

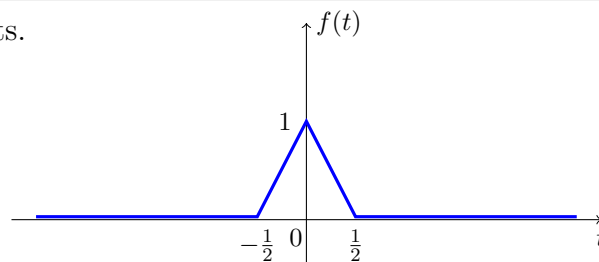
	Année universitaire : 2022-2023
	Date : 04/10/2022
Module : Analyse 5	Durée : 20 minutes

Corrigé du test 1

Exercice (5 points) : 1) 2.5 pts. 2) a) 1 pt, b) 1.5 pts.

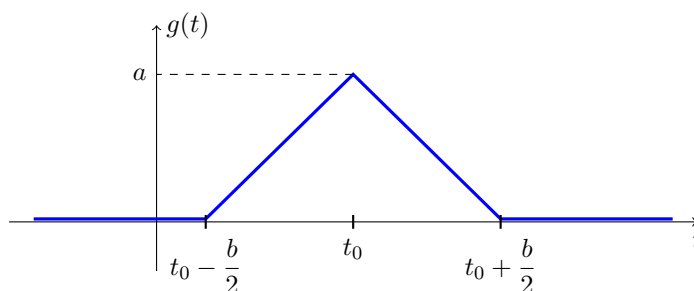
1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 - 2|t| & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$



Noter que la fonction $f(t)$ est parfois appelée fonction triangulaire unitaire, car il s'agit d'une impulsion triangulaire de hauteur 1, largeur 1 et centrée en 0.

2) Soient a, b et t_0 des nombres réels tels que $a, b > 0$, et supposons que $g(t)$ est donnée par



a) Vérifier que $g(t) = af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et le résultat de la question 1, calculer la transformée de Fourier de $g(t)$.

Corrigé.

1) Par définition on a

$$\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Comme

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\\ 1 + 2t & \text{si } t \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 1 - 2t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases},$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 + 2t) e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} dt + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^0 t e^{-i\omega t} dt - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} t e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Par intégration par parties on a

$$\begin{aligned}\int t e^{-i\omega t} dt &= \int t \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{i\omega} e^{-i\omega t} \right) = -\frac{t}{i\omega} e^{-i\omega t} + \int \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{t}{i\omega} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t))(\omega) &= \left[\frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{t}{i\omega} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega t} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{t}{i\omega} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega t} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}} - e^{i\frac{\omega}{2}}}{-i\omega\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{\sqrt{2\pi}i\omega} + \frac{2 - 2e^{i\frac{\omega}{2}}}{\sqrt{2\pi}\omega^2} + \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}}}{\sqrt{2\pi}i\omega} - \frac{2e^{-i\frac{\omega}{2}} - 2}{\sqrt{2\pi}\omega^2} \\ &= \frac{4 - 2e^{i\frac{\omega}{2}} - 2e^{-i\frac{\omega}{2}}}{\sqrt{2\pi}\omega^2} = \frac{4 - 4\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\omega^2}\end{aligned}$$

En utilisant l'identité $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$, on obtient

$$\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \frac{8 \sin^2 \left(\frac{\omega}{4} \right)}{\sqrt{2\pi}\omega^2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}} \right)^2.$$

Autre méthode : En remarquant que la fonction $f(t)$ est paire, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t))(\omega) &= \mathcal{F}_c(f(t))(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2t) \cos(\omega t) dt.\end{aligned}$$

Par intégration par partie on trouve

$$\int (1 - 2t) \cos(\omega t) dt = \frac{-2 \cos(\omega t) + (1 - 2t) \omega \sin(\omega t)}{\omega^2}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t))(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{-2 \cos(\omega t) + (1 - 2t) \omega \sin(\omega t)}{\omega^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-2 \cos(\frac{\omega}{2}) + 2)}{\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{\omega}{4} \right)}{\omega^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}} \right)^2.\end{aligned}$$

2)

a) Les fonctions $g(t)$ et $af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)$ sont définies en joignant les segments de droites. Pour montrer que $g(t)$ est identique à $af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)$, il suffit de vérifier qu'elles sont coïncident en $t_0 - \frac{b}{2}$, t_0 et $t_0 + \frac{b}{2}$. D'après le graphe de la fonction $g(t)$ on a $g\left(t_0 - \frac{b}{2}\right) = g\left(t_0 + \frac{b}{2}\right) = 0$ et $g(t_0) = a$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)\Big|_{t=t_0-\frac{b}{2}} &= af\left(\frac{t_0-\frac{b}{2}-t_0}{b}\right) = af\left(\frac{-1}{2}\right) = 0, \\ af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)\Big|_{t=t_0+\frac{b}{2}} &= af\left(\frac{t_0+\frac{b}{2}-t_0}{b}\right) = af\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \\ af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)\Big|_{t=t_0} &= af(0) = a. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g(t)|_{t=t_0-\frac{b}{2}} &= af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)\Big|_{t=t_0-\frac{b}{2}} = 0, \\ g(t)|_{t=t_0+\frac{b}{2}} &= af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)\Big|_{t=t_0+\frac{b}{2}} = 0, \\ g(t)|_{t=t_0} &= af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)\Big|_{t=t_0} = a. \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$g(t) = af\left(\frac{t-t_0}{b}\right) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

b)

En appliquant les propriétés de linéarité

$$\mathcal{F}(af(t))(\omega) = a\mathcal{F}(f(t))(\omega),$$

de translation

$$\mathcal{F}(f(t-\alpha))(\omega) = e^{-i\omega\alpha}\mathcal{F}(f(t))(\omega)$$

et de changement d'échelle

$$\mathcal{F}(f(\beta t))(\omega) = \frac{1}{|\beta|}\mathcal{F}(f(t))\left(\frac{\omega}{\beta}\right),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g(t))(\omega) &= \mathcal{F}\left(af\left(\frac{t-t_0}{b}\right)\right)(\omega) \\ &= ae^{-i\omega t_0}\frac{1}{|b|}\mathcal{F}(f(t))\left(\frac{\omega}{b}\right) = ae^{-i\omega t_0}b\mathcal{F}(f(t))(b\omega) \\ &= \frac{ab}{2\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega t_0}\left(\frac{\sin\frac{b\omega}{4}}{\frac{b\omega}{4}}\right)^2. \end{aligned}$$