Chapitre 1

Fonctions complexes

Sommaire

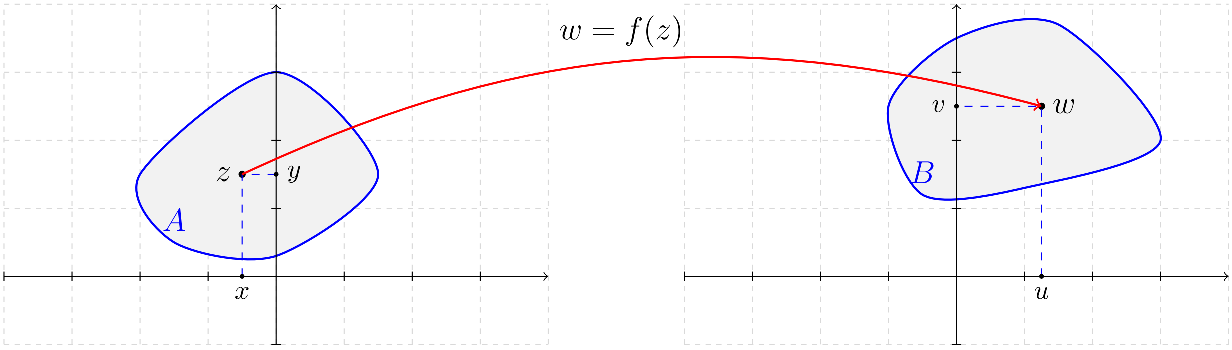
1.1 Fonctions complexes

Définition 9

Soient A et B deux ensembles non vides dans $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in B$, on dit que w est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ ou

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ z &\longmapsto w = f(z). \end{aligned}$$

La fonction $w = f(z)$ définie une correspondance entre deux plans complexes.



Exemple 5

$z \mapsto w = f(z) = z^2$. Par exemple, la valeur de f en $z = 2i$ est $f(2i) = (2i)^2 = -4$. ∎

1.1.1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 10

- Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z on dira que w est une fonction **uniforme** de z ou que $f(z)$ est uniforme.
- Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z, on dira que w est une fonction **multiforme** de z.

Remarque 11

- Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une **branche** de la fonction.
- On choisit habituellement un élément comme **branche principale,** ainsi est appelée **détermination principale**.

Exemple 6

Si $w = f(z) = z^2$, à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w. Donc $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z. ■

Exemple 7

Si l'on considère la fonction $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w. Donc $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme de z. ■

1.1.2 Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w, ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f.

Exemple 8

La fonction $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est la fonction inverse de la fonction $f(z) = z^2$. ■

1.1.3 Transformations

Définition 12

Si $z = x + iy$, on peut écrire $f(z)$ comme $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = w$. Les fonctions u et v sont appelées, respectivement, **partie réelle** et **partie imaginaire** de f. On note

$$u = \mathrm{Re}(f) \quad \text{et } v = \mathrm{Im}(f).$$

Nous dirons que le point $P(x, y)$ dans le plan de la variable z, est transformé en $P'(u, v)$ du plan de la variable w, par cette transformation et appellerons P' l'image de P.
L'ensemble des équations $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$ [ou ce qui est équivalent, $w = f(z)$] est appelé une **transformation**.

Nous appellerons (x, y) les coordonnées rectangulaires correspondant au point P du plan de la variable z et (u, v) les coordonnées curvilignes de P.

Exemple 9

$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3yx^2 - y^3)\,i.$

Les parties réelle et imaginaire sont $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ et $v(x, y) = 3yx^2 - y^3$. ■

1.1.4 Limites

Soit f une fonction complexe à une variable complexe z, définie dans un voisinage de $z = z_0$ sauf peut-être en $z = z_0$, c'est-à-dire définie dans un disque ouvert pointé de z_0.

Définition 13

On dit que f admet une limite l quand z tend vers $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

On dit également que $f(z)$ tend vers l quand z tend vers z_0 et on écrit $f(z) \to l$ quand $z \to z_0$. La limite est indépendante de la manière dont z tend vers z_0.

Exemple 10

Soit $f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq i \\ 0 & \text{si } z = i \end{cases}$.

Alors quand z tend vers $z_0 = i$, $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$ et on écrit $\lim\limits_{z \to i} f(z) = -1$.

Pour le prouver, on doit montrer que $\varepsilon > 0$ étant donné on peut trouver δ (dépendant en général de ε) tel que $|z^2 - i^2| < \varepsilon$ pourvu que $0 < |z - i| < \delta$.

Si $\delta \leq 1$, alors $0 < |z - i| < \delta$ implique que

$$\left|z^2 - i^2\right| = |z - i|\,|z + i| < \delta\,|z - i + 2i| \leq \delta\,(|z - i| + 2) \leq \delta\,(1 + 2) = 3\delta.$$

Choisissant $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$, nous avons alors $|z^2 - i^2| < \varepsilon$ dès que $0 < |z - i| < \delta$, ce qui établit le résultat demandé.

On notera que la limite de $f(z)$ quand $z \to z_0$ n'a rien à voir avec la valeur de $f(z)$ en i. ▪

Les propriétés concernant les opérations algébriques (somme, produit, quotient) sur les limites des fonctions de la variable complexe, sont analogues à celles des fonctions de la variable réelle.

Proposition 14

Posons $l = a + ib$ et $f = u + iv$ où a, b, u et v sont des réels, alors

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \left\{ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a \text{ et } \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b \right\}.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition découle directement de l'inégalité suivante : $|f(z) - l| = |u(x,y) - a + (v(x,y) - b)\,i| \leq |u(x,y) - a| + |v(x,y) - b|$. ■

Proposition 15

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique.

Démonstration. On doit montrer que si $\lim_{z\to z_0} f(z) = l_1$ et $\lim_{z\to z_0} f(z) = l_2$, alors $l_1 = l_2$.
Par hypothèse quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|f(z) - l_1| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ quand } 0 < |z - z_0| < \delta$$

$$\text{et} \quad |f(z) - l_2| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ quand } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

D'où

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(z) + f(z) - l_2| \leq |l_1 - f(z)| + |f(z) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

i.e. $|l_1 - l_2|$ est plus petit que tout nombre positif ε (arbitrairement petit) et doit donc être nul. Alors $l_1 = l_2$. ■

Exemple 11

Montrer que $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas.
Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.
Si $z \to 0$ le long de l'axe des x, alors $y = 0$ et $z = x + iy = x$, $\overline{z} = x - iy = x$; la limite cherchée est donc $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$.
Si $z \to 0$ le long de l'axe des y, alors $x = 0$ et $z = x + iy = iy$, $\overline{z} = x - iy = -iy$; la limite cherchée est $\lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$.
Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \to 0$, il n'y a pas donc de limite. ▪

Remarque 16

Si la fonction f est multiforme la limite de f quand $z \to z_0$ peut dépendre de la branche choisie.

Point à l'infini

Par la transformation $w = \frac{1}{z}$, le point $z = 0$ est transformé en $w = \infty$ appelé point à l'infini du plan de la variable w. De la même façon nous noterons par $z = \infty$ le point à l'infini du plan de la variable z. Pour étudier le comportement de $f(z)$ à $z = \infty$, il suffira de poser $z = \frac{1}{w}$ et d'étudier le comportement de $f\left(\frac{1}{w}\right)$ à $w = 0$.

1.1.5 Continuité

Définition 17

Soit f une fonction complexe uniforme définie dans un voisinage de $z = z_0$ et en z_0. La fonction f est dite continue en z_0 si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z)$.

Une fonction f est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région.

Notons que pour que f soit continue en $z = z_0$, les trois conditions suivantes doivent être simultanément remplies.

1) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ doit exister. **2)** $f(z_0)$ doit exister, *i.e.* $f(z)$ est définie en z_0. **3)** $l = f(z_0)$.

Exemple 12

Soit f la fonction définie par $f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq i \\ 0 & \text{si } z = i \end{cases}$.

Quand z tend vers i, $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$, *i.e.* $\lim\limits_{z \to i} f(z) = i^2 = -1$. Mais $f(i) = 0$. Donc $\lim\limits_{z \to i} f(z) \neq f(i)$ et la fonction n'est pas continue en $z = i$. ∎

Remarque 18

La fonction $f = u + iv$ est continue dans un domaine si et seulement si la partie réelle u et la partie imaginaire v sont continues.

Les propriétés des fonctions continues de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ sont analogues à celles des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. La plupart de ces dernières admettent une extension simple à des fonctions de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$.

1.2 Fonctions élémentaires

1.2.1 Les fonctions polynômiales

Les fonctions polynômiales sont définies par $f(z) = P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, où $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, ... a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le **degré** du polynôme $P(z)$.

1.2.2 Les fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où P et Q sont des polynômes. Le cas particulier $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $ad - bc \neq 0$ est appelé transformation **homographique**.

1.2.3 Les fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont définies par

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens, $e \simeq 2,718$. Si a est réel et positif on définit

$$a^z = e^{z \operatorname{Log} a}.$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelles. Ainsi par exemple $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$.

1.2.4 Fonctions trigonométriques

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou **circulaires**, $\sin z$, $\cos z$, etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$, ...

Remarque 19

Contrairement au cas de la variable réelle, les fonctions de la variable complexe $z \mapsto \sin z$ et $z \mapsto \cos z$ ne sont pas bornées car $\lim_{|y| \to +\infty} |\sin(i|y|)| = \lim_{|y| \to +\infty} |\cos(i|y|)| = +\infty$.

1.2.5 Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\mathrm{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\mathrm{sech}z = \frac{1}{\mathrm{ch}z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \qquad \mathrm{csch}z = \frac{1}{\mathrm{sh}z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

$$\mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \mathrm{coth}z = \frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :
$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$, $\mathrm{sh}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{sh}\, z_1 \,\mathrm{ch}\, z_2 + \mathrm{ch}\, z_1 \,\mathrm{sh}\, z_2$, ...

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}z \qquad \cos(iz) = \mathrm{ch}z \qquad \mathrm{tg}\,(iz) = i\mathrm{th}z$$

$$\mathrm{sh}\,(iz) = i\sin z \qquad \mathrm{ch}\,(iz) = \cos z \qquad \mathrm{th}\,(iz) = i\,\mathrm{tg}z.$$

1.2.6 Fonctions logarithmiques

La fonction $f(z) = \mathrm{Log}\, z$, $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^z.

$$w = \mathrm{Log}\, z \Leftrightarrow z = e^w.$$

Question : Pour un nombre complexe z donné, le nombre w qui vérifie $z = e^w$ est-il unique?
Réponse : Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$. On a

$$\begin{aligned} z = e^w \quad &\Leftrightarrow \quad x + iy = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i\sin v) \\ &\Leftrightarrow \quad \{|z| = e^u \ \text{ et } \ v = \mathrm{Arg}\, z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

D'où w n'est pas unique car

$$w = \mathrm{Log}\, z = u + iv = \ln|z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 20

La fonction $\operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} z &= \ln|z| + i \arg z \\ &= \ln|z| + i\left(\operatorname{Arg} z + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}, \text{ où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.\end{aligned}$$

Remarque 21

La détermination **principale** ou valeur principale de $\operatorname{Log} z$ est souvent définie par

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \text{ où } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi \text{ ou } 0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi.$$

Exemple 13

$\operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour la détermination principale, $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$. ▪

Les propriétés suivantes sont vérifiées (modulo$[2\pi i]$) :

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}(z^n) = n \operatorname{Log} z.$$

Exemple 14

Utilisons la détermination principale du logarithme :

$$\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i \operatorname{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i,$$

$$\operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = \pi i,$$

$$\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(-1-i) = \ln|-1-i| + i \operatorname{Arg}(-1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4} i.$$

On remarque que $\operatorname{Log}((1+i)(-1)) = \operatorname{Log}(1+i) + \operatorname{Log}(-1) - 2\pi i$. ▪

1.2.7 La fonction z^α

La fonction z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$, est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}.$$

De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données, de z, on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \operatorname{Log} f(z)}.$$

En général de telles fonctions sont multiformes.

Exemple 15

$i^{-i} = e^{-i \operatorname{Log} i} = e^{-i(\ln|i| + i \arg(i))} = e^{-i^2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

La détermination principale est $i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$. ∎

Remarque 22

On a $(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ dans le cas général si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Exemple 16

On a $\left((-i)^2\right)^i = (-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(\ln|-1| + i \arg(-1))} = e^{i^2(\pi+2k\pi)} = e^{-\pi-2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $(-i)^{2i} = e^{2i \operatorname{Log}(-i)} = e^{2i(\ln|-i| + i \arg(-i))} = e^{2i^2\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{\pi-4k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. ∎

1.2.8 Fonctions trigonométriques inverses

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad \operatorname{Arcos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \operatorname{Arcotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{z+i}{z-i}\right).$$

1.2.9 Fonctions hyperboliques inverses

$$\operatorname{Argsh} z = \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \qquad \operatorname{Argch} z = \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \operatorname{Argcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$