Exercices supplémentaires et corrigés

Transformations de Fourier

Exercise 1 *Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes*

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & si \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & si \quad |t| = 1 \\ 0, & si \quad |t| > 1 \end{cases}, \quad f_2(t) = \begin{cases} -1, & si \quad -1 < t < 0 \\ 1, & si \quad 0 < t < 1 \\ 0, & si \quad |t| > 1 \end{cases},$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 2 + 3t, & -1 < t < 0 \\ 2 - 3t, & 0 < t < 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Solution.

1. $f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad |t| = 1 \\ 0, & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases}$. La transformïée de Fourier de f_1 est

$$F_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-i\lambda t} dt$$

donc pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$\boxed{F_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda}.}$$

2. $f_2(t) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad -1 < t < 0 \\ 1, & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0, & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases}$.

On a

$$\begin{aligned}F_2(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)e^{-i\lambda t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-1}^{0} -e^{-i\lambda t}dt + \int_{0}^{+1} e^{-i\lambda t}dt\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1-e^{it}}{i\lambda} + \frac{e^{-i\lambda}-1}{-i\lambda}\right]\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{F_2(\lambda) = -i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\tfrac{1-\cos\lambda}{\lambda}.}$$

3. $f_3(t) = \begin{cases} 2+3t, & -1 < t < 0 \\ 2-3t, & 0 < t < 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$.

On remarque que

$$f_3 = 2f_1 - 3tf_2 \text{ p.p sur } \mathbb{R}$$

donc

$$F_3(\lambda) = 2F_1(\lambda) - 3\mathcal{F}[tf_2](\lambda).$$

Et avec la propriété de dérivation

$$\mathcal{F}[tf_2](\lambda) = i\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}[f_2](\lambda) = iF_2'(\lambda)$$

on trouve

$$\begin{aligned}F_3(\lambda) &= 2\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right) - 3i\frac{\partial}{\partial\lambda}F_2(\lambda) \\ &= 2\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right) - 3\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda\sin\lambda - 1 + \cos\lambda}{\lambda^2}\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{F_3(\lambda) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(\tfrac{3-3\cos\lambda-\sin\lambda}{\lambda^2}\right).}$$

■

Exercise 2 *On définit la fonction* Π_1 *"fonction porte" par*

$$\Pi_1(t) = \begin{cases} 1, & si\ t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & sinon. \end{cases}.$$

Utiliser la transformée de Fourier de Π_1 *et les propriétés de l'opérateur* $\mathcal{F}$ *pour trouver la transformée des fonctions*

$$t \mapsto \Pi_1\left(\frac{t-1}{2}\right),\ t \mapsto t\Pi_1(t),\ t \mapsto t^2\Pi_1(t).$$

Solution.
D'abord, on calcule la transformée de Fourier $F = \mathcal{F}[\Pi_1]$, où

$$\Pi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En effet

$$F(\lambda) = \mathcal{F}[\Pi_1](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\lambda t} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\frac{\lambda}{2}} - e^{i\frac{\lambda}{2}}}{-i\lambda}$$

donc

$$\boxed{F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{\lambda}{2})}{\lambda}.}$$

1. Calcule de la transformée $F_1 = \mathcal{F}\left[\Pi_1\left(\frac{t-1}{2}\right)\right]$.
Posons $h(t) = \Pi_1\left(\frac{t}{2}\right)$.
On remarque que $\Pi_1\left(\frac{t-1}{2}\right) = h(t-1)$, et la propriété de translation entraîne

$$\mathcal{F}\left[\Pi_1\left(\frac{t-1}{2}\right)\right](\lambda) = \mathcal{F}[h(t-1)](\lambda) = e^{-i\lambda}\mathcal{F}[h](\lambda) = e^{-i\lambda}\mathcal{F}\left[\Pi_1\left(\frac{t}{2}\right)\right](\lambda)$$

et par la propriété de l'homothécie (pour $a = \frac{1}{2}$)

$$\mathcal{F}\left[\Pi_1\left(\frac{t}{2}\right)\right](\lambda) = 2\mathcal{F}[\Pi_1](2\lambda)$$

on trouve

$$\mathcal{F}\left[\Pi_1\left(\frac{t-1}{2}\right)\right](\lambda) = 2e^{-i\lambda}F(2\lambda).$$

donc

$$\boxed{F_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\lambda}{\lambda} e^{-i\lambda}.}$$

2. Calcule de $F_2 = \mathcal{F}\left[t\Pi_1\right].$
Par la propriété de dérivation on tire

$$F_2\left(\lambda\right) = \mathcal{F}\left[t\Pi_1\right]\left(\lambda\right) = i\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}\left[\Pi_1\right]\left(\lambda\right) = iF'\left(\lambda\right)$$

donc

$$F_2(\lambda) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(\tfrac{\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2} - \sin\frac{\lambda}{2}}{\lambda^2}\right).$$

3. Calcule de $F_3\left(\lambda\right) = \mathcal{F}\left[t^2\Pi_1\left(t\right)\right].$
Par la propriété de dérivation d'ordre $n = 2$,

$$F_3\left(\lambda\right) = \mathcal{F}\left[t^2\Pi_1\left(t\right)\right] = -F''\left(\lambda\right)$$

on a

$$F_3(\lambda) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left[\tfrac{1}{2\lambda^2}\cos\tfrac{\lambda}{2} + \left(\tfrac{1}{4\lambda} + \tfrac{1}{2\lambda^2} + \tfrac{2}{\lambda^3}\right)\sin\tfrac{\lambda}{2}\right].$$

■

Exercise 3 *Calculer les transformées de Fourier de*

$$f(x) = e^{-\frac{|x|}{a}},\ g(x) = xe^{-\frac{|x|}{a}},\ h(x) = e^{-\alpha ix}e^{-\frac{|x-b|}{a}},\ a, b > 0.$$

Solution. 1 Calcule de $F = \mathcal{F}\left[f\right]$.. D'après (l'exercice 1. Série N°07) on a

$$F\left(\lambda\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\frac{1}{a}}{\lambda^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

donc

$$\boxed{F\left(\lambda\right) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\tfrac{a}{a^2\lambda^2+1}.}$$

2. Calcule de $G = \mathcal{F}\left[g\right]$.

On remarque que $g(x) = xf(x)$. Grâce au propriété de dérivation

$$\begin{aligned} G\left(\lambda\right) &= \mathcal{F}\left[xf\right]\left(\lambda\right) = i\frac{\partial}{\partial\lambda}F\left(\lambda\right) \\ &= -i\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\tfrac{2a^3\lambda}{\left(a^2\lambda^2+1\right)^2}. \end{aligned}$$

3. Calcule de $H = \mathcal{F}\left[h\right].$
La fonction h s'écrit comme

$$h(x) = e^{-i\alpha x}\varphi\left(x\right)$$

avec

$$\varphi(x) = e^{-\frac{|x-b|}{a}} = f(x-b).$$

La propriété de modulation donne

$$H(\lambda) = \mathcal{F}\left[e^{-i\alpha x}\varphi(x)\right](\lambda) = \mathcal{F}[\varphi(x)](\lambda+\alpha)$$

et la propriété de translation nous permet de trouver

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi(x)](\lambda) &= \mathcal{F}[f(x-b)](\lambda) \\ &= e^{-ib\lambda}\mathcal{F}[f(x)](\lambda) \\ &= e^{-ib\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2\lambda^2+1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{H(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{a.e^{-ib(\lambda+a)}}{a^2(\lambda+a)^2+1}.}$$

■

Exercise 4 *Calculer les transformées de Fourier de*

$$f(x) = e^{-\frac{|x|}{a}},\ g(x) = xe^{-\frac{|x|}{a}},\ h(x) = e^{-\alpha ix}e^{-\frac{|x-b|}{a}},\ a, b > 0.$$

Solution. 1 Calcule de $\mathcal{F}[f_a * f_b]$.. On sait que

$$\mathcal{F}[f_a * f_b](\lambda) = \mathcal{F}[f_a](\lambda).\mathcal{F}[f_b](\lambda).$$

De plus, d'après l'exercice 4 (Série $N°07$),

$$\boxed{\mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{F}[f_a * f_b](\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{ab}}e^{-\left(\frac{a+b}{4ab}\right)\lambda^2}.}$$

2. Déduire $f_a * f_b$.
En fait, on peut écrire $\mathcal{F}[f_a * f_b]$ sous la forme

$$\mathcal{F}[f_a * f_b](\lambda) = \frac{\sqrt{2c}}{2\sqrt{ab}}.\left[\frac{1}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{\lambda^2}{4c}}\right]$$

avec

$$c = \frac{ab}{a+b}.$$

et on déduit que

$$(f_a * f_b)(x) = \frac{\sqrt{2c}}{2\sqrt{ab}}.e^{-cx^2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a+b}}.e^{-\left(\frac{ab}{a+b}\right)x^2}}.$$

■

Exercise 5 *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi\omega \sin wt}{1-\omega^2} dt = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \sin t, & pour\ 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & pour \quad t > \pi. \end{cases}$$

Solution. Posons

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \sin t, & \text{pour } 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{pour} \quad t > \pi \end{cases}$$

et montrons que

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi\omega \sin wt}{1-\omega^2} d\omega.$$

En effet, la représentation de f par une intégrale de Fourier sinus est

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_s[f](\omega) . \sin(\omega t)\ d\omega$$

où $\mathcal{F}_s[f]$ est la transformée de Fourier sinus de f.
Si on considère que f est une fonction impaire, alors $\mathcal{F}_s[f] = i\mathcal{F}[f]$. Et d'après l'exemple(3) de l'exercice (1) (Série N°07), la transformée de Fourier de f est

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{\pi}{2}\left[-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}\right] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\frac{\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}.$$

Donc

$$\mathcal{F}_s[f](\omega) = i\mathcal{F}[f](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\frac{\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_s[f](\omega) . \sin(\omega t)\ d\omega \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\frac{\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}. \sin(\omega t)\ d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}. \sin(\omega t)\ d\omega \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Exercise 6 *Résoudre les équations intégrale suivantes*

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,dt &= \frac{1}{1+s^2} \\ y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)\,e^{-a|u|}du &= e^{-a|t|},\ a > 0. \end{aligned}$$

Solution. 1. On cherche une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,dt = \frac{1}{1+s^2}.$$

Si on considère f comme une fonction paire sur $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{F}_c[f] = \mathcal{F}[f]$, et on trouve

$$\mathcal{F}[f](s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(st)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{1}{1+s^2}.$$

Et d'après l'exemple(1) de l'exercice (1) (Série N°07) (pour $a=1$), on a

$$\mathcal{F}\left[e^{-tx}\right](s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{1}{1+s^2}$$

d'où

$$\mathcal{F}[f](s) = \mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right](s)$$

donc pour $t \geq 0$,

$$f(t) = e^{-t}.$$

2. On cherche une fonction y définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)\,e^{-a|u|}du = e^{-a|t|},\ a>0. \tag{2}$$

Posons $f(t) = e^{-a|t|}.$ La convolée de y avec f est donnée par

$$(y*f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)\,e^{-a|u|}du.$$

L'équation (2) est équivalente à l'équation (3) suivante

$$y(t) + \sqrt{2\pi}\,(y*f)(t) = e^{-a|t|}. \tag{3}$$

On composant les deux membres de l'équation (3) par l'opérateur $\mathcal{F}$ on trouve :

$$\mathcal{F}[y](\lambda) + \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[y*f](\lambda) = \mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right](\lambda). \tag{4}$$

avec

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right](\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{a}{a^2+\lambda^2}.$$

Comme

$$\mathcal{F}[y*f] = \mathcal{F}[y].\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[y].\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{a}{a^2+\lambda^2}\right],$$

l'équation (4) entraine

$$\mathcal{F}[y](\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{a}{a^2+2a+\lambda^2}.$$

Pour déduire la solution y, il suffit de remarque que $\mathcal{F}[y]$ peut s'écrire comme

$$\mathcal{F}[y](\lambda) = \frac{a}{c}.\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\frac{c}{c^2+\lambda^2}\right] = \frac{a}{c}.\mathcal{F}\left[e^{-c|t|}\right](\lambda)$$

avec

$$c = \sqrt{a^2+2a}.$$

Donc

$$y(t) = \frac{a}{c}e^{-c|t|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+2a}}e^{-\sqrt{a^2+2a}.|t|}.$$

■

Exercise 7 *Soit la fonction f telle que*

$$\begin{cases} 0, & t>0 \\ e^t, & t<0. \end{cases}$$

Soit (E) l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t).$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. Trouver la fonction g telle que

$$\mathcal{F}[g](\lambda) = \frac{1}{(\lambda+i)(\lambda-i)^2}.$$

3. Déterminer, en utilisant la transformation de Fourier, la solution de (E) telle que $y,\ y' \in L^1(\mathbb{R})$.

Solution.

1. Calcule de $\mathcal{F}[f]$.

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^t.e^{-\lambda t}dt = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}.\frac{1}{\lambda+i}.$$

2. On cherche la fonction g telle que

$$\mathcal{F}[g](\lambda) = \frac{1}{(\lambda+i)(\lambda-i)^2}.$$

En effet, $\mathcal{F}[g]$ peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\lambda) &= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{\lambda^2+1}-\frac{1}{(\lambda-i)^2}\right]\\ &= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{\lambda^2+1}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\lambda-i}\right)\right].\end{aligned}$$

D'après l'éxercice (1) (Série N°07) (pour $a=1$) On a

$$\frac{1}{\lambda^2+1}=\mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|}\right](\lambda).$$

De plus, en utilisant la propriété de la modulation (pour $a=2i$) on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda-i} &= \frac{1}{(\lambda-2i)+i}=\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\mathcal{F}[f](\lambda-2i)\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i}\mathcal{F}\left[e^{-2t}.f\right](\lambda)\end{aligned}$$

et par la propriété de dérivation on tire

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\lambda-i}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{i}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}\left[e^{-2t}.f\right](\lambda)=-\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left[t.e^{-2t}.f\right](\lambda).$$

Donc

$$\mathcal{F}[g](\lambda)=\frac{i}{2}\left[\mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|}\right](\lambda)-\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left[t.e^{-2t}.f\right](\lambda)\right].$$

Par conséquent

$$g(t)=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{e^{-|t|}}{2}-t.e^{-2t}.f(t)\right].$$

2. On cherche une fonction continue y vérifiant l'équation différentielle (E).

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t). \tag{E}$$

On compose l'équation (E) par l'opérateur $\mathcal{F}$ on trouve

$$\mathcal{F}[y''](\lambda)+2\mathcal{F}[y'](\lambda)+\mathcal{F}[y](\lambda)=\mathcal{F}[f](\lambda). \tag{2}$$

En appliquant les propriétés de dérivations

$$\begin{cases}\mathcal{F}[y'](\lambda)=i\lambda\mathcal{F}[y](\lambda) \text{ et}\\ \mathcal{F}[y''](\lambda)=(i\lambda)^2\mathcal{F}[y](\lambda)\end{cases}$$

l'équation (2) devient

$$-\lambda^2\mathcal{F}[y](\lambda)+2i\lambda\mathcal{F}[y](\lambda)+\mathcal{F}[y](\lambda)=\mathcal{F}[f](\lambda)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}.\frac{1}{\lambda+i}$$

ce qui donne

$$\mathcal{F}[y](\lambda)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}.\frac{1}{(\lambda+i)(\lambda-i)^2}.$$

Par conséquent

$$y(t)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}g(t)=\frac{e^{-|t|}}{4}-\frac{t}{2}.e^{-2t}.f(t).$$

■

Exercise 8 *Soit φ une fonction définie par*

$$\varphi(x)=e^{-\sqrt{2}x}.$$

Trouver la fonction f vérifiant l'équation

$$f*\varphi(x)=e^{-x^2}.$$

Solution. On applique l'opérateur $\mathcal{F}$ dans les deux cotés de l'équation $f*\varphi(x)=e^{-x^2}$ et en appliquant la propriété de l'image du produit de convolution par la transformée de Fourier on trouve

$$\mathcal{F}[f].\mathcal{F}[\varphi](\lambda)=\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](\lambda)\text{ et}$$

$$\mathcal{F}[\varphi](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\frac{2}{\lambda^2+2}$$

donc

$$\mathcal{F}[f](\lambda)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\lambda^2+2\right)\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](\lambda).$$

Pour trouver f on va écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\lambda)&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[-(i\lambda)^2\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](\lambda)+2\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](\lambda)\right]\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[-\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-x^2}\right](\lambda)+2\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](\lambda)\right]..\end{aligned}$$

Donc

$$f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-x^2}\right]+2e^{-x^2}\right]=2\sqrt{\pi}\left[1-x^2\right]e^{-x^2}.$$

■

Exercise 9 *Soit f une fonction définie par*

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l} 1/2 \ si \ |x|\leq 1 \\ 0 \ si \ \ |x|>1. \end{array}\right.$$

1. Déterminer la transformée de Fourier de f.
2.En déduire la valeur de $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}e^{-u^2/2}du$.
3.Trouver la fonction g telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,g(x-u)\,du=e^{-u^2/2}.$$

Indication : On rappelle que $\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right](\lambda)=e^{-\lambda^2/2}$ et que

$$\int_0^1 e^{-u^2/2}du=c=0.85.$$

Solution.

1. Soit $f(x)=\left\{\begin{array}{l} 1/2 \text{ si } |x|\leq 1 \\ 0 \text{ si } \ |x|>1. \end{array}\right.$

$$\mathcal{F}[f](\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}e^{-i\lambda x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

2. On déduit la valeur de $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}e^{-u^2/2}du.$
En effet,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[f](u)\,\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right](u)\,du \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}\left[f*e^{-x^2/2}\right](u)\,du \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}\left[f*e^{-x^2/2}\right](u)\,.e^{iu(0)}du\right] \\
&= 2\pi\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left[f*e^{-x^2/2}\right](0) \\
&= 2\pi\left(f*e^{-x^2/2}\right)(0) \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(0-u)\,e^{-x^2/2}du\right]
\end{aligned}$$

et comme f et $e^{-x^2/2}$ sont paires, on a

$$I=\sqrt{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}e^{-x^2/2}du=\sqrt{2\pi}\int_0^{+1}e^{-x^2/2}du.$$

Donc

$$I=\sqrt{2\pi}.c.$$

3. On cherche la fonction g vérifiant l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)g(x-u)du = e^{-x^2/2}.$$

Cette équation est équivalente à

$$\sqrt{2\pi}\,(g*g)(x) = e^{-x^2/2}.$$

Donc

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g]\,\mathcal{F}[g] = \mathcal{F}\left[e-^{x^2/2}\right] = .e^{-\lambda^2/2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\lambda) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{-\lambda^2/4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda^2/4}\right) \\
&= \sqrt[4]{2}\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](\lambda).
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{g(x) = \sqrt[4]{2}.e^{-x^2}}$$

■