
Chapitre 0

Les nombres complexes

Sommaire

0.1	L'ensemble des nombres complexes	1
0.1.1	Opérations sur les nombres complexes	2
0.1.2	Valeur absolue (ou module)	3
0.2	Représentation graphique des nombres complexes	3
0.2.1	Courbes dans le plan complexe	4
0.3	Forme polaire des nombres complexes	4
0.3.1	Formule de De Moivre	5
0.3.2	Formule d'Euler	5
0.3.3	Racines d'un nombre complexe	5
0.4	Propriétés topologiques de $\mathbb{C}$	6

0.1 L'ensemble des nombres complexes

Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$.

Réponse : Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

Définition 1

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique :

$$z = x + iy \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels,}$$

et i est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.

- Le nombre x est appelée la partie réelle de z , on note $x = \operatorname{Re}(z)$.
- Le nombre y est appelée la partie imaginaire de z , on note $y = \operatorname{Im}(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque 2

a) Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z').$$

b) Si $y = 0$ on dit que z est réel, si $x = 0$ on dit que z est un **imaginaire pur**.

c) Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z .

0.1.1 Opérations sur les nombres complexes

- Addition : $(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$.
- Soustraction : $(x + yi) - (u + vi) = (x - u) + (y - v)i$.
- Multiplication : $(x + yi)(u + vi) = xu + xvi + yui + yvi^2 = xu - yv + (xv + yu)i$.
- Division : $\frac{x + yi}{u + vi} = \frac{x + yi}{u + vi} \cdot \frac{u - vi}{u - vi} = \frac{xu - xvi + yui - yvi^2}{u^2 + v^2} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}i$.

Remarque 3

Soient z et w deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

$$(1) \overline{\bar{z}} = z \quad (2) \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \quad (3) \overline{\bar{z}} = z \quad (4) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad (5) z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i.$$

0.1.2 Valeur absolue (ou module)

Définition 4

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définie par

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple 1

$$|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5. \blacksquare$$

Si z et w sont deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

- (1) $|zw| = |z| |w|$ (2) $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$ (3) $|\bar{z}| = |z|$ (4) $z \bar{z} = |z|^2$.
 (5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (inégalité triangulaire) (6) $|z - w| \geq |z| - |w|$.

Remarque 5

On a les propriétés suivantes :

- (1) $\sqrt{x^2} = |x|$ et $x^2 = |x|^2$ si $x \in \mathbb{R}$ (2) $z^2 \neq |z|^2$ si $\text{Im}(z) \neq 0$.
 (3) $|z| = 0 \iff z = 0$ (4) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Remarque 6

Si z et w sont deux nombres complexes tels que $w \neq 0$, alors on a :

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z \bar{w}}{|w|^2}.$$

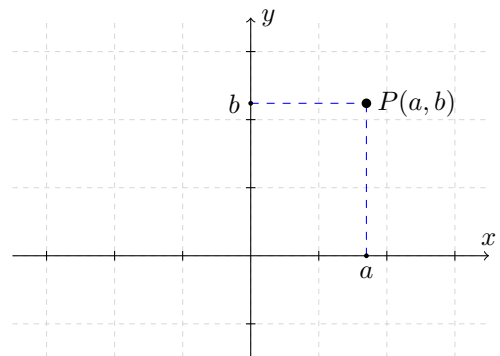
Exemple 2

$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 2i)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{-4}{5} + \frac{7}{5}i. \blacksquare$$

0.2 Représentation graphique des nombres complexes

Un nombre complexe $a + ib$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points d'un plan des xy appelé **plan complexe**.

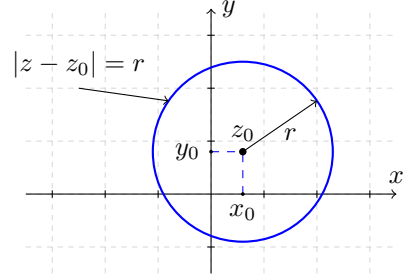
À chaque nombre complexe $z = a + ib$ correspond un point $P(a, b)$ du plan.



0.2.1 Courbes dans le plan complexe

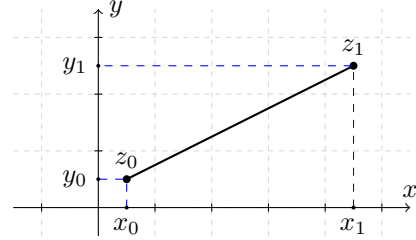
Cercle

Le cercle de rayon r et de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ est défini par l'équation $|z - z_0| = r$.



Segments

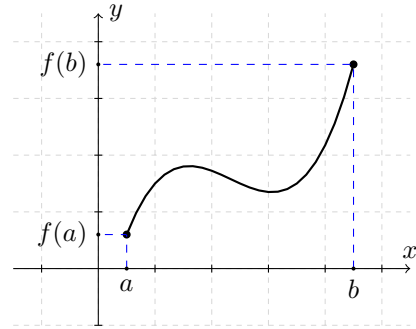
Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points $\{z \in \mathbb{C} \mid z = (1 - t)z_0 + tz_1, t \in [0, 1]\}$.



Courbes

En général, une courbe $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ où f est une fonction continue, correspond à l'ensemble de points

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = x + if(x) = (x, f(x)), x \in [a, b]\}.$$



0.3 Forme polaire des nombres complexes

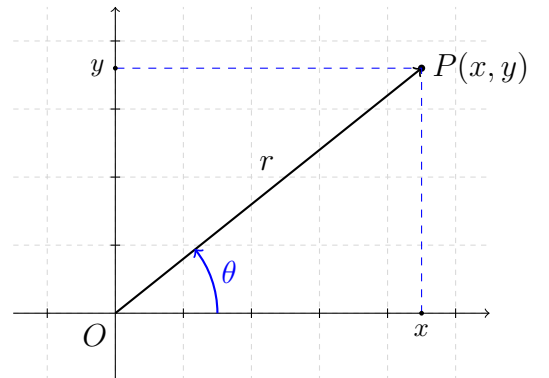
Si $P(x, y)$ désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe $z = x + iy$, nous voyons que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ est le module ou la valeur absolue de $z = x + iy$, et θ est appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x + iy$, noté $\arg z$, est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le demi-axe positif Ox .

On en tire

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$



qui est appelée la **forme polaire** ou **forme trigonométrique** du nombre complexe z .
Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors l'angle θ est appelé l'**argument principal**, noté par $\text{Arg } \theta$. On a

$$\arg z = \text{Arg } \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

0.3.1 Formule de De Moivre

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) \}, \quad (0.1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2) \}.$$

Une généralisation de (0.1) conduit à

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \{ \cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \},$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \{ r (\cos \theta + i \sin \theta) \}^n = r^n \{ \cos (n\theta) + i \sin (n\theta) \},$$

qui est appelée formule de De Moivre.

0.3.2 Formule d'Euler

En supposant que le développement en série entière $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ de l'analyse élémentaire conserve un sens quand $x = i\theta$, nous parvenons au résultat $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $e = 2,71828\dots$, qui est appelé formule d'Euler. Avec ces notations, la formule de De Moivre se réduit à $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

0.3.3 Racines d'un nombre complexe

Un nombre z est appelé racine n -ième d'un nombre complexe $a + ib$ si $z^n = a + ib$, et nous écrivons $z = (a + ib)^{\frac{1}{n}}$ ou $z = \sqrt[n]{a + ib}$. D'après la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} z &= (a + ib)^{\frac{1}{n}} = \{ r (\cos \theta + i \sin \theta) \}^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

D'où il résulte qu'il y a n racines n -ièmes différentes de $a + ib$ pourvu que $a + ib \neq 0$.

Exemple 3

Calculer les racines quatrièmes de 1.

On a $\sqrt[4]{1} = \{\cos(0 + 2k\pi) + i \sin(0 + 2k\pi)\}^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Pour $k = 0$, $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$; $k = 1$, $z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$;

$k = 2$, $z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$; $k = 3$, $z_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$. ■

Exemple 4

Calculer $\sqrt[3]{1-i}$.

On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1-i} &= (1-i)^{\frac{1}{3}} = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{2}^{\frac{1}{3}} \left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right\} \\ &= \sqrt[6]{2} \left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, $z_0 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) \right\}$; $k = 1$, $z_1 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right\}$;

$k = 2$, $z_2 = \sqrt[6]{2} \left\{ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right\}$. ■

0.4 Propriétés topologiques de $\mathbb{C}$

Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est la norme euclidienne du vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Cette norme induit sur $\mathbb{R}^2$ une topologie qui se transporte sans difficulté pour faire de $\mathbb{C}$ un espace topologique. Tous les théorèmes usuels de topologie obtenus en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ s'appliquent sans modification.

Rappelons ici, quelques définitions et propriétés topologiques fondamentales. Nous renvoyons au cours de topologie pour les démonstrations.

- La distance entre deux nombres complexes z_1 et z_2 est $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.
- Pour tous z_1, z_2 et z_3 , on a $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$.
- Une suite $\{z_n\}$ de nombres complexes converge vers un nombre complexe z si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - z| = 0.$$

- En vertu des inégalités $\sup\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z.$$

En conséquence, les règles de calcul concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient restent valables.

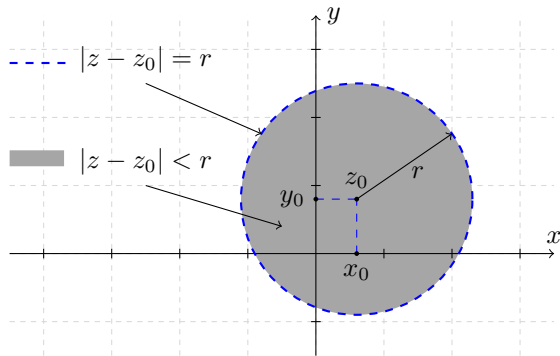
Notations. Soit r un réel positif et z_0 dans $\mathbb{C}$.

On note $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r\}$.

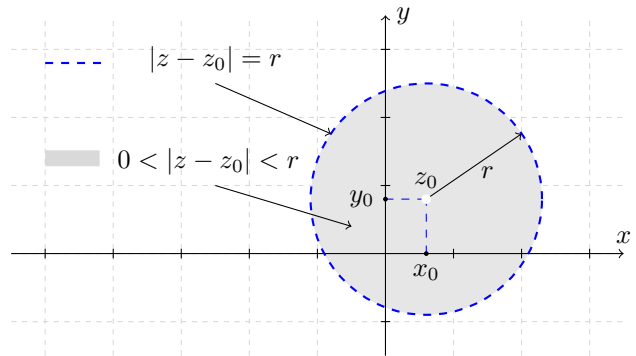
$D_r(z_0)$ est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r .

On note $\tilde{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < r\}$.

$\tilde{D}_r(z_0)$ est appelé disque ouvert pointé de z_0 .



Disque ouvert de centre z_0



Disque ouvert pointé de z_0

- **Ensembles ouverts.** Un ensemble E de $\mathbb{C}$ est dit ouvert si chaque point z de E peut être entouré par un disque ouvert centré en ce point et tous les points du disque sont contenus dans E .
- **Voisinages.** Une partie V de $\mathbb{C}$ est un voisinage de z_0 si V contient un disque ouvert $D_r(z_0)$.
- **Points limites.** Un point z_0 est appelé point limite ou point d'accumulation d'un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ si tout disque ouvert $D_r(z_0)$ contient des points de $E \setminus \{z_0\}$.
- **Ensembles fermés.** Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit fermé si son complémentaire $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ est ouvert. Un ensemble fermé contient tous ses points d'accumulation.
- **Ensembles bornés.** Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit borné si l'on peut trouver une constante $M > 0$ telle que $|z| < M$ pour tout point z de E .
- **Ensembles compacts.** Un ensemble qui est à la fois fermé et borné est appelé compact.
- **Intérieur et points frontières.** Un point z_0 est appelé point intérieur d'un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ si l'on peut trouver un disque ouvert $D_r(z_0)$ dont tous les points appartiennent à E .

E . Si tout disque ouvert $D_r(z_0)$ contient des points appartenant à E et aussi des points n'appartenant pas à E , alors z_0 est dit point frontière.

- **Ensembles connexes.** Un ensemble ouvert $E \subset \mathbb{C}$ est dit connexe si deux points quelconques de E peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites dont tous les points appartiennent à E .

Les deux théorèmes suivants sont importants dans la théorie des ensembles de points.

Théorème 7 (de Bolzano-Weierstrass)

Un ensemble E de $\mathbb{C}$ est compact si et seulement si toute suite $\{z_n\}$ de points de E contient une sous-suite $\{z_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ qui converge vers un point de E .

Théorème 8 (de Heine-Borel)

Un ensemble E de $\mathbb{C}$ est compact si et seulement si tout recouvrement de E par des ensembles ouverts $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ contient un sous-recouvrement fini.