USTHB 2015-2016 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse complexe
$2^{\text{ème}}$ année Lic Math

Examen final - 30 mai 2016. Durée : 1 heure et 30 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/ **20**

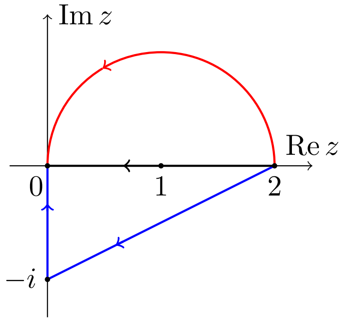
Exercice 1 (4 pts.) :

a) Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Montrer que si l'une des conditions suivantes est vérifiée : **1)** $\mathrm{Re}\,(f)$ est constante, **2)** $\mathrm{Im}\,(f)$ est constante, **3)** $|f|$ est constante, alors f est constante dans D.

b) Une fonction de variable complexe à valeurs réelles peut-elle être holomorphe?

Réponse.

Exercice 2 (5 pts.) : **a)** Calculer $\displaystyle\int_C \left(|z|^2 + \overline{z}\right) dz$ le long



1. du cercle $|z-1| = 1$ de 2 à 0 dans le sens direct,

2. du segment de droite joignant 2 et 0,

3. la ligne brisée formée par les segments de droite 2 à $-i$ et $-i$ à 0.

b) Que peut-on en déduire sur la fonction $z \mapsto |z|^2 + \overline{z}$.

Réponse.

Exercice 3 (5 pts.) : Soit a un réel tel que $|a| > 1$. On considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2iaz - 1}$.

a) Trouver les résidus de f en tous ses pôles.

b) Calculer $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 + 2iaz - 1} dz$, où C désigne le cercle $|z| = 1$ dans le sens direct.

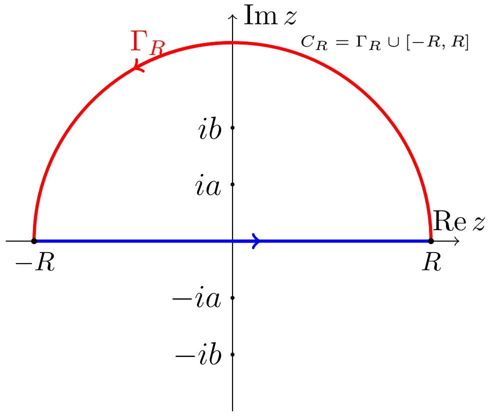
c) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin t} dt = \oint_C \frac{c}{z^2 + 2iaz - 1} dz$ où c est une constante à déterminer.

d) En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin t} dt$.

Réponse.

Exercice 4 (6 pts.) : Soient a et b deux réels strictement positifs.

On considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$.



a) Trouver les résidus de f en **tous ses pôles**.

b) Soit R un réel positif. On note Γ_R le demi cercle paramétré par $t \mapsto R\,e^{it}, t \in [0, \pi]$. Démontrer que $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0$.

c) On suppose $R > \max\{a, b\}$. En appliquant le théorème des résidus, calculer $\int\limits_{C_R} f(z)\, dz$, où C_R désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du demi cercle Γ_R et du segment $[-R, R]$, décrit dans le sens direct.

d) Déduire de ce qui précède $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$.

Réponse.