Chapitre 4

Fonctions analytiques

Sommaire

Après quelques rappels et compléments sur les séries de fonctions dans $\mathbb{C}$, nous pourrons enfin donner dans la section suivante le résultat fondamental de ce chapitre.

4.1 Séries de fonctions

4.1.1 Généralités

À partir d'une suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, nous formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z) = \sum_{k=0}^{n} u_k(z)$$

où $S_n(z)$ est appelée la $n^{ième}$ **somme partielle**, qui est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$.

La suite $\{S_n(z)\}$ est représentée par

$$u_0(z) + u_1(z) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$$

appelée **série infinie** de terme général $u_n(z)$. Si $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite **convergente** et $S(z)$ est sa somme ; dans le cas contraire la série est dite **divergente**.

Proposition 59

Une condition nécessaire pour que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge est que $\lim_{n\to+\infty} u_n(z) = 0$. Cependant cette condition n'est pas suffisante.

Démonstration. Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge, montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n(z) = 0$.
Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) = \lim_{n\to+\infty} S_n(z) = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}(z) = S(z)$. On a

$$S_n(z) - S_{n-1}(z) = u_0(z) + \cdots + u_{n-1}(z) + u_n(z) - (u_0(z) + \cdots + u_{n-1}(z)) = u_n(z), \text{ et}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(z) = \lim_{n\to+\infty} (S_n(z) - S_{n-1}(z)) = \lim_{n\to+\infty} S_n(z) - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}(z) = S(z) - S(z) = 0.$$

La série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente bien qu'elle vérifie $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. ■

Proposition 60

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + ib_n)$ converge, a_n et b_n étant réels, est que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergent.

Domaine de convergence

Définition 61

- On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge en z_0 si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z_0)$ converge.
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dite **simplement convergente** sur $U \subset \mathbb{C}$ si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge en tout z dans U.
- **Domaine de convergence** de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est

$$D = \left\{ z \in U \text{ tel que } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \text{ converge} \right\}.$$

Le domaine de convergence est souvent appelé domaine de définition.

Convergence absolue

Définition 62

Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est dite **absolument convergente** si la série des valeurs absolues, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$, converge.

Proposition 63

Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.
En d'autres termes : $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge.

Démonstration. Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge, montrons que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge.
Soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = |u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n|$. Alors

$$S_n + T_n = u_0 + |u_0| + \cdots + u_n + |u_n| \leq 2|u_0| + \cdots + 2|u_n| = 2T_n.$$

Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge et que $u_n(z) + |u_n(z)| \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\{S_n(z) + T_n(z)\}$ est une suite bornée monotone croissante et donc $\lim_{n\to+\infty} (S_n(z) + T_n(z))$ existe. Comme $\lim_{n\to+\infty} T_n(z)$ existe [car par hypothèse la série est absolument convergente], alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(z) = \lim_{n\to+\infty} (S_n(z) + T_n(z) - T_n(z)) = \lim_{n\to+\infty} (S_n(z) + T_n(z)) - \lim_{n\to+\infty} T_n(z),$$

existe également ce qui démontre la proposition. ■

Définition 64

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge mais $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|$ ne converge pas, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est dite **semi convergente**.

Convergence uniforme

Définition 65

On dit qu'une suite de fonctions $\{u_n\}$ **converge uniformément** vers u sur $D \subset \mathbb{C}$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{z\in D} |u_n(z) - u(z)| \right) = 0.$$

Définition 66

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série de fonctions **converge simplement** vers S sur $D \subset \mathbb{C}$ et $\{S_n\}$ la suite des sommes partielles.

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + ... + u_n(z) = \sum_{k=0}^{n} u_k(z).$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ **converge uniformément** vers S sur D si la suite $\{S_n\}$ converge uniformément vers S dans D.

Théorème 67

La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue, i.e. si u_n est continue dans $D \subset \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est uniformément convergente dans D, alors $S(z)$ est continue dans D.

Démonstration. Si $S_n(z) = u_0(z) + ... + u_n(z) = \sum_{k=0}^{n} u_k(z)$, et si $R_n(z) = u_n(z) + u_{n+1}(z) + ... = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(z)$ désigne le reste d'ordre n, il est clair que

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z) \text{ et } S(z+h) = S_n(z+h) + R_n(z+h),$$

et donc

$$S(z+h) - S(z) = S_n(z+h) - S_n(z) + R_n(z+h) - R_n(z),$$

où z et $z+h$ sont dans D. S_n désignant la somme d'un nombre fini de fonctions continues, donc est continue. Alors étant donné $\varepsilon > 0$ nous pouvons déterminer δ tel que

$$|S_n(z+h) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } |h| < \delta.$$

La série étant par hypothèse uniformément convergente on peut trouver n_0 tel que pour tout z dans D on a

$$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |R_n(z+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } n > n_0.$$

Alors on en déduit que

$$|S(z+h) - S(z)| \leq |S_n(z+h) - S_n(z)| + |R_n(z+h) - R_n(z)| < \varepsilon$$

pour $|h| < \delta$ et tout z dans D, ce qui établit la continuité. ■

Théorème 68

Si u_n est continue dans $D \subset \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ est uniformément convergente dans D et si C est une courbe de D, alors

$$\int_C S(z)\,dz = \int_C \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)\right) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_C u_n(z)\,dz.$$

En d'autres termes une série uniformément convergente de fonctions continues peut être intégrée terme à terme.

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème précédent, nous avons

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z)$$

et ces fonctions étant continues dans D et donc leurs intégrales existent, i.e.

$$\int_C S(z)\,dz = \int_C S_n(z)\,dz + \int_C R_n(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n} \int_C u_k(z)\,dz + \int_C R_n(z)\,dz.$$

Par hypothèse la série est uniformément convergente si bien que pour tout $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver un nombre n_0 indépendant de z dans D tel que $|R_n(z)| < \varepsilon$ pour $n > n_0$. Si l'on désigne par L la longueur de C nous avons

$$\left| \int_C R_n(z)\,dz \right| < \varepsilon L.$$

D'où

$$\left| \int_C S(z)\,dz - \int_C S_n(z)\,dz \right|$$

peut être rendu aussi petit qu'on le désire en choisissant n suffisamment grand, ce qui démontre le résultat. ∎

On peut aussi démontrer le même théorème pour la dérivation terme à terme.

Théorème 69

Si $u_n'(z) = \frac{d}{dz} u_n(z)$ existe dans D, si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(z)$ converge uniformément dans D et si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ converge dans D, alors $\dfrac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(z)$.

Convergence normale

Définition 70

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série de fonctions définie sur $D \subset \mathbb{C}$.

On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge **normalement** sur D si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty$ est convergente, où $\|u_n\|_\infty = \sup_{z \in D} |u_n(z)|$.

Prouver la convergence normale de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sur D revient donc à trouver une inégalité $|u_n(z)| \leq w_n$ valable pour tout $z \in D$, où $(w_n)_n$ est une suite telle que la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ converge.

L'intérêt de la notion de convergence normale réside dans l'implication :

convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme.

4.1.2 Séries entières

Définition 71

Une série de la forme

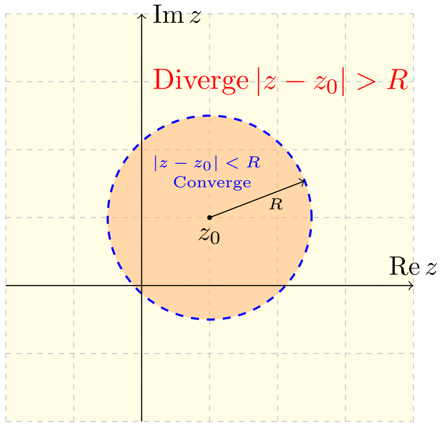
$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

est appelée **série entière** en $z - z_0$.

Rayon de convergence

Il existe un nombre positif R tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge pour $|z - z_0| < R$ et diverge pour $|z - z_0| > R$, cependant que pour $|z - z_0| = R$ elle peut ou non converger.

Géométriquement si C est le cercle de rayon R centré en z_0, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge en tous les points intérieurs à C et diverge en tous les points extérieurs ; elle peut ou non converger sur le cercle C.



Les valeurs spéciales $R = 0$ et $R = +\infty$ correspondent aux cas où $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniquement en $z = z_0$ ou converge pour toute valeur (finie) de z. Le nombre R est souvent appelé le **rayon de convergence** de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, le cercle $|z - z_0| = R$ est appelé le **cercle de convergence** et l'ensemble D des nombres complexes z tels que $|z - z_0| < R$ est appelé **disque de convergence** de la série entière.

Remarque 72

Le rayon de convergence d'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est caractérisé par :

1. $|z - z_0| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est absolument convergente.
2. $|z - z_0| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ diverge.
3. $|z - z_0| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
4. $|z - z_0| \leq r < R$ pour $r > 0$, la série est normalement convergente.

Proposition 73

Nous pouvons obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ par

$$\text{critère de d'Alembert : } R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ ou celui de Cauchy : } R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

si les limites existent.

Exemple 58

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, on a $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1.$

Cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$, on a $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ et donc $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1.$

Cette série converge dans $|z| < 1$ et diverge en dehors i.e. $|z| > 1$. Sur le cercle $|z| = 1$, la série converge en certains points et diverge en d'autres points. ▪

Proposition 74

- Une série entière peut être **dérivée** terme à terme dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du cercle de convergence.
- Une série entière peut être **intégrée** terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.

4.1.3 Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C. Alors

$$f(z_0+h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \frac{h^2}{2!} f''(z_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \cdots.$$

ou en posant $z = z_0 + h, \quad h = z - z_0$,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots.$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées **séries de Taylor** ou **développement de Taylor** de $f(z_0+h)$ ou $f(z)$.

Le domaine de convergence de la dernière série est défini par $|z - z_0| < R$, le rayon de convergence R étant égal à la distance de z_0 à la singularité de f la plus proche. Sur $|z - z_0| = R$ la série peut ou non converger. Pour $|z - z_0| > R$ la série diverge.

Si la singularité la plus proche est à l'infini, le rayon de convergence $R = +\infty$, i.e. la série converge quel que soit z dans $\mathbb{C}$.

Si $z_0 = 0$, la série obtenue est souvent appelée série de Maclaurin.

Quelques séries particulières

La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

1. $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots \qquad |z| < +\infty.$
2. $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots (-1)^{n-1} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad |z| < +\infty.$
3. $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \ldots (-1)^{n-1} \dfrac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots \qquad |z| < +\infty.$
4. $\mathrm{Log}\, z = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \ldots (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n} + \ldots \qquad |z| < 1.$
5. $\mathrm{Arctg}\, z = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \ldots (-1)^{n-1} \dfrac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad |z| < 1.$
6. $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} z^n + \ldots \qquad |z| < 1.$

Si $(1+z)^p$ est multiforme le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.

4.2 Fonctions analytiques

Définition 75

Une fonction f est analytique dans son domaine de définition D si pour tout z_0 dans D elle peut se développer en série entière dans un disque ouvert non vide centré en z_0 et inclus dans D selon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Théorème 76

Une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est holomorphe dans son disque de convergence, de dérivée $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

Démonstration. On se place pour la démonstration dans le cas non trivial où le rayon de convergence R de f est strictement positif. En translatant éventuellement z de z_0 on se ramène à montrer que $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe dans son disque de convergence

$$D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\},$$

de dérivée $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

La convergence de cette dernière série est assurée pour $z \in D$; en effet en choisissant alors r tel que $|z| < r < R$, il vient

$$n\,|z|^{n-1} = \frac{n}{r}\left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} r^n \leq K\,r^n,\ \ K > 0,$$

puisque pour $\alpha < 1$, le terme $n\alpha^{n-1}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. On en déduit

$$n\,|a_n|\,|z|^{n-1} \leq K\ |a_n|\,r^n,$$

et donc h a un rayon de convergence au moins égal à R.

En fixant toujours $0 < r < R$, formons pour u et v de module inférieur à r, $u \neq v$:

$$\frac{g(v) - g(u)}{v - u} - h(u) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\frac{v^n - u^n}{v - u} - n u^{n-1}\right).$$

En utilisant l'identité $v^n - u^n = (v-u)\sum_{j=0}^{n-1} v^{n-1-j}u^j$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{v^n - u^n}{v-u} - nu^{n-1} &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(v^{n-1-j}u^j - u^{n-1}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} u^{j-1}\left(v^{n-j} - u^{n-j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1} u^{j-1}(v-u)\sum_{k=1}^{n-j} v^{n-j-1-k}u^k.\end{aligned}$$

En prenant le module, il vient

$$\left|\frac{v^n - u^n}{v-u} - nu^{n-1}\right| \leq |v-u|\sum_{j=1}^{n-1} r^{j-1}(n-j)\, r^{n-j-1} = |v-u|\,\frac{1}{2}n(n-1)\, r^{n-2}.$$

D'où

$$\left|\frac{g(v) - g(u)}{v-u} - h(u)\right| \leq \frac{1}{2}|v-u|\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,|a_n|\, r^{n-2}.$$

La série qui apparaît correspond aux modules de la dérivée seconde de g, elle converge donc puisque $r < R$.

On en déduit immédiatement $\lim\limits_{\substack{v\to u\\ v\neq u}} \frac{g(v)-g(u)}{v-u} = h(u)$, qui est le résultat demandé. ■

Par une récurrence immédiate, on obtient alors le théorème suivant.

Théorème 77

Une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ est indéfiniment dérivable dans son disque de convergence, de dérivée k-ième

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (z-z_0)^{n-k}.$$

Remarquons que ceci implique en particulier $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$ pour $k \geq 0$.

Corollaire 78

D'après le théorème précédent, une fonction analytique est holomorphe.

La réciproque du corollaire précédent est fausse pour les fonctions d'une variable réelle. En effet, si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$, i.e. les dérivées successives en 0 de tout ordre sont nulles. Donc si elle possède en 0 une série de Taylor, elle sera identiquement nulle, ceci contredit la définition de la fonction f, qui n'est jamais nulle, sauf en 0. Alors f n'est pas analytique en 0 (bien qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

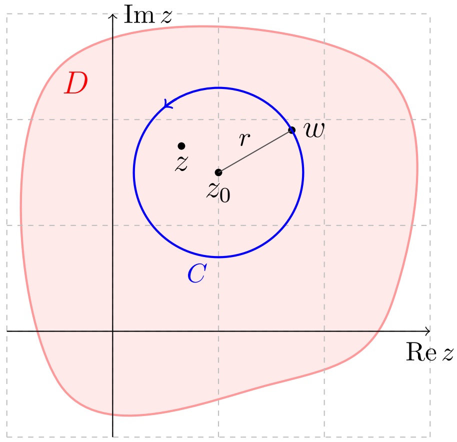
Mais pour les fonctions complexes on a le théorème suivant.

Théorème 79

Si D un ouvert dans $\mathbb{C}$, alors toute fonction f holomorphe dans D est analytique dans D.

Démonstration.

Soit f holomorphe dans D. La propriété qui va permettre le développement en série entière la fonction f autour de z_0 élément quelconque de D est la formule intégrale de Cauchy. Choisissant un cercle C centré en z_0 et contenue ainsi que son intérieure dans D, on écrit la formule intégrale de Cauchy pour un point quelconque z de l'intérieur de C :



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Notant r le rayon de C, on a alors $|z-z_0| < |w-z_0| = r$ ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Cette dernière série étant uniformément convergente pour $w \in C$ car $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$, ce qui nous permet d'intervertir les signes somme et intégrale :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(w)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw.$$

En posant $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$, on obtient le résultat demandé $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.

D'autre part, d'après la formule intégrale de Cauchy $a_n = \frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$. ■

On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 80

Pour qu'une fonction f définie dans un ouvert D soit analytique dans D, il faut et il suffit que f soit holomorphe dans D. On peut alors la développer en série de Taylor autour de tout point z_0 de D selon $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Le rayon de convergence de cette série étant au moins égal à la distance de z_0 au bord de D. De plus, pour toute courbe fermée simple C de D entourant z_0 on a $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

4.3 Prolongement analytique, principe des zéros isolés

Les fonctions analytiques d'une variable réelle peuvent être prolongées analytiquement par de nombreuses façons aux fonctions définies sur un domaine plus large, i.e. elles admettent plusieurs prolongements analytiques possibles. Contrairement aux fonctions d'une variable complexe, si elles admettent un prolongement analytique, on verra qu'il sera unique.

Proposition 81

Soit D un domaine (i.e. un ouvert connexe) de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur D, on a alors équivalence entre les propriétés suivantes :

(P1) f est identiquement nulle sur D,

(P2) f est identiquement nulle sur un disque ouvert non vide inclus dans D,

(P3) il existe $z_0 \in D$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$.

Démonstration. Il est clair que **(P1)** $\Rightarrow$ **(P2)** $\Rightarrow$ **(P3)**, il s'agit donc de montrer que **(P3)** implique **(P1)**. Soit $E = \left\{z \in D \text{ tel que } f^{(n)}(z_0) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\right\}$, E est non vide car il contient z_0 et E est un fermé de D car f et ses dérivées sont continues. Ainsi, si nous montrons que E est ouvert nous pourrons déduire de la connexité de D que $E = D$ si bien que f est identiquement nulle sur D. Soit donc $z \in E$, comme f est analytique, il existe $r > 0$ tel que sur $D_r(z)$, la fonction f est égale à sa série de Taylor en z, laquelle est nulle car $z \in E$ et donc f et toutes ses dérivées sont nulles sur $D_r(z)$ ce qui fait que E est ouvert. ■

L'hypothèse de connexité est évidemment fondamentale : si D est réunion de deux disques ouverts disjoints la fonction valant 0 sur le premier disque et 1 sur le second est analytique sur D, nulle sur un ouvert mais pas sur D.

On déduit immédiatement de la proposition précédente :

Théorème 82 (Principe d'identité)
Si f et g sont analytiques sur le domaine D et si $f = g$ sur un ouvert alors $f = g$ sur D.

On a vu qu'une fonction analytique sur un domaine qui s'annule au voisinage d'un point est nulle partout, en fait on a un résultat beaucoup plus fort qui nous dit que si une fonction analytique s'annule sur un ensemble ayant des points d'accumulation, alors elle identiquement nulle.

Théorème 83 (Principe des zéros isolés)
Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle, alors les zéros de f (i.e. les points en lesquels f s'annule) sont isolés.

Démonstration. Soit $z_0 \in D$ tel que $f(z_0) = 0$, comme f n'est pas identiquement nulle sur D, il résulte de la proposition précédente qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, soit n_0 le plus petit n pour lequel $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Il existe $r > 0$ tel que $D_r(z_0) \subset D$ et pour tout $z \in D_r(z_0)$, on ait

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} \left(b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \right) = (z - z_0)^{n_0} (b_0 + g(z)),$$

où $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$ avec $b_0 \neq 0$ et $g(z)$ est de rayon de convergence au moins r. Comme $g(z_0) = 0$ et g est continue, il existe $\delta < r$ tel que $|g(z)| < |b_0|$ pour tout $z \in D_\delta(z_0)$ de sorte que f ne s'annule pas sur $D_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$. On a bien montré que les zéros de f sont isolés. ■

Exemple 59

La fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin \frac{1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases},$$

ne peut pas être analytique en 0 car l'ensemble des zéros de f, qui sont $z_0 = 0$ et $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$, admet un point d'accumulation. ■

Théorème 84 (Principe du prolongement analytique)
Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions analytiques de D dans $\mathbb{C}$, si $f = g$ sur un sous-ensemble de D ayant un point d'accumulation dans D alors $f = g$ sur D.

Démonstration. L'ensemble des zéros de $f - g$ possède un point d'accumulation dans D et donc les zéros de $f - g$ ne sont pas isolés, comme $f - g$ est analytique et D un domaine, il résulte du principe des zéros isolés que $f = g$ sur D. ∎

Notons les cas particuliers suivants :

- Si f et g sont analytiques sur le domaine D, $z \in D$ et $f(z_n) = g(z_n)$ où (z_n) est une suite de points de $D \setminus \{z_0\}$ convergeant vers $z \in D$ alors $f = g$ sur D.
- Si f et g sont analytiques sur le domaine D et coïncident sur un segment $[a, b], a \neq b$, inclus dans D alors $f = g$ sur D.
- Si f et g sont entières i.e. analytiques sur $\mathbb{C}$ et si $f = g$ sur $\mathbb{R}$ (ou sur $i\mathbb{R}$ ou sur une droite, ou sur un segment ou un cercle ou une courbe continue non réduite à un point ou plus généralement sur un ensemble possédant un point d'accumulation) alors $f = g$ sur le domaine complexe $\mathbb{C}$.

Le théorème précédent justifie la notion très importante de prolongement analytique, qui se formule dans les termes suivants : si f analytique dans un domaine D est donnée, existe t-il une fonction g analytique définie dans un domaine V strictement plus grand que D telle que g coïncide avec f sur D?

Corollaire 85
Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique de D dans $\mathbb{C}$. Si f admet un prolongement analytique en une fonction définie sur un domaine strictement plus grand que D, alors il est unique.

Exemple 60
Soit f la fonction définie sur $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et soit g la fonction définie sur $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $g(z) = \dfrac{1}{1 - z}$.
On a $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in D_1$. Alors d'après le corollaire précédent, la fonction g est l'unique prolongement analytique de f sur D_2. ∎

Corollaire 86

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine symétrique par rapport à l'axe réel et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique, réelle sur l'axe réel i.e. si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$. Alors

$$\overline{f(\overline{z})} = f(z).$$

Démonstration. La fonction $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe dans D, et donc analytique. En effet,

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right)} \to \overline{f'(\overline{z_0})} \text{ lorsque } z \to z_0.$$

Comme elle coïncide avec f sur l'axe réel i.e. $g(x) = \overline{f(x)} = f(x)$, elle coïncide avec f partout dans D. ■

Exemple 61

Par exemple $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$ et $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ dans $\mathbb{C}$. ■