Transformée de Laplace

Par l'equipe d'analyse III

1 Introduction

La théorie des transformées de Laplace (ou Transformation de Laplace) que l'on désigne aussi sous le nom de calcul opérationnel est devenue une partie importante dans la formation d'ingénieurs, de physiciens, de mathématiciens et bien d'autres scientifiques. Ceci est due au fait que les transformées de Laplace, en plus de leurs grand intérêt théorique, représente un moyen efficace et commode pour la résolution d'un grand nombre de problème qui se posent dans différents domaines de la science et de la technologie. On cite comme exemple les équations différentielles ordinaires et partielles décrivent la façon dont certaines quantités varient avec le temps, comme le courant dans un circuit électrique, les oscillations d'une membrane vibrante, ou le flux de chaleur à travers un conducteur isolé. Ces équations sont généralement couplées à la valeur initiale $t = 0$.

2 Préliminaires

La plupart des second membres des équations différentielles qui interviennent dans les phénomènes physiques sont des fonctions dites "exponentielle-polynômes" c'est à dire quelles sont de la forme $t \mapsto f(t) = e^{rt} \cdot P(t)$, avec r appartient à $\mathbb{C}$ et P une fonction polynôme. On obtient ainsi la plupart des fonctions usuelles : Les fonctions polynômes, exponentielles, sinusoïdales, ou produits de telles fonctions. Pratiquement, l'ingénieur et le physicien s'interesse à des phénomènes qu'à partir d'un instant $t = \alpha$ (avec $\alpha \geq 0$). Ils sont donc amené à considérer des fonctions dites fonctions causales nulles pour $t < 0$.

2.1 Fonctions Causales

Définition 2.1 : *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si $f(t) = 0$ pour tout t strictement négatif.*

Des éxemples fondamentaux sont constitués grâce à la fonction de Heaviside dite échellon unité notée par $\mathcal{U}$ et définie par

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

ainsi que ses translatées définies par

$$t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha) = \begin{cases} 1, & t \geq \alpha, \\ 0, & t < \alpha, \end{cases}$$

où α est un réel positif

Remarque 2.1 *: Par abus d'écriture, on a tendance à ne pas faire apparaître le terme $\mathcal{U}(t)$ dans l'expression des fonctions causales, par exemple si f est une fonction à valeurs réels définie par $f(t) = 3e^{-3t}$.On choisi d'exprimer la fonction causale définie à partir de f par $f(t) = 3e^{-3t}$ au lieu de $f(t) = 3\mathcal{U}(t)e^{-3t}$.*
Cependant pour exprimer la translatée d'une fonction causale, il est important de faire apparaître le terme $\mathcal{U}$ dans l'expression de la fonction causale comme le montre l'exemple suivant

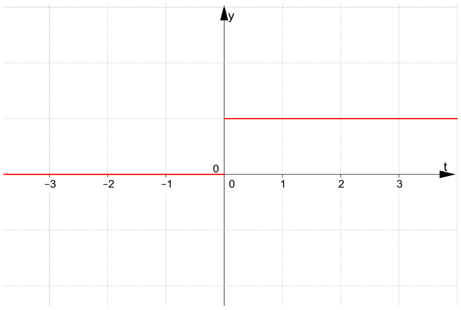

FIGURE 1: Echellon unité

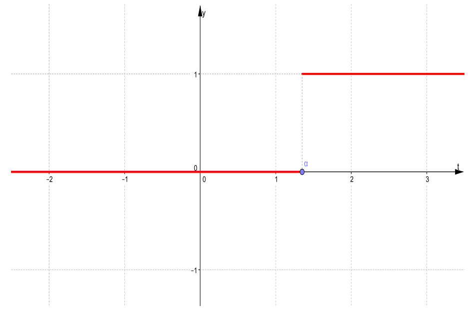

FIGURE 2: translatéé de l'echellon unité

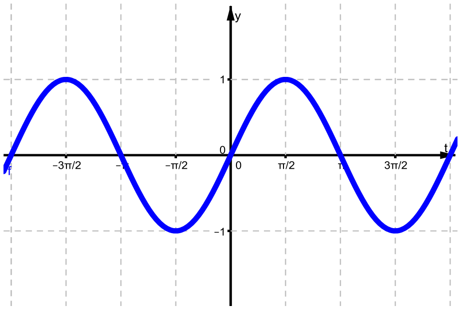

FIGURE 3: $f_1(t) = \sin(t)$, fonction non causale

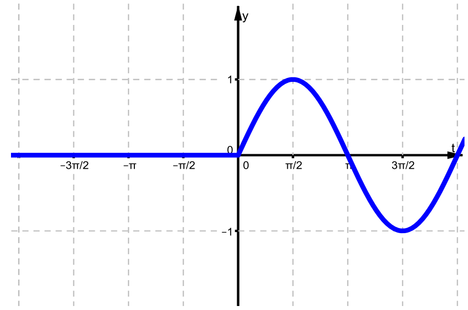

FIGURE 4: $f_2(t) = \mathcal{U}(t)\sin(t)$, fonction causale

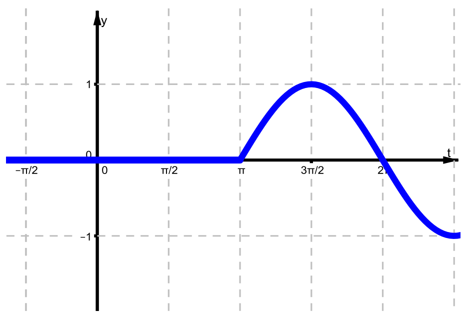

FIGURE 5: $f_3(t) = \mathcal{U}(t-\pi)\sin(t-\pi)$, fonction causale et translatée de f_2 de la quantité π

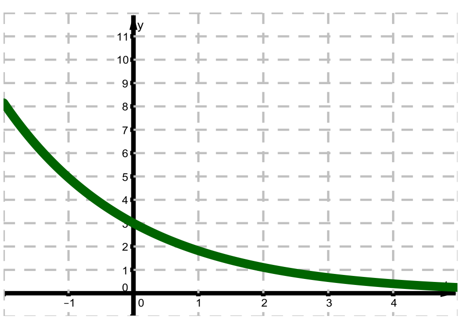

FIGURE 6: $f_4(t) = 3e^{-\frac{t}{2}}$, fonction non causale

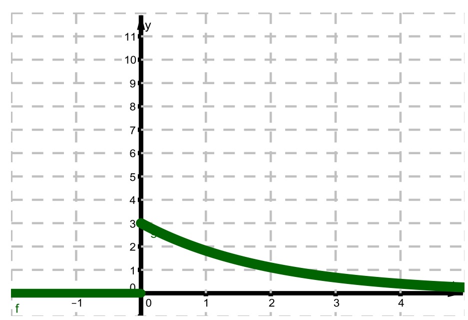

FIGURE 7: $f_5(t) = 3\mathcal{U}(t)e^{-\frac{t}{2}}$, fonction causale

Exemple 2.1 *Représenter les fonctions suivantes sur tout* $\mathbb{R}$

$$f(t) = \mathcal{U}(t)\sin t; \qquad f_1(t) = \mathcal{U}(t)\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right);$$
$$f_2(t) = \mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin t; \quad f_3(t) = \mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

Laquelles de f_1, f_2, f_3 *représente une translatée de* f.

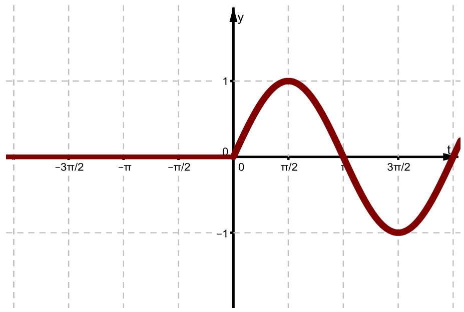

FIGURE 8: $f(t) = \mathcal{U}(t) \sin t$

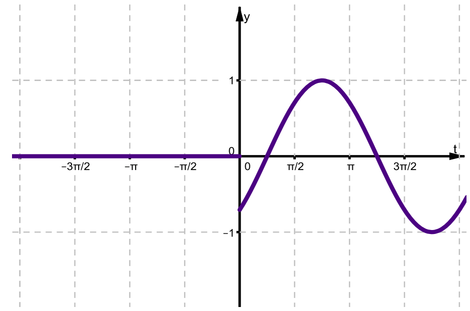

FIGURE 9: $f_1(t) = \mathcal{U}(t) \sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

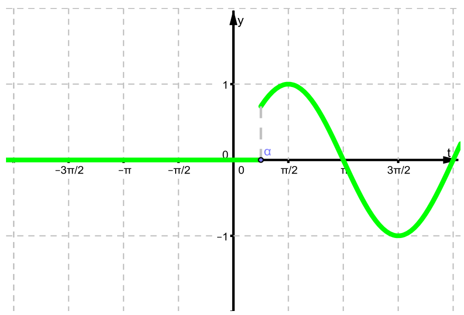

FIGURE 10: $f_2(t) = \mathcal{U}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) \sin t$

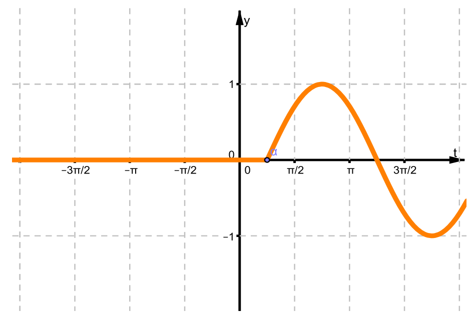

FIGURE 11: $f_3(t) = \mathcal{U}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) \sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

On remarque bien à partir des représentations graphiques des fonctions f, f_1, f_2, f_3 que seul la fonctions f_3 représente la translatée de la fonction f avec la quantité $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Tandis que pour les autres fonctions on remarque qu'il y'a surplus d'information avec la fonction f_1 et une perte d'information avec la fonction f_2.

2.2 Continuité par morçeaux

Définition 2.2 *: Une fonction causale est dite, continue par morceaux, sur un intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$ inclue dans $\mathbb{R}_+$, si et seulement si elle est continue en tout point de $[\alpha, \beta]$ sauf en un nombre fini de points.*

En d'autres termes, si cet intevalle peut être divisé en un nombre fini d'intervalles, dans chacun des quels la fonction est continue et possède des limites à droites et à gauches finies.
La figure 12 représente un exemple de graphe d'une telle fonction. Cette fonction présente des discontinuitées en t_1, t_2, et t_3. Remarquons que les limites à droites et à guache, par exemple, sont $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} f(t_2+\varepsilon) = f(t_2+0) = f(t_{2+})$ et $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} f(t_2 - \varepsilon) = f(t_2 - 0) = f(t_{2-})$ respectivement, où ε est positif.

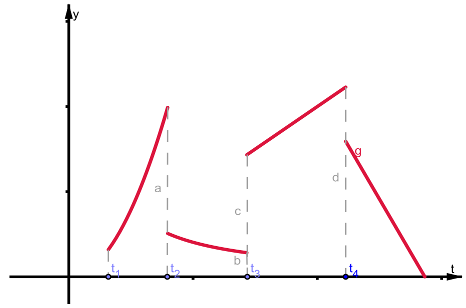

FIGURE 12: Fonction continue par morçeaux

2.3 Fonctions d'ordre exponentiel (Fonction de l'ingénieur)

Définition 2.3 *: S'il existe des constantes réelles $M > 0$ et γ, tels que pour tout $t > N$ (ou pour t assez grand) on a*

$$\left|e^{-\gamma t} f(t)\right| < M \qquad ou \qquad |f(t)| < Me^{\gamma t}$$

nous dirons que la fonction f est une fonction d'ordre exponentiel γ quand $t \longrightarrow +\infty$, ou plus brièvement d'ordre exponentiel.

Exemple 2.2 *:*

1. *$f(t) = t^2$ est d'ordre exponentiel 3 (par exemple), puisque $\left|t^2\right| = t^2 < e^{3t}$ pour $t > 0$.*
2. *$f(t) = e^{t^3}$ n'est pas d'ordre exponentiel puisque $\left|e^{-\gamma t} e^{t^3}\right| = e^{t^3 - \gamma t}$ peut être rendu plus grand que n'importe quelle constante en augmentant t.*
3. *Les fonctions bornées, telles que $\sin at$ ou $\cos at$, sont d'ordre exponentiel.*

Intuitivement, on sent bien que les fonctions d'ordre exponentiel ne peuvent pas "croître" en valeur absolue plus vite que $Me^{\gamma t}$ quand t augmente (au voisinage de $+\infty$ elles sont toujours dominées par une forme exponentielle). En pratique, il n'y a aucune restriction puisque M et γ ne sont pas uniques et peuvent être aussi grands que l'on désire.

---

3 Définition et conditions d'existence de la transformée de Laplace et de son inverse

3.1 Définitions et transformées de certaines fonctions élémentaires

Définition 3.1 *: Soit $t \longmapsto f(t)$ une fonction causale, continue par morçeaux sur $\mathbb{R}_+$.*
On appelle transformée de Laplace de f la fonction de la variable réelle ou complexe notée par $\mathcal{L}[f]$, ou simplement par F, définie par

$$p \longmapsto F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt}\, dt \tag{1}$$

L'application qui associe à f sa transformée $\mathcal{L}[f]$ est dite "transformation de Laplace".

Remarque 3.1 *:*

— *Dans toute la suite de ce cours, on supposera que la variable p de la transformée de Laplace de f est réelle.*

- *Il apparaît de la formule (1) que la transformée de Laplace d'une fonction f est définie à l'aide d'une intégrale généralisée dépendante du paramètre p. Ainsi elle existe pour une valeur p_0 de p, si cette intégrale converge pour la valeur p_0, autrememnt elle n'existe pas. On précisera les conditions d'existence des transformées de Laplace par la suite.*
- *En générale, nous notons une fonction de la variable t par une lettre miniscule, $f(t), g(t), h(t)$ par exemple, la transformée de Laplace de cette fonction est alors notée par la majuscule correspondante, c.à.d $F(p), G(p), H(p)$. Dans d'autre cas, un tilde $(\tilde{\ })$ est parfois utilisé. Ainsi par exemple, la transformée de Laplace de $u(t)$ est $\widetilde{u}(p)$.*

3.1.1 Transformées de la fonction de Heaviside

Soit la fonction échellon unité notée par $\mathcal{U}(t) = 1$ pour $t \geq 0$ ou tout simplement 1

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[1\right](p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\ &= -\frac{1}{p}\left|e^{-pt}\right]_0^{+\infty} \quad \text{pour} \quad p \neq 0 \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-pt} \end{aligned}$$

une condition nécessaire et suffisante pour que la limite $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} e^{-pt}$ puisse exister est que p soit positif ou nul, il vient que

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[1\right](p) = \frac{1}{p} \quad \text{avec} \quad p > 0$$

3.1.2 Transformées de la fonction $t \mapsto t$ avec $t > 0$

$$\mathcal{L}\left[t\right](p) = \int_0^{+\infty} te^{-pt}dt.$$

Une intégration par partie donne pour $p \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t\right](p) &= -\frac{1}{p}\left|t\ e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\ &= -\frac{1}{p}\left|t\ e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{p^2}\left|e^{-pt}\right]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{p}\lim_{t \longrightarrow +\infty} t\ e^{-pt} - \frac{1}{p^2}\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-pt} + \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

une condition nécessaire et suffisante pour que les limites $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} t\ e^{-pt}$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} e^{-pt}$ est que $p > 0$.

Il vient donc

$$\mathcal{L}\left[t\right](p) = \frac{1}{p^2} \quad \text{avec} \quad p > 0$$

3.1.3 Transformées de la fonction $t \mapsto t^n$, avec $t > 0$ et $n \geq 1$

Pour $n \geq 1$

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt$$

Une intégration par partie donne pour $p \neq 0$

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](p) = -\frac{1}{p}\left|t^n\ e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt$$

d'où

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](p)=-\frac{1}{p}\left|t^n\ e^{-pt}\right]_0^{+\infty}+\frac{n}{p}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right](p)$$

et cela sous réserve que les deux transformées de Laplace $\mathcal{L}\left[t^n\right](p)$ et $\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right](p)$ existent.

Pour que la dernière relation ait un sens, faudrait que p soit positif. On aura ainsi la relation de réccurence suivante

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](p)=\frac{n}{p}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right](p) \tag{2}$$

en particulier pour $n=2$, vue que $\mathcal{L}\left[t\right](p)=\dfrac{1}{p^2}$

$$\mathcal{L}\left[t^2\right](p)=\frac{2}{p}\mathcal{L}\left[t\right](p)=\frac{2}{p^3}$$

pour $n=3$

$$\mathcal{L}\left[t^3\right](p)=\frac{3}{p}\mathcal{L}\left[t^2\right](p)=\frac{6}{p^4}$$

il suffit alors de montrer par récurrence en utilisant la relation (2) que

$$\text{Pour tout}\quad n\geq 1:\mathcal{L}\left[t^n\right](p)=\frac{n!}{p^{n+1}}\quad \text{avec}\quad p>0.$$

3.1.4 Transformées de la fonction exponentielle $t\mapsto e^{at}$, avec $a\in\mathbb{C}$

On considère la fonction $t\longrightarrow e^{at}$ où a est un nombre complexe tel que $a=\Re(a)+i\Im(a)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{at}\right](p)\ &=\int_0^{+\infty} e^{at}\ e^{-pt}dt\\ &=\int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}dt\\ &=\tfrac{1}{a-p}\left|e^{(a-p)t}\right]_0^{+\infty}\quad \text{avec}\quad p\neq a\end{aligned}$$

ainsi pour $p\neq a$

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](p)=\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-a}\lim_{t\longrightarrow+\infty}e^{(a-p)t}$$

du fait que $\left|e^{(a-p)t}\right|=e^{(\Re(a)-p)t}$ une condition suffisante pour que la transformée $\mathcal{L}\left[e^{at}\right]$ existe est que $p>\Re(a)$ (on aura $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}e^{(\Re(a)-p)t}=0$).

Il vient donc

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](p)=\frac{1}{p-a}\quad \text{avec}\quad p>\Re(a)$$

3.1.5 Transformées des fonctions trigonométrique cos et sin

Soit les fonctions $t\longrightarrow\cos at$ et $t\longrightarrow\sin at$ définies sur $\mathbb{R}_+$ avec a un nombre complexe.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\cos at\right](p)\ &=\int_0^{+\infty}\cos at\ e^{-pt}dt\\ &=\int_0^{+\infty}\tfrac{1}{2}\left(e^{iat}+e^{-iat}\right)\ e^{-pt}dt\\ &=\tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{iat}e^{-pt}dt+\tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-iat}e^{-pt}\ dt\\ &=\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{iat}\right](p)+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-iat}\right](p)\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sin at\right](p) &= \int_0^{+\infty} \sin at\ e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2i}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)\ e^{-pt}dt \\ &= \tfrac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{iat}e^{-pt}dt - \tfrac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-iat}e^{-pt}\ dt \\ &= \tfrac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{iat}\right](p) - \tfrac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{-iat}\right](p)\end{aligned}$$

or d'aprés ce qui précède

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{iat}\right](p) &= \frac{1}{p-ia} \quad \text{avec} \quad p > \Re(ia) = -\Im(a) \\ \mathcal{L}\left[e^{-iat}\right](p) &= \frac{1}{p+ia} \quad \text{avec} \quad p > \Re(-ia) = \Im(a)\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\cos at\right](p) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ia}+\frac{1}{p+ia}\right] \\ \mathcal{L}\left[\sin at\right](p) &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ia}-\frac{1}{p+ia}\right]\end{aligned}$$

avec $p > |\Im(a)|$
finalement

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\cos at\right](p) = \frac{p}{p^2+a^2} \quad \text{avec} \quad p > |\Im(a)| \\ \mathcal{L}\left[\sin at\right](p) = \frac{a}{p^2+a^2} \quad \text{avec} \quad p > |\Im(a)|\end{aligned}$$

3.1.6 Transformées des fonctions hyperboliques cosh et sinh

Soit les fonctions $t \longrightarrow \cosh at$ et $t \longrightarrow \sinh at$ définies sur $\mathbb{R}_+$ avec a un nombre complexe.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\cosh at\right](p) &= \int_0^{+\infty} \cosh at\ e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2}\left(e^{at}+e^{-at}\right)\ e^{-pt}dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt + \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}\ dt \\ &= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at}\right](p) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-at}\right](p)\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sinh at\right](p) &= \int_0^{+\infty} \sinh at\ e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2}\left(e^{at}-e^{-at}\right)\ e^{-pt}dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt - \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}\ dt \\ &= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{at}\right](p) - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-at}\right](p)\end{aligned}$$

or d'aprés ce qui précède

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{at}\right](p) &= \frac{1}{p-a} \quad \text{avec} \quad p > \Re(a) \\ \mathcal{L}\left[e^{-at}\right](p) &= \frac{1}{p+a} \quad \text{avec} \quad p > -\Re(a)\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\cosh at\right](p) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right]\\ \mathcal{L}\left[\sinh at\right](p) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]\end{aligned}$$

avec $p > |\Re(a)|$
finalement

$$\mathcal{L}\left[\cosh at\right](p) = \frac{p}{p^2-a^2} \quad \text{avec} \quad p > |\Re(a)|$$
$$\mathcal{L}\left[\sinh at\right](p) = \frac{a}{p^2-a^2} \quad \text{avec} \quad p > |\Re(a)|$$

3.2 Conditions suffisantes d'existence de la transformée de Laplace

Dans le résultat qui suit, on donne une condition suffisante pour garantir l'existence de la transformée de Laplace de certaines fonctions à variable réelle.

Theoreme 1 *Soit f une fonction continue par morceaux sur tout intevalle borné de $\mathbb{R}^+$ et d'ordre exponentiel γ alors sa transformée de Laplace existe pour tout $p > \gamma$.*

preuve. Soit f une fonction causale définie sur $\mathbb{R}^+$, continue par morceaux sur tout borné de $\mathbb{R}^+$, d'ordre exponentiel γ : $M > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t)| < Me^{\gamma t}$ pour $t > N$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\\ &= \int_0^{N} f(t)e^{-pt}dt + \int_N^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\end{aligned}$$

puisque f est continue par morçeaux sur tout borné, la première intégrale $\int_0^N f(t)e^{-pt}dt$ existe. Il en est de même pour la seconde intégrale $\int_N^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ puisque f est d'ordre exponentiel.
Pour le voir, il suffit de voir que

$$\begin{aligned}\left|\int_N^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| &\leq \int_N^{+\infty} \left|f(t)e^{-pt}\right| dt\\ &\leq \int_N^{+\infty} |f(t)|\, e^{-pt}dt\\ &\leq \int_N^{+\infty} Me^{\gamma t}e^{-pt}dt = M\int_N^{+\infty} e^{(\gamma-p)t}dt\end{aligned}$$

où pour $p \neq \gamma$

$$\int_N^{+\infty} e^{(\gamma-p)t}dt = \frac{1}{\gamma-p}\, e^{(\gamma-p)t}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\gamma}\left[1-\lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{(\gamma-p)t}\right]$$

ainsi pour $p > \gamma$, il vient

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{(\gamma-p)t} = 0$$

et donc

$$\int_N^{+\infty} e^{(\gamma-p)t}dt = \frac{1}{p-\gamma}$$

et par conséquent, la transformée de Laplace existe pour $p > \gamma$. ■

Remarque 3.2 :

1. *On insiste sur le fait que les conditions du théorème précédent sont suffisantes pour garantir l'existence de la transformée de Laplace. Si ces conditions ne sont pas satisfaites, la transformée de Laplace peut, cependant exister ou pas. Par conséquent, ces conditions ne sont pas nécessaires en ce qui concerne l'existence des transformée de Laplace.*
2. *Le choix de l'ordre exponentiel γ de la fonction f n'étant pas unique, il sera préferable d'avoir la plus petite valeur de l'ordre γ, afin d'avoir le plus grand intervalle possible sous la forme $]\alpha, \infty]$, inclue dans $\mathbb{R}$, pour lequel $\mathcal{L}[f]$ existe. Cette valeur de γ, ainsi chosie, s'appelle indice de convergence de la transformée de f (en général l'indice de convergence est déterminé au cour du calcul pratique de la transformée).*

3.3 Transformée inverse de Laplace

Définition 3.2 *Soit f une fonction de la variable t et F sa transformée de Laplace c,à,d $F = \mathcal{L}[f]$, alors f est dite transformée de Laplace inverse de F, et nous écrivons symboliquement*

$$f = \mathcal{L}^{-1}[F] \quad ou \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

où $\mathcal{L}^{-1}$ désigne la transformée de Laplace.

Exemple 3.1 *On a $\dfrac{1}{p-a} = \mathcal{L}\left[e^{at}\right]$ donc la fonction $t \longrightarrow e^{at}$ représente la transformée inverse de Laplace de la fonction $p \longrightarrow \dfrac{1}{p-a}$, ce que nous notons par $e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p-a}\right]$.*

Notation 1 *Dire que "F est la transformée de Laplace de f et que f est la transformée inverse de Laplace de F" se note symboliquement par*

$$f \sqsupset F \quad ou \quad f(t) \sqsupset F(p)$$

c,à,d

$$\left(\begin{array}{c} F = \mathcal{L}[f] \\ f = \mathcal{L}^{-1}[F] \end{array}\right) \Longleftrightarrow f \sqsupset F.$$

La fonction f est alors appelée originale de F et F image de f.
Par exemple, on sait que $\dfrac{1}{p-a} = \mathcal{L}\left[e^{at}\right]$ et que $e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p-a}\right]$ ceci peut se noté par $e^{at} \sqsupset \dfrac{1}{p-a}$. Ainsi on peut écrire

$$\begin{array}{cccc} 1 \sqsupset \frac{1}{p}, & t \sqsupset \frac{1}{p^2}, & \cos at \sqsupset \frac{p}{p^2+a^2} & \cosh at \sqsupset \frac{p}{p^2-a^2}, \\ t^n \sqsupset \frac{n!}{p^{n+1}}, & e^{at} \sqsupset \frac{1}{p-a}, & \sin at \sqsupset \frac{a}{p^2+a^2} & \sinh at \sqsupset \frac{a}{p^2-a^2}. \end{array}$$

En générale, on a pas unicité de La transformée inverse de Laplace d'une fonction F, il suffit pour cela de considérer les fonctions dite "fonctions Zéro notée $\mathcal{N}(t)$" dont la transformée est nulle. Cependant sous certaines conditions comme le montre le théorème de Lerch l'unicité de la transformée inverse de Laplace est assurée

Theoreme 2 (Théorème de Lerch) *Dans le cas de l'ensemble des fonctions continues par morçeaux et d'ordre exponentiel, la transformée inverse de Laplace est unique.*
c,à,d si f est une fonction de cet ensemble de transformée de Laplace la fonction F, alors f est l'unique originale de F.

Dans la suite du cours, on supposera toujours l'unicité de la transformée inverse de Laplace.

4 Propriétés de la transformée de Laplace

Dans toute la suite, on considère des fonctions causale dont la transformée de Laplace existe, par exemple les fonctions continues par morçeaux sur les intervalles bornés de $\mathbb{R}_+$ et d'ordre exponentiel.

On établi certaines propriétés pratiques et foncdamentales qui permèttent de relier "les opérations" de dérivation et d'intégration avec la multiplication et la dérivation

4.1 Propriétés pratiques

4.1.1 Propriété de linéarité

Proposition 1 *Soient α, β deux constantes réelles ou complexes, f et g deux fonctions de la variable réelle t dont les transformées de Laplace sont, réspectivement, $F = \mathcal{L}[f]$ et $G = \mathcal{L}[g]$, la fonction définie par $t \longrightarrow \alpha f(t) + \beta g(t)$ admet une transformée de Laplace donnée par*

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$$

ou sous la forme

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](p) = \alpha F(p) + \beta G(p)$$

preuve. Ce résultat est dûe essentiellement à la propriété de linéarité de l'opérateur intégrale comme suite

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](p) &= \int_0^{+\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-pt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \alpha f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} \beta g(t) e^{-pt} dt \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt \\
&= \alpha \mathcal{L}[f(t)](p) + \beta \mathcal{L}[g(t)](p)
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.1 *Le domaine d'existence de la transformée $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)]$ devra être l'interséction des domaines d'existence des transformées $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[g]$.*

Exemple 4.1 *Calcul de $\mathcal{L}\left[4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\right]$*

$$\mathcal{L}\left[4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\right](p) = 4\mathcal{L}\left[t^2\right](p) - 3\mathcal{L}[\cos 2t](p) + 5\mathcal{L}\left[e^{-t}\right](p)$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^2\right](p) &= \frac{2}{p^3} \quad \textit{avec} \quad p > 0 \\
\mathcal{L}[\cos 2t](p) &= \frac{p}{p^2+4} \quad \textit{avec} \quad p > 0 \\
\mathcal{L}\left[e^{-t}\right](p) &= \frac{1}{p+1} \quad \textit{avec} \quad p > -1
\end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{L}\left[4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\right](p) = \frac{8}{p^3} - \frac{3p}{p^2+4} + \frac{5}{p+1} \quad \textit{avec} \quad p > 0$$

Comme conséquence, on déduit que la transformation de laplace, définie par le signe $\mathcal{L}$, qui associe à une fonction f de la variable t, la fonction $F = \mathcal{L}[f]$ de la variable p est un opérateur linéaire.

4.1.2 Propriété de translation ou de retard

Soit τ un réel strictement positif et f une fonction,de la variable t, dont la transformée de Laplace est $F = \mathcal{L}[f]$.

On considère la translatée de f dans la direction $\tau \overrightarrow{i}$ définie par

$$t \longrightarrow \mathcal{U}(t-\tau)f(t-\tau)$$

dans la pratique cette fonction représente un retard de la fonction f. On dit alors que la fonction f est retardée de τ.

Proposition 2 *Soit τ un réel strictement positif et f une fonction,de la variable t, dont la transformée de Laplace est $F = \mathcal{L}[f]$, alors*

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-\tau)f(t-\tau)](p) = e^{-\tau p}F(p)$$

preuve. On a

$$\mathcal{U}(t-\tau)f(t-\tau) = \begin{cases} f(t-\tau), & \text{pour} \quad t \geq \tau, \\ 0, & \text{pour} \quad t < \tau, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{U}(t-\tau)f(t-\tau)](p) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(t-\tau)f(t-\tau)e^{-pt}dt \\ &= \int_\tau^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt \end{aligned}$$

en posant $t - \tau = s$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{U}(t-\tau)f(t-\tau)](p) &= \int_0^{+\infty} f(s)e^{-p(s+\tau)}ds \\ &= e^{-\tau p}\int_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}ds \end{aligned}$$

ainsi

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-\tau)f(t-\tau)](p) = e^{-\tau p}F(p)$$

avec $F = \mathcal{L}[f]$. Remarquons que le domaine d'existance de $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-\tau)f(t-\tau)]$ est le même que celui de F.
■

Exemple 4.2 *Calcule de la transformée de la fonction $t \longrightarrow \mathcal{U}(t-\tau)(t-2)^3$, représentant un retard de la fonction $t \longrightarrow t^3$.*
On a que

$$\mathcal{L}\left[t^3\right](p) = \frac{6}{p^4} \quad \textit{avec} \quad p > 0$$

donc

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t-\tau)(t-2)^3\right](p) = \frac{6e^{-2p}}{p^4} \quad \textit{avec} \quad p > 0.$$

Remarque 4.2 *On remarque, de l'exemple précédent, que si on considère la fonction causale $t \longrightarrow (t-2)^3$, sans prendre en considération la fonction de Heaviside, elle ne représente absolument pas un retard de $t \longrightarrow t^3$. Sa transformée de Laplace se calcule grâce à la propriété de linearité comme suite*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[(t-2)^3\right](p) &= \mathcal{L}\left[t^3 - 6t^2 + 12t - 8\right](p) \\ &= \mathcal{L}\left[t^3\right](p) - 6\mathcal{L}\left[t^2\right](p) + 12\mathcal{L}[t](p) - 8\mathcal{L}[1](p) \\ &= \tfrac{6}{p^4} - \tfrac{12}{p^3} + \tfrac{12}{p^2} - \tfrac{8}{p} \quad \textit{avec} \quad p > 0. \end{aligned}$$

chose qui n"a rien avoir avec le résultat de la proposition.

Exercice 1 *Soit f, g, h trois fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ (voir figures 15,16 et 13)*

1. *Exprimer les fonctions f, g, h sous forme de somme de fonctions translatées.*
2. *En déduire, en utlilisant les propriétés de la transformée de Laplace, les transformées des fonctions f, g, et h.*

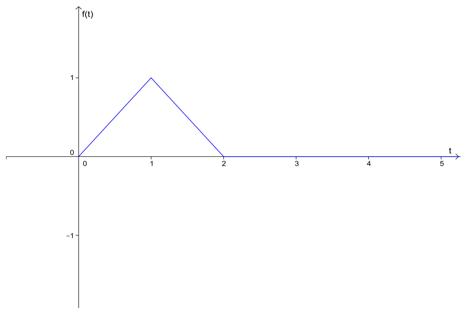

FIGURE 13: $t \mapsto f(t)$

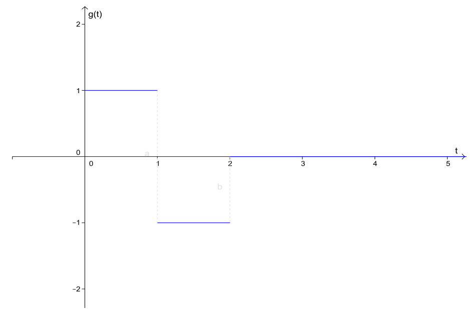

FIGURE 14: $t \mapsto g(t)$

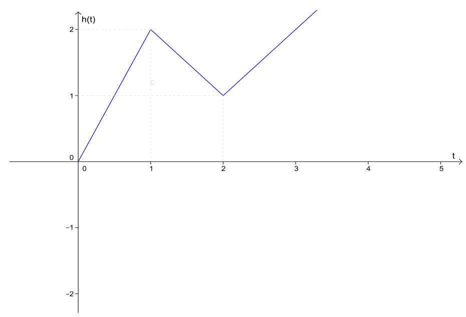

FIGURE 15: $t \mapsto h(t)$

Exercice 2 *Calculer sans faire un calcul intégrale la transformée de la fonction*

$$g(t) = \mathcal{U}(t - \frac{3\pi}{4}) \cos^2\left(\frac{4t - 3\pi}{2}\right)$$

4.2 Propriétés fondamentales

Dans ce qui suit, on suppose que toutes les opérations de dérivation et d'intégration sont possibles au moins au sens symbolique.

4.2.1 Transformée d'une dérivée

Soit f une fonction de transformée de Laplace $F = \mathcal{L}[f]$ "Rappelons que F existe pour $p > \gamma$ où γ désigne l'ordre exponentiel de f où l'indice de convergence de $\mathcal{L}[f]$".

Posons $f(0^+) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} f(t)$, et supposons f de classe $\mathcal{C}^1$- par morçeaux et que sa dérivées f' soit d'ordre exponentiel.

Deux principaux cas se présentent

Cas de continuité Si f est continue sur $]0, +\infty[$, on a

Proposition 3 *On a*

$$\mathcal{L}\left[f'\right](p) = pF(p) - f(0^+) \tag{3}$$

preuve. On a

$$\mathcal{L}\left[f'\right](p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$$

une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f'\right](p) &= f(t)e^{-pt}\Big]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= \lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t)e^{-pt} - \lim_{t\longrightarrow 0} f(t)e^{-pt} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\end{aligned}$$

où $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$.

On a pour tout t au voisinage de $+\infty$

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| < Me^{(\gamma-p)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où

$$\mathcal{L}\left[f'\right](p) = pF(p) - f(0^+)$$

■

La précédente proposition peut être généralisée de la manière suivante

Proposition 4 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $]0,+\infty[$ et telle que toutes ses dérivées $f^{(n)}$, avec $n \in \mathbb{N}$ admettent des transformées de Laplace.*

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](p) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - pf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

preuve. En appliquant (3) succéssivement au différentes dérivées de f, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f'\right](p) &= pF(p) - f(0^+). \\ \mathcal{L}\left[f''\right](p) &= p\mathcal{L}\left[f'\right](p) - f'(0^+) = p\left[pF(p) - f(0^+)\right] - f'(0^+) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+). \\ \mathcal{L}\left[f^{(3)}\right](p) &= p\mathcal{L}\left[f''\right](p) - f''(0^+) = p\left[p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)\right] - f''(0^+) \\ &= p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf'(0^+) - f''(0^+)\end{aligned}$$

on arrive ainsi à démontrer la proposition par réccurence. ■

Cas de discontinuité On suppose, à présent que f admet un point $a \in]0,+\infty[$ de discontinuité de première éspèce. On pose $f(a^+) = \lim_{t\longrightarrow a^+} f(t)$ et $f(a^-) = \lim_{t\longrightarrow a^-} f(t)$

Proposition 5 *Soit f une fonction continue par morçeaux sur $]0,+\infty[$ et admet un point a comme discontinuité de première espèce. On suppose que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,a[$ et sur $]a,+\infty[$ et que sa dérivée admet une transformée de Laplace, alors*

$$\mathcal{L}\left[f'\right](p) = pF(p) - f(0^+) - e^{-ap}S_a(f)$$

où $S_a(f) = f(a^+) - f(a^-)$ désigne le saut de la fonction f en a.

preuve. De même que pour la proposition précédente on a

$$\mathcal{L}\left[f'\right](p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^{a} f'(t)e^{-pt}dt + \int_a^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$$

une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f'\right](p) &= f(t)e^{-pt}\big]_0^a + p\int_0^a f(t)e^{-pt}dt + f(t)e^{-pt}\big]_a^{+\infty} + p\int_a^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
&= \lim_{t\longrightarrow a^-} f(t)e^{-pt} - \lim_{t\longrightarrow 0^+} f(t)e^{-pt} + p\int_0^a f(t)e^{-pt}dt \\
&\qquad + \lim_{t\longrightarrow +\infty} f(t)e^{-pt} - \lim_{t\longrightarrow a^+} f(t)e^{-pt} + p\int_a^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
&= f(a^-)e^{-ap} - f(0^+) - f(a^+)e^{-ap} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

4.2.2 Transformée d'une intégrale

Proposition 6 *: Soit f est une fonction de la variable t et g sa prémitive au sens $g : t \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(s)ds$, alors "symboliquement"*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right](p) = \frac{F(p)}{p}$$

où $F = \mathcal{L}[f]$.

preuve. La fonction $g : t \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(s)ds$ ainsi définie est une fonction continue par morçeaux et d'ordre exponentiel, de plus dérivable presque partout avec $g'(t) = f(t)$.
En appliquant la relation (3) à g', il vient

$$\mathcal{L}\left[g'\right](p) = \mathcal{L}[f](p) = p\mathcal{L}[g](p) - g(0^+)$$

avec $\mathcal{L}[g](p) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right](p)$ et $g(0^+) = 0$ car $g(0^+) = \lim_{t\to 0^+} \int_0^t f(s)ds$,
ainsi on trouve

$$F(p) = p\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right](p)$$

où symboliquement, on écrit

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right](p) = \frac{F(p)}{p}$$

"par symboliquement on veut dire que lorsque les quantité intervenant dans l'égalité existe." ■

Exemple 4.3 *On a $\mathcal{L}[\sin 2t](p) = \frac{2}{p^2+4}$, il vient $\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin 2s ds\right] = \frac{2}{p(p^2+4)}$ avec $p > 0$.*

4.2.3 Multiplication par des puissances de t

Soit f une fonction de la variable t de transformée de Laplace F, telle que toutes les fonctions $t \to t^n f(t)$ admettent des transformées de Laplace

Proposition 7

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} f(p) = (-1)^n f^{(n)}(p).$$

preuve. On admet que la dérivation sous le signe intégrale "la règle de Leibnitz" est permise.

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dp} = F'(p) &= \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}\left(f(t)e^{-pt}\right)dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)\frac{de^{-pt}}{dp}dt = \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-pt}dt \\
&= -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}dt = -\mathcal{L}\left[tf(t)\right](p)
\end{aligned}$$

d'où pour $n = 1$

$$\mathcal{L}\left[tf(t)\right](p) = -F'(p)$$

Pour établir le résultat en général, on suppose que la relation est vraie pour $n-1$ ie

$$\mathcal{L}\left[t^{n-1}f(t)\right](p) = (-1)^{n-1}F^{(n-1)}(p).$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} t^{n-1}f(t)e^{-pt}dt &= \frac{d}{dp}(-1)^{n-1}F^{(n-1)}(p) \\
&= (-1)^{n-1}F^{(n)}(p)
\end{aligned}$$

d'un autre côté

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} t^{n-1}f(t)e^{-pt}dt &= \int_0^{+\infty} t^{n-1}f(t)\frac{de^{-pt}}{dp}dt \\
&= -\int_0^{+\infty} t^{n}\ f(t)e^{-pt}dt = -\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](p)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](p) = (-1)^n F^{(n)}(p).$$

■

Exemple 4.4 $\mathcal{L}\left[e^{2t}\right](p) = \dfrac{1}{p-2}$ *pour* $p > 2$, *il vient que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[te^{2t}\right](p) &= -\tfrac{d}{dp}\left(\tfrac{1}{p-2}\right) = \tfrac{1}{(p-2)^2} \\
\mathcal{L}\left[t^2e^{2t}\right](p) &= \tfrac{d^2}{dp^2}\left(\tfrac{1}{p-2}\right) = \tfrac{2}{(p-2)^3}
\end{aligned}$$

4.2.4 Division par t

On a dmet pour ce résultat que la fonction $t \longrightarrow \dfrac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en $t = 0$ ie $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}\dfrac{f(t)}{t}$ existe, et que sa transformée de Laplace $F = \mathcal{L}[f]$ est intégrable sur tout intervalle de la forme $[p, +\infty[$ avec $p > \gamma$, où γ désigne l'indice de convergence de $\mathcal{L}[f]$.

Proposition 8

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^{+\infty} F(s)ds$$

preuve. Posons $g : t \longrightarrow \dfrac{f(t)}{t}$, et notons par G sa transformée de Laplace.
Du fait que $f(t) = tg(t)$, d'aprés ce qui précède

$$F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[tg(t)\right](p) = -G'(p)$$

en intégrant les deux termes sur l'intervalle $[p, +\infty[$, on trouve

$$\int_p^{+\infty} F(s)ds = -\int_p^{+\infty} G'(p)(s)ds = -\left. G'(s)\right]_p^{+\infty}$$

notons bien que les primitives de G' sont données par $G(p)+k$, où k est une constante arbitraire, en choisissant k de telle sorte que $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty} G(p) = 0$ (chose qui sera démontré ultérieurement), il vient

$$\int_p^{+\infty} F(s)ds = G(p) = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p)$$

■

Exemple 4.5 *vue que* $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \frac{\sin t}{t} = 1$ *et que* $\mathcal{L}[\sin t](p) = \frac{1}{p^2+1}$
on aura

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right](p) = \int_p^{+\infty} \frac{1}{s^2+1}ds = \arctan\left(\frac{1}{p}\right)$$

4.3 Comportement assymptotique de la transformée de Laplace

Dans cette partie du cours, on démontre certains nombres de résultats méttant en évidence l'aspect asymptotique de la transformée de Laplace d'une fonction, au voisinage de 0 et de $+\infty$. Ces théorème sont utilisés en physique essentiellement pour déterminer les conditions initiales pour la résolution d'une équation différentielle et aussi pour connaître le comportement d'un système lorsque la variable t tend vers $+\infty$.

4.3.1 Comportemement de $F(p)$ quand $p \to +\infty$

Soit f une fonction de la variable t, continue par morçeaux et d'ordre exponentiel

Theoreme 3 *Soit f une fonction de la variable t, et F sa transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, alors*

$$\lim_{p\longrightarrow+\infty} F(p) = 0 \tag{4}$$

preuve. f étant d'ordre exponentiel, c,à,d qu'il existe $M > 0$, γ un réel tels que pour $t > N \quad |f(t)| < Me^{\gamma t}$, il vient donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f(t)](p)| &= \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^{N} f(t)e^{-pt}dt\right| + \left|\int_N^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \\ &\leq \int_0^{N} |f(t)|\, e^{-pt}dt + \int_N^{+\infty} |f(t)|\, e^{-pt}dt \end{aligned}$$

d'une part du fait que soit continue par morçeaux sur les bornés de $\mathbb{R}_+$,
il vient qu'il existe $M' > 0$ tel que $|f(t)| < M'$ sur $[0, N]$
donc pour p assez grand

$$\int_0^N |f(t)|\, e^{-pt}dt < M' \int_0^N e^{-pt}dt = \frac{M'}{p}\left(1 - e^{-Np}\right) \underset{p\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'autre part

$$\int_N^{+\infty} |f(t)|\, e^{-pt} dt < M \int_N^{+\infty} e^{(\gamma-p)t} dt$$

pour $p > \gamma$ (γ étant l'indice de convergence de F)

$$\int_N^{+\infty} |f(t)|\, e^{-pt} dt < \frac{M}{\gamma - p}\ e^{(\gamma-p)t}\Big]_0^{+\infty} = \frac{M}{\gamma - p}\left(\lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{(\gamma-p)t} - e^{(\gamma-p)N}\right)$$

avec $\lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{(\gamma-p)t} = 0$, donc

$$\int_N^{+\infty} |f(t)|\, e^{-pt} dt < \frac{M}{p-\gamma} e^{(\gamma-p)N} \underset{p\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

on déduit donc

$$|\mathcal{L}\left[f(t)\right](p)| \underset{p\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi

$$F(p) \underset{p\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

4.3.2 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

On se donne une fonction f d'ordre exponentiel et $\mathcal{C}^1$par morçeaux sur $]0, +\infty[$ continue sur tout $]0, +\infty[$, de dérivées d'ordre exponentiel et F sa transformée de Laplace.

Theoreme 4 (Théorème de la valeur initiale) *Soit f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$par morçeaux sur , $]0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel.On note par $F = \mathcal{L}[f]$ sa transformée de Laplace, alors (sous réserve que les deux limites existent)*

$$\lim_{t\longrightarrow0^+} f(t) = \lim_{p\longrightarrow+\infty} pF(p)$$

preuve. On supposant que f admet une dérivée définie par morceaux sur $]0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel, il vient de (3)

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) = pF(p) - f(0^+) \tag{5}$$

où $f(0^+) = \lim_{t\longrightarrow0^+} f(t)$.
Or d'aprés (4), on a

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt \underset{p\rightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par passage à la limite quand p tend vers l'infin dans (5), il vient

$$\lim_{p\longrightarrow+\infty} \mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) = \lim_{p\longrightarrow+\infty} pF(p) - f(0^+) = 0$$

ainsi

$$\lim_{p\longrightarrow+\infty} pF(p) = f(0^+) = \lim_{t\longrightarrow0^+} f(t).$$

■

Theoreme 5 (Théorème de la valeur finale) *Soit f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$par morçeaux sur , $]0,+\infty[$ et d'ordre exponentiel.On note par $F=\mathcal{L}[f]$ sa transformée de Laplace, alors (sous réserve que les deux limites existent)*

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t)=\lim_{p\longrightarrow 0} pF(p)$$

preuve. De (3)

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p)=pF(p)-f(0^+)$$

par passge à la limite quand $p\longrightarrow+\infty$, on trouve d'un côté

$$\begin{aligned}\lim_{p\longrightarrow 0}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt &= \int_0^{+\infty} f'(t)\lim_{p\longrightarrow 0} e^{-pt}dt\\ &= \int_0^{+\infty} f'(t)dt = f(t)\rfloor_0^{+\infty}\\ &= \lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t)-f(0^+)\end{aligned}$$

d'un autre côté,

$$\lim_{p\longrightarrow 0}\left[pF(p)-f(0^+)\right]=\lim_{p\longrightarrow 0} pF(p)-f(0^+)$$

ainsi

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t)-f(0^+)=\lim_{p\longrightarrow 0} pF(p)-f(0^+)$$

d'où

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t)=\lim_{p\longrightarrow 0} pF(p)$$

■

Exemple 4.6 *Soit $f(t)=3e^{-2t}$, on a $F(p)=\mathcal{L}\left[3e^{-2t}\right](p)=\dfrac{3}{p+2}$ pour $p>-2$ et $pF(p)=\dfrac{3p}{p+2}$, on remarque bien que*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} f(t)=\lim_{p\longrightarrow+\infty} pF(p)=3$$

et

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} f(t)=\lim_{p\longrightarrow 0} pF(p)=0$$

4.4 Complément

Dans cette partie on expose certaines applications de la transformées de Laplace pour un certains types de fonctions (cette partie ne finie pas au niveau de ce cours une extension pourra être faite ulérieurement)

4.4.1 Transformée d'une fonction périodique

Proposition 9 *Soit f une fonction périodique de période T, avec $T>0$ et telle que $f(t+T)=f(t)$, alors*

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$

preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\\ &= \int_0^T f(t)e^{-pt}dt+\int_T^{2T} f(t)e^{-pt}dt+\int_{2T}^{3T} f(t)e^{-pt}dt+\cdots+\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-pt}dt+\cdots\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-pt}dt\end{aligned}$$

le changement de variable $t = s - kT$ avec $s \in [0, T]$, donne du fait que $f(s - kT) = f(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T f(s) e^{-p(s-kT)} ds \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T f(s) e^{-ps} e^{-pkT} ds \\ &= \int_0^T f(s) e^{-ps} ds \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-pkT}\end{aligned}$$

pour $p > 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-pkT} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-pT}\right)^k = \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

ainsi il vient

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(s) e^{-ps} ds \quad \text{avec} \quad p > 0$$

■

Exemple 4.7 *Soit la fonction 2π-pééhriodique définie par*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \textit{pour} \quad 0 < t < \pi \\ 0 & \textit{pour} \quad 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

de la proposition précédente on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) &= \frac{1}{1 - e^{-2p\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2p\pi}} \int_0^{\pi} \sin t \ e^{-pt} dt\end{aligned}$$

en remarquant que $\int_0^{\pi} \sin t \ e^{-pt} dt = \Im\left(\int_0^{\pi} \sin t \ e^{(i-p)t} dt\right)$*, on trouve*

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](p) = \frac{1}{1 - e^{-2p\pi}} \frac{1 + e^{-p\pi}}{1 + p^2} = \frac{1}{(1 + p^2)(1 - e^{-p\pi})} \textit{pour} \quad p > 0.$$

4.4.2 Impulsion de Dirac

Soit la suite de fonctions f_ε définie par

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{pour} \quad 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{pour} \quad t > \varepsilon \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ un nombre réel positif distiné à tendre vers 0.

On remarque que

$$\int_0^{+\infty} f_\varepsilon(t) dt = 1$$

et que sa transformée de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f_\varepsilon(t)\right](p) &= \int_0^{+\infty} f_\varepsilon(t) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e^{-pt} dt\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}\left[f_\varepsilon(t)\right](p) = \frac{1-e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p}$$

ainsi

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow +\infty} \mathcal{L}\left[f_\varepsilon(t)\right](p) = 1$$

A partir de là, certains ingénieurs et physiciens ont été conduit à supposer l'existence d'une fonction limite, de la suite f_ε notée δ approchée par f_ε quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Cette fonction limite appelée impulsion de Dirac ou fonction de Dirac, posède entre autre les propriétés suivantes

$$\int_0^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$
$$\mathcal{L}[\delta] = 1 \Leftrightarrow \delta \sqsupset 1$$

D'un point de vue mathématique, la fonction de Dirac n'existe pas, néomoins grâce à la théorie des Distributions introduite par Laurant Schwartz, la notion d'impulsion de Dirac trouve tout son sens.

4.4.3 Produit de convolution

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, le produit de convolution de f et g est une fonction notée par $f * g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds$$

dans le cas des fonctions causales continue par morçeaux et d'ordre exponentiel ce produit est définie comme tel

Définition 4.1 *Soient f et g deux fonctions causales continue par morçeaux et d'ordre exponentiel, le produit de convolution de f et g est la fonction causale définie par*

$$(f * g)(t) = \mathcal{U}(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(s)f(s)\mathcal{U}(t-s)g(t-s)ds$$

où encore sous la forme réduite

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$$

Le produit de convolution possède les propriétés suivantes

Proposition 10 *:*

1. *Le produit de convolution est commutatif*

$$f * g = g * f$$

2. *Le produit de convolution est distibutif par rapport à l'addition*

$$f * (g+h) = (f * g) + (f * h)$$

preuve.

1. Dans la définition du produit de convolution, on fait le changement de variable $t-s=u$, il vient

$$\begin{aligned}(f*g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)ds &= -\int_t^0 f(t-u)g(u)du \\ &= \int_0^t g(u)f(t-u)du = (g*f)(t)\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}[f*(g+h)](t) &= \int_0^t f(s)(g+h)(t-s)ds \\ &= \int_0^t f(s)g(t-s)ds + \int_0^t f(s)h(t-s)ds \\ &= (f*g)(t)+(f*h)(t)\end{aligned}$$

■

Theoreme 6 *Soient f et g deux fonctions causales continue par morçeaux et d'ordre exponentiel, de transformées de Laplace $F=\mathcal{L}[f]$, $G=\mathcal{L}[g]$*

$$\mathcal{L}[f*g](p)=F(p)\times G(p)$$

preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f*g)(t)](p) &= \int_0^{+\infty}\left[\mathcal{U}(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{U}(s)f(s)\mathcal{U}(t-s)g(t-s)ds\right]e^{-pt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathcal{U}(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{U}(s)f(s)\mathcal{U}(t-s)g(t-s)ds\right]e^{-pt}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(s)f(s)\mathcal{U}(t-s)g(t-s)e^{-pt}dsdt\end{aligned}$$

ce qui représente une intégrale double sur $\mathbb{R}^2$, avec le changement de variable

$$\begin{cases} u=s \\ v=t-s\end{cases}$$

il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f*g)(t)](p) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{U}(u+v)\mathcal{U}(u)f(u)\mathcal{U}(v)g(v)e^{-pt}dudv \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)g(v)e^{-p(u+v)}dudv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du\right)\times\left(\int_0^{+\infty} g(v)e^{-pv}dv\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}[f*g]=F\times G$$

■

Références

[1] Murray R. Spiegel, Transformées de Laplace, Série Schaum.

[2] P. Bénichou, R. Bénichou, N. Boy, J.P Pouget, Série de Fourier Transformation de Laplace Mathématiques Appliquées - Ellipses.

[3] M. Saddouki, Cours de Mathématiques pour la physique, Polycopie de l'université Djillali Bounaâma Khémis Méliana.