USTHB 2015-2016 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse complexe
$2^{\text{ème}}$ année Lic Math

Test n^{0}2 - 18 mai 2016. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :...

Matricule :...

$\frac{}{15}$

Exercice 1 (5 pts.) : a) Calculer $\displaystyle\int_C (3z^2 + \overline{z})\, dz$ le long

1. du cercle $|z| = 1$ de 1 à $-i$ dans le sens direct,

2. du segment de droite joignant 1 et $-i$.

b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.

Réponse.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 2 (5 pts.) : On considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{3z^2 + 10iz - 3}$.

a) Trouver les résidus de f en tous les pôles.

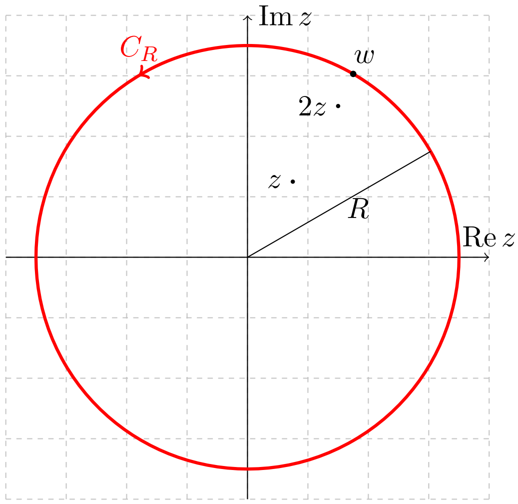
b) Calculer $\displaystyle\int_C \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3} dz$, où C désigne le cercle $|z| = 1$ dans le sens direct.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{10 + 6\sin t} dt$. *Indication* : Poser $z = e^{it}$.

Réponse.

Exercice 3 (5 pts.) :

Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq M(1+|z|)^n$ pour un certain $M > 0$ et un certain $n \in \mathbb{N}$. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $C_R = \{w \in \mathbb{C} : |w| = R\}$, tel que $R > \max(2|z|, 1)$.



a) Montrer que pour tout $w \in C_R$, on a $\left|\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\right| \leq \frac{\alpha_n}{R^2}$, $\alpha_n > 0$.

b) En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$\left|f^{(n+1)}(z)\right| \leq \frac{\beta_n}{R},\ \beta_n > 0.$$

c) En déduire que f est un polynôme de degré au plus n.

Réponse.