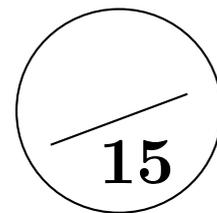




Test n°2 - 18 mai 2016. Durée : 30 minutes

Nom et Prénom :

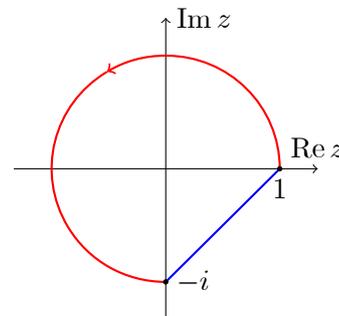
Matricule :



Exercice 1 (5 pts.) : a) Calculer $\int_C (3z^2 + \bar{z}) dz$ le long

1. du cercle $|z| = 1$ de 1 à $-i$ dans le sens direct,
2. du segment de droite joignant 1 et $-i$.

b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.



Réponse.

a)

1. L'arc du cercle $|z| = 1$ de 1 à $-i$ peut être paramétré par $z = e^{it}$, $t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$.

Les points 1 et $-i$ de cet arc, correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = \frac{3\pi}{2}$.

On a $dz = d(e^{it}) = ie^{it} dt$, $\bar{z} = e^{-it}$ et $z^2 = (e^{it})^2 = e^{2it}$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} (3e^{2it} + e^{-it}) ie^{it} dt &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (3ie^{3it} + i) dt = [e^{3it} + it]_0^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \left(e^{i\frac{9\pi}{2}} + i\frac{3\pi}{2} \right) - (1 + 0) = i + i\frac{3\pi}{2} - 1 = -1 + \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) i. \end{aligned}$$

2. Sur le segment de droite joignant 1 et $-i$, on a $z = 1 - (1+i)t$, $t \in [0, 1]$ et $dz = -(1+i) dt$.

L'intégrale donnée vaut

$$\begin{aligned} -(1+i) \int_0^1 (3(1 - (1+i)t)^2 + 1 - (1-i)t) dt &= [(1 - (1+i)t)^3 - (1+i)t + t^2]_0^1 \\ &= 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

b) La fonction à intégrer $f(z) = 3z^2 + \bar{z}$ n'est pas holomorphe ($\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 1 \neq 0$), donc l'intégrale dépend du chemin suivi et pas seulement du point d'arrivée et du point de départ.

Exercice 2 (5 pts.) : On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3}$.

a) Trouver les résidus de f en tous les pôles.

b) Calculer $\int_C \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3} dz$, où C désigne le cercle $|z| = 1$ dans le sens direct.

c) En déduire $\int_0^{2\pi} \frac{1}{10 + 6 \sin t} dt$. *Indication* : Poser $z = e^{it}$.

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3}$ possède deux pôles simples en $z_1 = -3i$ et $z_2 = -\frac{1}{3}i$ qui sont des racines de $3z^2 + 10iz - 3 = 0$.

Le résidu en $z_1 = -3i$ est

$$\text{Res}(f, -3i) = \lim_{z \rightarrow -3i} (z - (-3i)) \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3}.$$

En utilisant la règle de L'Hôpital

$$\text{Res}(f, -3i) = \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{1}{6z + 10i} = \frac{1}{-8i} = \frac{i}{8}.$$

De même le résidu en $z_2 = -\frac{1}{3}i$ est

$$\text{Res}(f, -\frac{1}{3}i) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}i} (z - (-\frac{1}{3}i)) \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}i} \frac{1}{6z + 10i} = \frac{1}{8i} = \frac{-i}{8}.$$

b) Seul $z_2 = -\frac{1}{3}i$ est à l'intérieur de C , alors par application du théorème des résidus

$$\int_C \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3} dz = 2\pi i \text{Res}(f, -\frac{1}{3}i) = 2\pi i \frac{1}{8i} = \frac{\pi}{4}.$$

c) On pose $z = e^{it}$. D'où $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{it} dt = iz dt$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{10 + 6 \sin t} dt = \int_C \frac{1}{10 + 6 \frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3} dz,$$

où C est le cercle unité centré à l'origine. Alors d'après la question b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{10 + 6 \sin t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3 (5 pts.) :

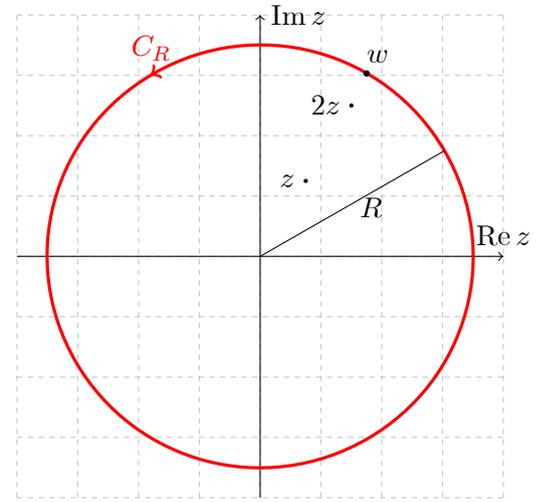
Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq M(1 + |z|)^n$ pour un certain $M > 0$ et un certain $n \in \mathbb{N}$. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $C_R = \{w \in \mathbb{C} : |w| = R\}$, tel que $R > \max(2|z|, 1)$.

a) Montrer que pour tout $w \in C_R$, on a $\left| \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} \right| \leq \frac{\alpha_n}{R^2}$, $\alpha_n > 0$.

b) En utilisant la formule intégrale de Cauchy, montrer que

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq \frac{\beta_n}{R}, \beta_n > 0.$$

c) En déduire que f est un polynôme de degré au plus n .

**Réponse.**

a) Comme $|w - z| \geq |w| - |z| = R - |z| \geq \frac{R}{2}$, alors

$$\left| \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} \right| \leq \frac{M(1 + |w|)^n}{\left(\frac{R}{2}\right)^{n+2}} = \frac{M(1 + R)^n}{\left(\frac{R}{2}\right)^{n+2}} \leq \frac{M(2R)^n}{\left(\frac{R}{2}\right)^{n+2}} = \frac{2^{2n+2}M}{R^2}.$$

b) On a $f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw$. Alors

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq \frac{(n+1)!}{|2\pi i|} \int_{C_R} \left| \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} \right| |dw| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \cdot \frac{2^{2n+2}M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{2^{2n+2}(n+1)!M}{R},$$

pour n'importe quel $R > \max(2|z|, 1)$. Ce qui implique que $f^{(n+1)}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

c) Soit P le polynôme de Taylor de f à l'origine à l'ordre n . On remarque que l'origine est zéro (racine) d'ordre $n+1$ de $f(z) - P(z)$ ce qui explique que $f(z) - P(z) = z^{n+1}g(z)$ avec g une fonction entière.

Comme $|f(z)| \leq M(1 + |z|)^n$, alors pour $|z|$ suffisamment grand on a

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z) - P(z)}{z^{n+1}} \right| \leq K \frac{|z|^n}{|z|^{n+1}} = \frac{K}{|z|},$$

pour un certain $K > 0$. De nouveau, g est une fonction entière bornée, elle est donc constante. Notre estimation donne même $g \equiv 0$ et donc $f = P$.