Transformée de Fourier

Rappel de cours avec exercices

1 Définition de la transformée de Fourier

Définition 1 *Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est dite :*

1. *absolument intégrable si $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|\,ds$ converge*
2. *a carré intégrable si $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|^2\,ds$ converge.*

Dans tout ce cours on désignera par $L^1(\mathbb{R})$ et par $L^2(\mathbb{R})$ les ensembles définis par

$$\begin{array}{r}L^1(\mathbb{R})=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\text{ telle que }\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|\,ds\text{ converge}\right\},\\ L^2(\mathbb{R})=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\text{ telle que }\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|^2\,ds\text{ converge}\right\}.\end{array}$$

Exemples 1

1. *Toutes les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par*

$$f_1(x)=\frac{1}{x^2+1},\ f_2(x)=\left\{\begin{array}{l}1-|x|\ \ si\ \ |x|\leq 1\\ 0\ \ si\ \ |x|\geq 1\end{array}\right.\quad et\ f_3(x)=\left\{\begin{array}{l}1\ \ si\ \ |x|<1\\ 0\ \ si\ \ |x|>1\end{array}\right.$$

appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ et à $L^2(\mathbb{R})$; en effet on a

$$\begin{array}{l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(s)|\,ds=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s^2+1}ds=\lim_{a\to+\infty}\left(arctg(a)-arctg(-a)\right)=\pi,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}|f_2(s)|\,ds=\int_{-1}^{1}(1-|s|)\,ds=2\int_0^1(1-s)\,ds=1,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(s)|\,ds=\int_{-1}^{1}1ds=2,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(f_1(s))^2\,ds=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1}{(s^2+1)^2}ds=\frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{s}{(s^2+1)}+arctg(s)\right]_{-a}^{a}=\dfrac{\pi}{2},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(f_2(s))^2\,ds=2\int_0^1(1-s)^2\,ds=2\left[\frac{-(1-s)^3}{3}\right]_0^1ds=\dfrac{2}{3},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(f_3(s))^2\,ds=\int_{-1}^{1}1ds=2.\end{array}$$

2. *La fonction $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_4(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, n'est pas absolument intégrable mais $f_4\in L^2(\mathbb{R})$. En effet, $\int_{-\infty}^{+\infty}(f_4(s))^2\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)ds=\pi$.*
3. *La fonction $f_5:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_5(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{|1-x|}}$, est absolument intégrable mais elle n'est pas a carré intégrable.*

Définition 2 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$.*

1. *La transformée de Fourier de f est la fonction $\mathcal{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

2. La transformée de Fourier inverse de f est la fonction $\mathcal{F}^{-1}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Exemples 2

1. Calculons la transforméé de Fourier de la fonction f_3.

$$\mathcal{F}(f_3)(\lambda) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\lambda t} dt = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \int_{-1}^{1} 1dt \text{ si } \lambda = 0, \\ \left[\frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}\right]_{-1}^{1} \text{ si } \lambda \neq 0, \end{cases}$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 2 \\ 2\frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i\lambda} \end{cases} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

2. Calculons la transforméé de Fourier de la fonction f_1.

$$\mathcal{F}(f_1)(\lambda) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{e^{-i\lambda t}}{1+t^2} dt = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \begin{cases} Res\,(F_1, i) \text{ si } \lambda < 0 \\ Res\left(\widetilde{F}_1, i\right) \text{ si } \lambda > 0 \\ \pi \text{ si } \lambda = 0 \end{cases}$$

où $\begin{cases} F_1(z) = \frac{e^{-i\lambda t}}{1+z^2} \\ \widetilde{F}_1(z) = \frac{e^{i\lambda t}}{1+z^2} \end{cases}$. D'où $\mathcal{F}(f_1)(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-|\lambda|}$.

Remarque 1 *Il existe des fonctions qui ne sont pas dans $L^1(\mathbb{R})$ et qui admettent une transformée de Fourier. A titre d'exemple la fonction $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_6(t) = \frac{t}{1+t^2}$, n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$ mais*

$$\mathcal{F}(f_6)(\lambda) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{te^{-i\lambda t}}{1+t^2} dt = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i \begin{cases} Res\,(G_1, i) \; si \; \lambda < 0 \\ Res\left(\widetilde{G}_1, i\right) \; si \; \lambda > 0 \\ +\infty \; si \; \lambda = 0 \end{cases}$$

où $\begin{cases} G_1(z) = \frac{ze^{-i\lambda t}}{1+z^2} \\ \widetilde{G}_1(z) = \frac{-ze^{i\lambda t}}{1+z^2} \end{cases}$. *D'où* $\mathcal{F}(f_6)(\lambda) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{cases} -e^{-\lambda} \; si \; \lambda > 0 \\ e^{-\lambda} \; si \; \lambda > 0. \end{cases}$.

Par le thorème de Fubbini on démontre la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors La transformeée de Fourier de f, $\mathcal{F}(f)$ appartient aussi a $L^1(\mathbb{R})$.*

Le cas où une fonction est paire ou impaire est considéré par la propostion suivante :

Proposition 2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$.*

1. Si f est paire alors $\mathcal{F}(f)$ est une fonction paire et on a

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t) dt.$$

2. Si f est impaire alors $\mathcal{F}(f)$ est une fonction impaire et on a

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t) dt.$$

En effet ; On a que

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt.$$

Ainsi si f est paire alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt.$$

Ce qui donne

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt$$

et dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(-\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(-\lambda t)dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt = \mathcal{F}(f)(\lambda). \end{aligned}$$

Le cas f impaire s'obtient de la même manière.

La proposition ci dessus est valable aussi pour la transformée de Fourier inverse.

Définition 3 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^+)$, c'est à dire $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge. On définit alors la transformée de Fourier en cosinus $\mathcal{F}_{\cos}(f)$ et la transformée de Fourier en sinus $\mathcal{F}_{\sin}(f)$ par*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\cos}(f)(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt \\ \mathcal{F}_{\sin}(f)(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt. \end{aligned}$$

Ainsi définies, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$ on a alors

$$\begin{cases} \mathcal{F}(f)(\lambda) = \mathcal{F}_{\cos}(f)(\lambda) & \mathcal{F}^{-1}(f)(\lambda) = \mathcal{F}_{\cos}(f)(\lambda) \quad \text{si } f \text{ est paire, et} \\ \mathcal{F}(f)(\lambda) = -i\mathcal{F}_{\sin}(f)(\lambda) & \mathcal{F}^{-1}(f)(\lambda) = i\mathcal{F}_{\sin}(f)(\lambda) \quad \text{si } f \text{ est impaire.} \end{cases}$$

2 Propriétés de la transformée de Fourier et son inverse :

2.1 La $\mathbb{C}$-linéarité :

Pour toutes fonctions f, g dans $L^1(\mathbb{R})$ et pour toute constante $\alpha \in \mathbb{C}$, les transformées de Fourier et leurs inverses des fonctions $f + g$ et αf existent et on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(f+g)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda) + \mathcal{F}(g)(\lambda) \\ \mathcal{F}^{-1}(f+g)(\lambda) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\lambda) + \mathcal{F}^{-1}(g)(\lambda) \\ \mathcal{F}(\alpha f)(\lambda) = \alpha\mathcal{F}(f)(\lambda) \\ \mathcal{F}^{-1}(\alpha f)(\lambda) = \alpha\mathcal{F}^{-1}(f)(\lambda). \end{gathered}$$

2.2 Comportement avec L'homothetie

Pour toute fonctions f dans $L^1(\mathbb{R})$ et pour toute constante $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$. On dfinit la fonction f_α par $f_\alpha(t) = f(\alpha t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Alors la transformée de Fourier et son inverse de la fonction f_α existent et on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(f_\alpha)(\lambda) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \text{ et}$$
$$\mathcal{F}^{-1}(f_\alpha)(\lambda) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}^{-1}(f)\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

Si de plus $\lambda > 0$ alors

$$\mathcal{F}_{\cos}(f_\alpha)(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{F}_{\cos}(f)\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \text{ et}$$
$$\mathcal{F}_{\sin}(f_\alpha)(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{F}_{\sin}(f)\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right).$$

2.3 Transformée de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f et f' appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\mathcal{F}(f')(\lambda) = (i\lambda)\,\mathcal{F}(f)(\lambda) \text{ et}$$
$$\mathcal{F}^{-1}(f_\alpha)(\lambda) = (-i\lambda)\,\mathcal{F}^{-1}(f)(\lambda).$$

Ces deux formules s'obtiennent par intégration par parties.

Par recurrence on obtient que si f est n fois dérivable telle que $f, f', f'', ..., f^{(n)}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\lambda) = (i\lambda)^n\,\mathcal{F}(f)(\lambda) \text{ et}$$
$$\mathcal{F}^{-1}(f^{(n)})(\lambda) = (-i\lambda)^n\,\mathcal{F}^{-1}(f)(\lambda).$$

2.4 Transformée de Fourier du produit de convolution

Définition 4 *Soient f et g deux fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R})$. Le produit de convolution des fonctions f et g est la fonction $f \star g$ définie par*

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds.$$

Par le théorème de Fubbini on démontre la proposition suivante :

Proposition 3 *Soient f et g deux fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R})$, alors*

1. *$f \star g$ est une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$,*
2. *$f \star g = g \star f$.*
3. $$\mathcal{F}(f \star g)(\lambda) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\lambda)\,\mathcal{F}(g)(\lambda)$$
$$\mathcal{F}^{-1}(f \star g)(\lambda) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(f)(\lambda)\,\mathcal{F}^{-1}(g)(\lambda).$$

2.5 Formules de Plancherel et Parseval

Soient f et g deux fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\lambda)\,\overline{\mathcal{F}(g)}(\lambda)\,d\lambda.$$

Cette formule est appellée formule de Plancherel et dans le cas où $g = f$ on a la formule dite de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(\lambda)|^2\,d\lambda.$$

2.6 Formule de réciprocité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$. Si au point $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} f(a^+) = \lim_{t\to a^+} f(t), & f(a^-) = \lim_{t\to a^-} f(t), \\ f'(a^+) = \lim_{t\to a^+} \dfrac{f(t)-f(a^+)}{t-a}, & f'(a^-) = \lim_{t\to a^-} \dfrac{f(t)-f(a^-)}{t-a}, \end{array}$$

existent et sont finies alors

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f)\right)(a) = \frac{f(a^+)+f(a^-)}{2}.$$

Ainsi, si f est continue et admet des dérivées à gauche et à droite de chaque point alors $\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f)\right)(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Noter aussi que si de plus f est paire alors

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f)\right)(x) = \mathcal{F}_{\cos}\left(\mathcal{F}_{\cos}(f)\right)(x) = f(x),$$

ou impaire

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f)\right)(x) = \mathcal{F}_{\sin}\left(\mathcal{F}_{\sin}(f)\right)(x) = f(x).$$

Ceci montre que

$$\mathcal{F}_{\cos}^{-1} = \mathcal{F}_{\cos} \text{ et } \mathcal{F}_{\sin}^{-1} = \mathcal{F}_{\sin}.$$

Exemples 3 *La fonction f_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est paire, ona alors*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f_1)\right)(x) = f_1(x),$$

autrement,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f_1)(\lambda)\, e^{ix\lambda}d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda|}e^{ix\lambda}d\lambda = \frac{1}{1+x^2}. \tag{1}$$

En tennant compte de la parité de f on obtient

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_{\cos}(f_1)(\lambda)\cos(x\lambda)d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda}\cos(x\lambda)d\lambda = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) sont appellées représentations intégrales de Fourier de la fonction f_1.

3 Solutions des exercices 1 et 2 de la série n 7

Exercice 1

1. $f(t) = e^{-a|t|}$ *avec* $a > 0$. *Puisque f est paire, on a*

$$\begin{array}{l} \mathcal{F}(f)(\lambda) = \mathcal{F}_{\cos}(f)(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(\lambda t)dt \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(e^{(-a+i\lambda)t}+e^{(-a-i\lambda)t}\right)dt = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(-a+i\lambda)}+\frac{1}{(-a-i\lambda)}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\lambda^2}. \end{array}$$

2. $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ *avec* $a > 0$. *Noter que f est paire et donc $\mathcal{F}(f)$ est paire. On a*

$$\begin{array}{l} \mathcal{F}(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix\lambda}}{a^2+t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\pi i Res\left(\frac{e^{-i\lambda z}}{a^2+z^2}, ia\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{a\lambda}}{a} \;\; si\ \lambda < 0 \\ \mathcal{F}(f)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(-\lambda)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-a\lambda}}{a} \;\; si\ \lambda > 0 \\ \mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+t^2}dt = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\left[arctg(\frac{t}{a})\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{array}$$

En conclusion on a $\mathcal{F}(f)(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-a|\lambda|}}{a}$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $f(t) = \begin{cases} \sin t \ \ si \ \ |t| \leq \pi \\ 0 \qquad si \ \ |t| > \pi \end{cases}$. *Sachant que f est impaire on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\lambda) &= -i\mathcal{F}_{\sin}(f)(\lambda) = -i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin(t)\sin(\lambda t)dt \\ &= -i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\pi (\cos((1-\lambda)t) - \cos((1+\lambda)t))\, dt \\ &= -i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \begin{cases} \pi \ \ si \ \lambda = 1, \\ -\pi \ \ si \ \lambda = -1, \\ \frac{\sin((1-\lambda)\pi)}{1-\lambda} - \frac{\sin((1+\lambda)\pi)}{1+\lambda} \ \ si \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. $f(t) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ |t| < a \\ 0 \ \ si \ \ |t| > a \end{cases}$ *avec $a > 0$. Puisque f est paire on a*

$$\mathcal{F}(f)(\lambda) = \mathcal{F}_{\cos}(f)(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos(\lambda t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{cases} a \ \ si \ \lambda = 0, \\ \frac{\sin(\lambda a)}{a} \ \ si \ \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Puis par la formule de rciprocité, on a pour $x \notin \{a, -a\}$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \mathcal{F}_{\cos}(\mathcal{F}_{\cos}(f))(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{a} \cos(\lambda x)d\lambda = f(x).$$

2. $f(t) = \begin{cases} t \ \ si \ \ |t| < a \\ 0 \ \ si \ \ |t| > a \end{cases}$ *avec $a > 0$. Puisque f est impaire on a*

$$\mathcal{F}_{\sin}(f)(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a t\sin(\lambda t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda a \cos(\lambda a) - \sin(\lambda a)}{\lambda^2}.$$

Puis par la formule de réciprocité, on a pour $x \notin \{a, -a\}$

$$\mathcal{F}_{\sin}(\mathcal{F}_{\sin}(f))(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda a \cos(\lambda a) - \sin(\lambda a)}{\lambda^2} \sin(\lambda x)d\lambda = f(x).$$