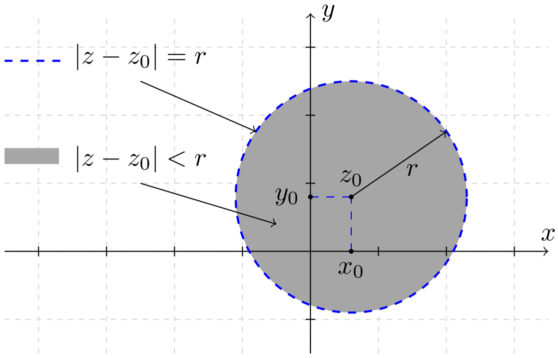
Chapitre 2

Dérivation dans le domaine complexe

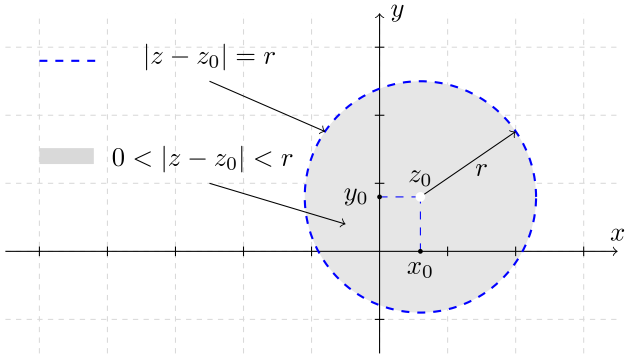
Sommaire

2.1 Domaines dans le plan complexe

Rappelons qu'on note $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r,\ r > 0\}$ un disque ouvert de centre z_0 et de rayon r et $\tilde{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < r,\ r > 0\}$ un disque ouvert pointé de z_0.



Disque ouvert de centre z_0



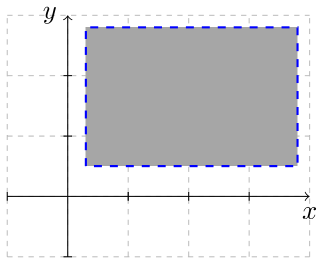
Disque ouvert pointé de z_0

Définition 23

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit **ouvert** si chaque point z_0 de E peut être entouré par un disque ouvert $D_r(z_0)$ tel que tous les points du disque sont contenus dans E.

Exemple 17

Un rectangle sans ses arêtes est un ensemble ouvert.

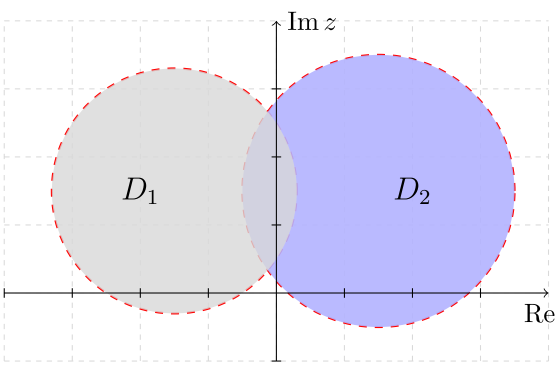


■

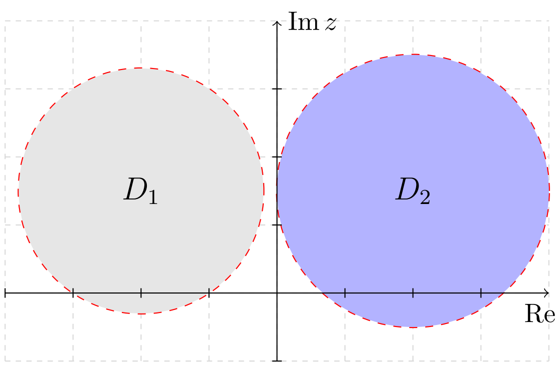
Définition 24

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit **connexe** s'il n'admet aucune partition par deux ouvert non vides (E n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints).

Intuitivement, un ensemble est connexe s'il est fait d'un seul morceau.



L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ est connexe



L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ n'est pas connexe

Définition 25

Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit **connexe par lignes polygonales** si deux points quelconques de E peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites (i.e. un contour polygonal) dont tous les points appartiennent à E.

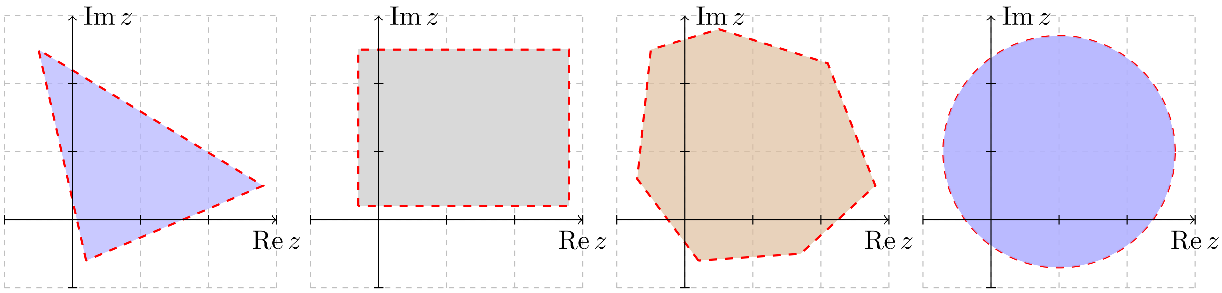
Il peut être démontré qu'un ensemble connexe par lignes polygonales est connexe. L'inverse, cependant, est fausse en général. Par exemple, l'ensemble des points $z = x + iy$ avec $y = x^2$ est clairement connexe mais n'est connexe par lignes polygonales puisque l'ensemble ne contient pas de segments de ligne droite. D'autre part, **pour les ensembles ouverts, la connexité et la connexité par lignes polygonales sont équivalentes**.

Définition 26

Un **domaine** dans le plan complexe est un ensemble connexe ouvert.

Exemple 18

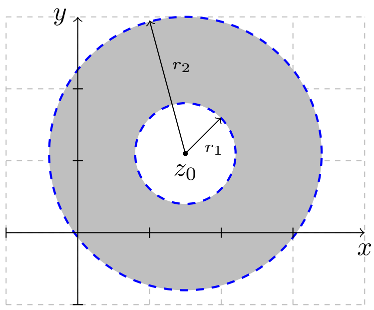
Les triangles, les rectangles, les polygones et les disques ouverts sont des domaines



■

Exemple 19

La couronne de centre z_0 et de rayons r_1 et r_2 est un domaine.



■

2.2 Fonctions holomorphes

Malgré la possibilité de considérer un nombre complexe z comme un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mais il y avait une différence essentielle entre la fonction considérée comme une fonction de la variable complexe z ou des variables réelles x et y. Cette différence est particulièrement apparaît dans la dérivation.

2.2.1 Dérivées

Par analogie avec le cas des fonctions réelles, on définit la dérivée d'une fonction complexe f de la variable complexe z.

Définition 27

Soit D un domaine dans le plan complexe. Soit f une fonction uniforme de D dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in D$.

La dérivée de f en z_0 est définie par $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ pourvu que cette limite existe. Dans ce cas on dit que f est dérivable en z_0.

On utilise souvent l'écriture analogue $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.

Définition 28

Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D, alors f est dite **holomorphe** dans D.

Une fonction f est dite **holomorphe** en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0.

Exemple 20

La fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ∎

Exemple 21

La fonction $z \mapsto f(z) = \mathrm{Re}(z)$ n'est pas dérivable en aucun point. ∎

Proposition 29

Si la fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dérivable au point $z_0 \in D$ alors elle est continue au point z_0.

Démonstration. Remarquer que pour tout nombre complexe $z \in D \setminus \{z_0\}$ on peut écrire

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0).$$

Comme $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe par hypothèse, on aura

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

Donc $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$ ou $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, ce qui montre que f est continue en z_0. ∎

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie, en effet, la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \overline{z}$ est continue en tout $z_0 \in \mathbb{C}$, mais elle n'est pas dérivable en aucun point.

Définition 30

Une fonction f est dite **entière** si elle est dérivable dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

Exemple 22

Les polynômes $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$, les fonctions $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \sin z$ et $z \mapsto \cos z$ sont des fonctions entières. ▪

2.2.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$ et $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$.

Proposition 31

Si f est holomorphe dans D, alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ existent en tout point de D, et vérifient les **équations de Cauchy-Riemann**

$$\boxed{\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.}} \tag{2.1}$$

Démonstration. Puisque $f = u + iv$ est holomorphe, en tout point $z_0 = x_0 + iy_0$ de D, on a

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

En choisissant $y = y_0, x \to x_0$, on obtient

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y_0) - v(x_0,y_0))}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),$$

et en choisissant $x = x_0, y \to y_0$, on obtient

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x_0,y) - v(x_0,y_0))}{i(y - y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Alors $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$. On en déduit que u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann. ■

Il est légitime de se demander si la réciproque de cette proposition est vraie ou fausse. La réponse est dans la proposition suivante.

Proposition 32

Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ **continues** dans D, et vérifient les **équations de Cauchy-Riemann**, alors la fonction $z \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans D.

Démonstration. Soit $z = x+iy \in D$ et soit $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}^*$ tel que $z+h \in D$. Les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ étant supposées continues, alors en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1, on obtient

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y) + i\left[v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)\right] \\ &= h_1 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + ih_1 \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + ih_2 \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(h_1 + ih_2), \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 \to 0$ et $\varepsilon_2 \to 0$ quand $h_1 \to 0$ et $h_2 \to 0$.

D'après les équations de Cauchy-Riemann, on aura

$$f(z+h) - f(z) = (h_1 + ih_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i(h_1 + ih_2) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(h_1 + ih_2).$$

D'où en divisant par $h = h_1 + ih_2$ et faisant tendre h vers 0, on voit que

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \qquad \blacksquare$$

Ces conditions peuvent paraître très fortes, mais l'existence des dérivées partielles en un point ne suffit pas pour l'existence de la dérivée comme dans l'exemple suivant.

Exemple 23

Soit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{z^4}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

La dérivée en $z = 0$ suivant la droite $y = x$ n'est pas définie. En effet, on a $(x + ix)^4 = x^4(1+i)^4 = -4x^4$, alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+ix) - f(0)}{x + ix} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}} - 0}{x(1+i)} = \frac{1}{1+i} \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}}}{x} = \infty.$$

Cependant, les dérivées partielles de u et v en $(0, 0)$ sont toutes égales à zéro. Par exemple, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{u(x, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\frac{-1}{x^4}}}{x} = 0.$ ▪

Corollaire 33

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$. Si $f = u + iv$ est holomorphe dans D, alors la dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad z \in D.$$

Exemple 24

On considère la fonction définie par $f(z) = z^2$. On a $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, d'où $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La fonction f est donc holomorphe dans $\mathbb{C}$, et $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z$. ∎

Remarque 34

1. En multipliant la deuxième condition de (2.1) par i et l'ajouter à la première, les conditions de Cauchy-Riemann peuvent être reformulées comme

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.}$$

2. En notant que $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrites sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.}$$

   Les coordonnées $(z, \overline{z})$ qui déterminent un point sont appelées coordonnées complexes conjuguées, ou plus brièvement coordonnées conjuguées.

Exemple 25

Soit la fonction définie par $f(z) = z^2 + z\operatorname{Re} z$. On a $\operatorname{Re} z = x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, alors $f(z) = z^2 + z\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{3}{2}z^2 + \dfrac{1}{2}z\overline{z}$, et donc $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}z \neq 0$. D'où la fonction f ne peut pas être holomorphe en aucun domaine. ∎

Exercice 1

Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Proposition 35

Une fonction f holomorphe sur un domaine (ouvert connexe) $D \subset \mathbb{C}$, de dérivée identiquement nulle, est constante dans ce domaine.

Démonstration. Soit a fixé dans D et soit b dans D. Comme D est un ouvert connexe, il existe un chemin formé de segments de droites (i.e. une ligne polygonale) qui joint a et b. Soient z_1 et z_2 les extrémités d'un côté de cette ligne polygonale. Le segment qui joint z_1 et z_2 est

$$[z_1, z_2] = \{z(t) \in \mathbb{C} \ / \ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \ t \in [0,1]\}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = f(z_1 + t(z_2 - z_1))$ est alors dérivable sur $[0,1]$ avec

$$\varphi'(t) = (z_2 - z_1) f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) = 0$$

et en conséquence φ est constante sur $[0,1]$. On a donc f constante pour tout z dans le segment $[z_1, z_2]$. De même manière on démontre que la fonction f est constante sur les autres côtés de cette ligne polygonale avec $f(a) = f(b)$. Comme b est arbitraire dans D il en résulte que f est constante sur le domaine D entier, qui est le résultat demandé. ■

De manière plus générale si f est holomorphe sur un ouvert D de dérivée identiquement nulle, la fonction f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert D.

Dérivées d'ordre supérieur

Si f est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, sa dérivée est notée f'. Si f' est holomorphe également dans le même domaine, sa dérivée est notée f''. De la même façon la dérivée $n^{ième}$ de f sera notée $f^{(n)}$.

Si f ne contient pas le terme $\overline{z}$, il en est de même pour sa dérivée. Donc d'après la condition de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, la fonction f' est aussi dérivable. D'où le résultat très important.

Proposition 36

Si f est holomorphe dans un domaine D, alors $f', f'', ...$ sont également holomorphes dans D, *i.e.* les dérivées de tous ordres existent dans D.
On n'a pas un résultat analogue pour les fonctions réelles.

2.2.3 Fonctions harmoniques

Une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, (on note $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$), si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ existent et continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 37

Soit u une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. On dit que u est **harmonique** si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pour tout } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Notation. La fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est notée Δu et est appelée **laplacien** de u. ■

Exemple 26

Soit la fonction u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u(x, y) = e^y \cos x$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^y \sin x, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \cos x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y \cos x, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \cos x.$$

La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ et on a $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \cos x2 + e^y \cos x = 0$, d'où la fonction u est harmonique. ■

Proposition 38

Soit $z \mapsto f(z) = u(x, y) + iu(x, y)$ une fonction holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Si les deux fonctions réelles u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, alors elles sont harmoniques dans D.

Démonstration. Notons que puisque $f(z) = u(x, y) + iu(x, y)$ est holomorphe sur D les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann dans D. i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \text{pour tous } x + iy \in D.$$

Ainsi, comme les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, on pourra écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

D'où $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Donc, la partie réelle u et la partie imaginaire v de f sont harmoniques dans D. ■

Exemple 27

On reprend l'exemple $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ où $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Alors $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$ et $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$. D'où les fonctions u et v sont harmoniques. ▪

Noter que si f est holomorphe dans un domaine D, toutes ses dérivées existent et sont continues dans D. Les restrictions apportées ci-dessus sur u et v qu'elles soient de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, ne sont donc pas nécessaires.

Définition 39

Soit u une fonction harmonique dans $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors une fonction v est dite **harmonique conjuguée** de u si les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

Proposition 40

Soit u une fonction harmonique dans $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors il existe une fonction f holomorphe de $A \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\operatorname{Re} f = u$. La fonction f est unique à une constante près.

Démonstration. Pour la démonstration voir par exemple [3]. ■

Exemple 28

Soit la fonction définie par $u(x,y) = x^2 - y^2 + x,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Trouver une fonction v pour que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Alors $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

Pour trouver une fonction v pour que $f = u + iv$ soit holomorphe, on utilise les conditions de Cauchy-Riemann. Ces conditions s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y. \tag{2.3}$$

En intégrant l'équation (2.2) par rapport à y, il vient

$$v = 2xy + y + C_1(x), \tag{2.4}$$

où $C_1(x)$ est une fonction réelle de x.

Par substitution de (2.4) dans (2.3) on obtient

$$2y + \frac{d}{dx}C_1(x) = 2y \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}C_1(x) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1(x) = c,$$

où c désigne une constante dans $\mathbb{R}$. D'où de (2.4), $v = 2xy + y + c$. ∎

2.2.4 Règles de dérivation

Les règles de dérivation concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions réelles.

Les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

Exemple 29
$\dfrac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$, $\dfrac{d\sin z}{dz} = \cos z$, $\dfrac{de^z}{dz} = e^z, ...$ ∎

2.2.5 Règle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine contenant le point z_0 et supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors la règle de L'Hôpital permet d'affirmer que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Exemple 30
$\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^6+1}{z^2+1} = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{6z^5}{2z} = 3i^4 = 3.$ ∎

2.2.6 Points singuliers

Définition 41

Un point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un **point singulier** ou une singularité de f.

Définition 42

Le point $z = z_0$ est appelé **singularité isolée**, ou point singulier isolé de f, si l'on peut déterminer $\delta > 0$ tel que le disque $|z - z_0| \leq \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0. Si l'on ne peut trouver une telle valeur δ, on dit que z_0 est une **singularité non isolée**.

Exemple 31

La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ a des singularités en $z_k = \dfrac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$ et en $z_0 = 0$.
Comme nous pouvons entourer chacune des singularités $z_k = \dfrac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$ par un cercle de rayon δ_k n'en contenant pas d'autre singularités, on en déduit qu'elles sont isolées.
De plus comme tout cercle de rayon δ centré en $z_0 = 0$ contient d'autres singularités que $z_0 = 0$, on en déduit que $z_0 = 0$ est une singularité non isolée. ■

Il existe des types variés de singularités.

Singularités apparentes

Le point singulier z_0 est appelé singularité **apparente** de f si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe.

Exemple 32

Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ puisque $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$. ■

Pôles

Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, alors z_0 est appelé un **pôle d'ordre** n. Si $n = 1$, z_0 est appelé un **pôle simple**.

Exemple 33

La fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{3z - 1}{(z-1)^2 (z+4)}$ a un pôle double en $z = 1$ et un pôle simple en $z = -4$.
■

Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, où $f(z_0) \neq 0$ et n est un entier positif, $z = z_0$ est appelé un zéro d'ordre n de $z \mapsto g(z)$. Si $n = 1$ on dit que z_0 est un zéro simple. Dans un tel cas z_0 est un pôle d'ordre n de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{g(z)}$.

Points de branchement

Soit z_0 un point singulier isolé de f. Le point z_0 est un **point de branchement** lorsque l'image par f d'au moins d'une courbe fermée entourant z_0 est une courbe non fermée. Le point est dit d'ordre n s'il faut au plus n tours autour de z_0 pour refermer la courbe image. Si la courbe ne se referme jamais quel que soit le nombre de tours effectués autour de z_0, on dit que le point de branchement est transcendant ou logarithmique.

Exemple 34

La fonction $z \mapsto f(z) = \sqrt{z-3}$ a un point de branchement en $z = 3$. ■

Exemple 35

La fonction $z \mapsto f(z) = \operatorname{Log}(z^2 + z - 2)$ a un point de branchement pour les valeurs de z telles que $z^2 + z - 2 = 0$, i.e. en $z = 1$ et $z = -2$. ■

Singularités essentielles

Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée **singularité essentielle**.

Exemple 36

La fonction $z \mapsto f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ a une singularité essentielle en $z = 1$. ■

Singularités à l'infini

La nature d'une singularité de $z \mapsto f(z)$ à $z = \infty$ [le point à l'infini] est la même que celle de $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right)$ à $w = 0$.

Exemple 37

La fonction $z \mapsto f(z) = z^3$ a un pôle triple à $z = \infty$ car $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$ a un pôle triple en $z = 0$.

■

On verra plus tard comment classer les singularités à l'aide des séries.