car

$$\left|\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right|=2-\sqrt{3}<1 \text{ et } \left|\left(-2-\sqrt{3}\right)i\right|=2+\sqrt{3}>1.$$

Le résidu en $\left(-2+\sqrt{3}\right)i$ est

$$\lim_{z\to\left(-2+\sqrt{3}\right)i}\left\{\left(z-\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)\frac{2}{z^2+4iz-1}\right\}=\lim_{z\to\left(-2+\sqrt{3}\right)i}\frac{2}{2z+4i}=\frac{1}{\sqrt{3}i}$$

d'après la règle de L'Hôpital.
D'où $\displaystyle\oint_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz=2\pi i\frac{1}{\sqrt{3}i}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, qui est la valeur demandée.

Exercice 5.5

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-m},\ m>0.$

Solution.

On considère $\displaystyle\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$ où C est le contour de la figure de l'exercice 3. La fonction à intégrer possède des pôles simples $z=\pm i$, mais seul $z=i$ est intérieur à C.

Le résidu en $z=i$ est

$$\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{e^{-m}}{2i}.$$

D'où

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) = \pi e^{-m}$$

ou

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imx}}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}$$

i.e.

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin mx}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}.$$

Puisque

$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin mx}{x^2+1}dx = 0 \text{ et } \int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = 2\int_0^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx,$$

on aura

$$2\int_0^{R} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-m}.$$

Si l'on fait tendre R vers $+\infty$ et si l'on utilise le fait que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{imRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta})^2+1}d\theta = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{imR\cos\theta}e^{-mR\sin\theta}}{(Re^{i\theta})^2+1}d\theta = 0,$$

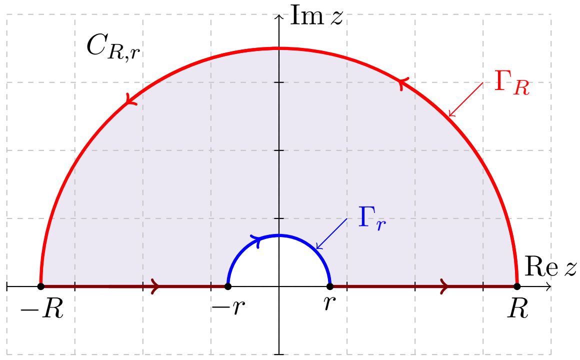
on obtient le résultat demandé. i.e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}.$

Exercice 5.6

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Solution.

La méthode de l'exercice 5.5 nous conduit à considérer l'intégrale de $\dfrac{e^{iz}}{z}$ le long du contour de la figure de l'exercice 5.3. Toutefois étant donné que $z = 0$ appartient au contour d'intégration et qu'une singularité ne peut appartenir à un tel contour, on modifie celui-ci en évitant le point $z = 0$ comme il est montré à la figure ci-contre ; on obtient ainsi le contour $C_{R,r} = [-R, -r] \cup \Gamma_r \cup [r, R] \cup \Gamma_R$ où Γ_r et Γ_R sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons r et R.



Le point $z = 0$ étant à l'extérieur de $C_{R,r}$, on a $\displaystyle\oint_{C_{R,r}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ ou

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

En changeant x en $-x$ dans la première intégrale et en combinant avec la troisième, on trouve

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ou

$$2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = -\int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \tag{5.2}$$

On fait tendre $r \to 0$ et $R \to +\infty$. La deuxième intégrale du second membre tend vers zéro car

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R\, e^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} ie^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta = 0.$$

Si l'on pose $z = re^{i\theta}$ dans la première intégrale du deuxième membre de (5.2), on voit que sa limite est

$$-\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = -\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta = -\lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} ie^{ire^{i\theta}}d\theta = \pi i$$

par passage à la limite sous le symbole d'intégration.

On a donc

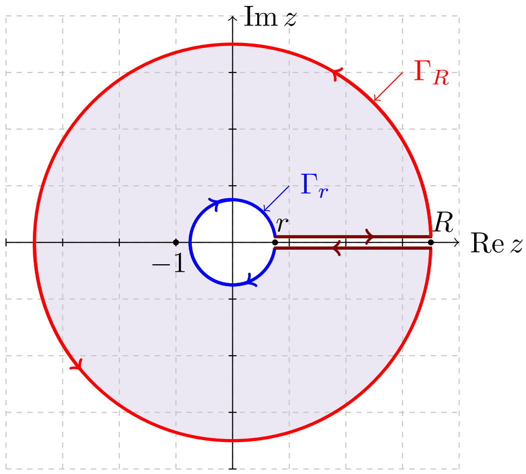
$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} 2i\int_{r}^{R}\frac{\sin x}{x}dx = \pi i \quad \text{ou} \quad \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5.7

Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.$

Solution.

Considérons $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz$. Le point $z = 0$ étant un point de branchement, on utilisera le contour $C = [r,R]\cup\Gamma_R\cup[R,r]\cup\Gamma_r$ de la figure ci-contre, Γ_r et Γ_R sont des cercles centrés à l'origine de rayons r et R, où l'axe réel positif est la coupure et où $[r,R]$ et $[R,r]$ coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension.



La fonction que l'on intègre a un pôle simple $z = -1$ intérieur à C.

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z} = (-1)^{p-1} = \left(e^{\pi i}\right)^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}.$$

On a donc $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$ ou

$$\int_{[r,R]}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_{\Gamma_R}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_{[R,r]}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_{\Gamma_r}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}.$$

On peut donc écrire

$$\int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_0^{2\pi} \frac{\left(R\,e^{i\theta}\right)^{p-1}}{1+R\,e^{i\theta}} iR\,e^{i\theta}d\theta + \int_R^r \frac{\left(xe^{2\pi i}\right)^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx + \int_{2\pi}^0 \frac{\left(re^{i\theta}\right)^{p-1}}{1+re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta = 2\pi i e^{(p-1)\pi i},$$

où l'on a posé $z = xe^{2\pi i}$ pour l'intégrale le long de $[R, r]$, l'argument de z ayant augmenté de 2π en parcourant le cercle Γ_R.

Si l'on prend la limite quand $r \to 0$ et $R \to +\infty$, remarquant que la deuxième et la quatrième intégrales tendent vers zéro, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx + \int_{+\infty}^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

ou

$$\left(1 - e^{2\pi i(p-1)}\right) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

si bien que

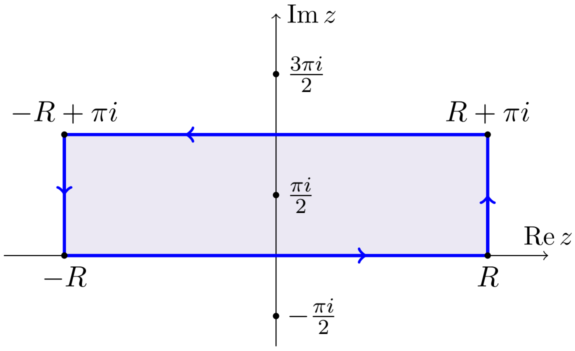
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-(p-1)\pi i} - e^{\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-p\pi i}e^{\pi i} - e^{\pi i p}e^{-\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i p} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Exercice 5.8

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Ch}(ax)}{\operatorname{Ch} x}dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$, où $|a| < 1$.

Solution.

Considérons $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{\operatorname{Ch} z}dz$ où C est un rectangle de sommets $-R$, R, $R+\pi i$, $-R+\pi i$, voir figure ci-contre. Les pôles de $\dfrac{e^{az}}{\operatorname{Ch} z}$ sont simples et sont obtenus pour $\operatorname{Ch} x = 0$, i.e. $z = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.



Le seul pôle situé à l'intérieur de C est $\frac{i\pi}{2}$.

Le résidu de $\dfrac{e^{az}}{\operatorname{Ch} z}$ en $z = \frac{i\pi}{2}$ est

$$\lim_{z\to\frac{i\pi}{2}} \left(z - \tfrac{i\pi}{2}\right)\frac{e^{az}}{\operatorname{Ch} z} = \frac{e^{a\frac{i\pi}{2}}}{\operatorname{Sh}\left(\frac{i\pi}{2}\right)} = \frac{e^{a\frac{i\pi}{2}}}{i\sin\frac{\pi}{2}} = -ie^{a\frac{i\pi}{2}}.$$

On a donc d'après le théorème des résidus,

$$\int_C \frac{e^{az}}{\mathrm{Ch}\, z} dz = 2\pi i \left(-ie^{a\frac{i\pi}{2}}\right) = 2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx + \int_{0}^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\mathrm{Ch}\,(R+iy)} idy + \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\mathrm{Ch}\,(x+\pi i)} dx + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{a(-R+iy)}}{\mathrm{Ch}\,(-R+iy)} idy = 2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}}. \tag{5.3}$$

Quand $R \to +\infty$ la deuxième et la quatrième intégrale du premier membre tendent vers zéro. Pour montrer cela considérons la deuxième intégrale ; de

$$|\mathrm{Ch}\,(R+iy)| = \left|\frac{e^{R+iy} + e^{-R-iy}}{2}\right| \geq \frac{1}{2}\left\{\left|e^{R+iy}\right| - \left|e^{-R-iy}\right|\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{R} - e^{-R}\right) \geq \frac{1}{4}e^{R},$$

on déduit

$$\left|\int_{0}^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\mathrm{Ch}\,(R+iy)} idy\right| \leq \int_{0}^{\pi} \frac{e^{aR}}{\frac{1}{4}e^{R}} dy = 4\pi e^{(a-1)R}$$

et le résultat en découle si l'on remarque que le second membre tend vers zéro quand $R \to +\infty$ car $|a| < 1$.

De la même façon on peut montrer que la quatrième intégrale du premier membre de (5.3) tend vers zéro quand $R \to +\infty$. L'égalité (5.3) devient alors

$$\lim_{R\to+\infty}\left\{\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx + e^{a\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx\right\} = 2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}}$$

ou

$$\left(1 + e^{a\pi i}\right) \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx = 2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}}$$

car $\mathrm{Ch}\,(x+\pi i) = \mathrm{Ch}\, x$. On a donc

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx = \frac{2\pi e^{a\frac{i\pi}{2}}}{1+e^{a\pi i}} = \frac{2\pi}{e^{-a\frac{i\pi}{2}} + e^{a\frac{i\pi}{2}}} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

De

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$$

on tire en changeant x en $-x$ dans la première intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Ch}\, x} dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{Ch}\,(ax)}{\mathrm{Ch}\, x} dx = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)},$$

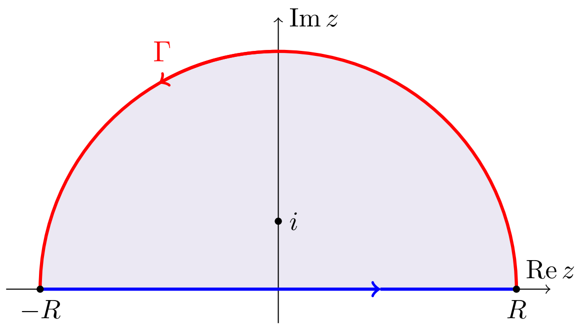
d'où l'on déduit le résultat cherché.

Exercice 5.9

Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1}dx = \pi \operatorname{Log} 2.$

Solution.

On considère $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1}dz$ le long du contour C formé d'une portion de l'axe réel de $-R$ à R et du demi-cercle Γ de rayon R, voir figure ci-contre. Le seul pôle de $\dfrac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1}$ intérieur à C est le pôle simple $z=i$, et le résidu est



$$\lim_{z\to i}(z-i)\,\frac{\operatorname{Log}(z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\operatorname{Log}(2i)}{2i}.$$

On a donc d'après le théorème des résidus

$$\oint_C \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1}dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = 2\pi i\left(\frac{\operatorname{Log}(2i)}{2i}\right) = \pi \operatorname{Log}(2i) = \pi \ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i,$$

en utilisant la détermination principale du logarithme. Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1}dz = \pi\ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

ou

$$\int_{-R}^{0} \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1}dx + \int_0^{R} \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1}dz = \pi\ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i.$$

En changeant x en $-x$ dans la première intégrale, on obtient

$$\int_0^{R} \frac{\operatorname{Log}(i-x)}{x^2+1}dx + \int_0^{R} \frac{\operatorname{Log}(i+x)}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1}dz = \pi\ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i,$$

où puisque $\operatorname{Log}(i-x) + \operatorname{Log}(i+x) = \operatorname{Log}(i^2-x^2) = \operatorname{Log}(x^2+1) + \pi i$,

$$\int_0^{R} \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1}dx + \int_0^{R} \frac{\pi i}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1}dz = \pi\ln(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i.$$

Quand $R \to +\infty$ l'intégrale le long de Γ tend vers zéro car

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{\Gamma} \frac{\mathrm{Log}\,(z+i)}{z^2+1} dz \right| = \lim_{R\to+\infty} \left| \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Log}\,(R\ e^{it}+i)}{R^2\ e^{2it}+1} Rie^{it} dt \right| \leq \lim_{R\to+\infty} \left| 4\pi \frac{\mathrm{Log}\,(R+1)+2\pi}{R^2-1} R \right| = 0.$$

On a alors en prenant les parties réelles et imaginaires

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{R} \frac{\mathrm{Log}\,(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}\,(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \ln 2.$$