Classe : $3^{ième}$ Année Prépa, ST et MI	**Année universitaire** : 2022-2023
Domaine : Mathématique et informatique	**Date** : 14/02/2023
Module : Analyse 6	**Durée** : 25 minutes

Test 1

Exercice (5 points) : 1) 2 pts. **2)** 1.5 pts. **3)** 1.5 pts.

1) Soit $z \in \mathbb{C}/\{1\}$ et soit $w = i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$. Montrer que $|z|^2 = 1 \Rightarrow \overline{w} = w$.

2) Déterminer la partie réelle et imaginaire des fonctions : **a)** $f(z) = e^{-z}$, **b)** $g(z) = \cos z$.

3) En utilisant **2)** résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : **a)** $e^{-z} = -1$, **b)** $\cos z = 3$.

Corrigé.

1) Supposons que $|z|^2 = 1$. On a

$$\overline{w} = \overline{i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -i\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right).$$

En utilisant le fait que $|z|^2 = z\overline{z}$ et comme $|z|^2 = 1$ on obtient $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. Alors

$$\overline{w} = -i\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right) = -i\left(\frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right) = -i\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = w.$$

2) Si $z = x + iy$ alors

a) $$\begin{aligned} f(z) &= e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}(\cos y - i\sin y) \\ &= e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(z) = \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix}+e^{y-ix}}{2} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2} = \frac{(e^{-y}+e^{y})\cos x}{2} + i\frac{(e^{-y}-e^{y})\sin x}{2} \\ &= \operatorname{Ch} y\cos x - i\operatorname{Sh} y\sin x. \end{aligned}$$

3)

a) Si $e^{-z} = -1$, alors on a les deux équations $e^{-x}\cos y = -1$ et $-e^{-x}\sin y = 0$.

Puisque $e^{-x} > 0$, on aura $\sin y = 0$ ce qui implique que $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donc la première équation devient

$$e^{-x}\cos(k\pi) = -1 \text{ ou bien } e^{x} = -\cos(k\pi) = -(-1)^k.$$

Ceci est possible seulement si k est un nombre impair. Dans ce cas $x = 0$. Alors les racines de l'équation $e^{-z} = -1$ sont $z_k = i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Si $\cos z = 3$ alors on a les deux équations $\mathrm{Ch}\, y \cos x = 3$ et $\mathrm{Sh}\, y \sin x = 0$. Donc d'après la deuxième équation soit $y = 0$ ou $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans la première équation on obtient

$$y = 0 \text{ et } \cos x = 3$$

ou

$$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{Ch}\, y = \frac{3}{\cos(k\pi)} = \frac{3}{(-1)^k}.$$

Le premier cas n'est pas possible car $|\cos x| \leq 1$. Dans le deuxième cas k soit pair car $\mathrm{Ch}\, y \geq 1$. D'où les racines cherchées sont

$$z_k = 2k\pi \pm i \,\mathrm{Argch}\,(3)\,,\ k \in \mathbb{Z}.$$