Chapitre 3

Intégration dans le domaine complexe

Sommaire

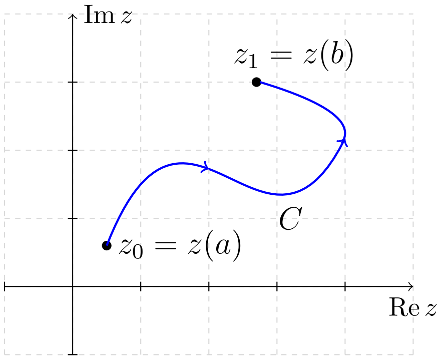
3.1 Chemins et courbes dans le plan complexe

Définition 43

Un **chemin** ou **arc** de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{C}$ est défini comme étant une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle réel $I = [a, b]$, $a < b$, vers le plan complexe $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto z(t) = x(t) + iy(t). \end{aligned}$$

Ses points initial et final sont $z_0 = z(a)$ et $z_1 = z(b)$.



1. La fonction $t \mapsto z(t)$ est souvent notée $t \mapsto \gamma(t)$ ou $t \mapsto \phi(t)$.

2. On note un chemin ϕ par (I, ϕ).

3. Les points initial $z_0 = \phi(a)$ et final $z_1 = \phi(b)$ sont appelés respectivement l'origine et l'extrémité de ϕ.

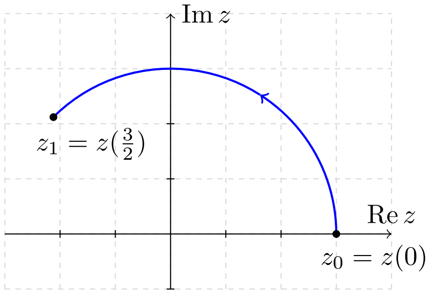
Définition 44

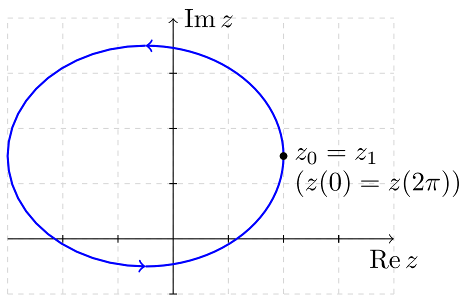
L'image $C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [a,b]\}$ s'appelle support de ϕ ou **courbe** dans le plan complexe $\mathbb{C}$ paramétrée par la fonction $\phi : t \mapsto z(t)$.

Souvent on confond le chemin avec son support et on dit que C est un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple 38

Les fonctions $z(t) = 3\cos t + 3i\sin t,\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$ et $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t + i\left(\frac{3}{2} + \sin t\right),\ 0 \le t \le 2\pi$ définies des chemins dans le plan complexe.





$z(t) = 3\cos t + 3i\sin t,\ 0 \le t \le \frac{3\pi}{4}.$ $z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t + i\left(\frac{3}{2} + 2\sin t\right),\ 0 \le t \le 2\pi.$ ■

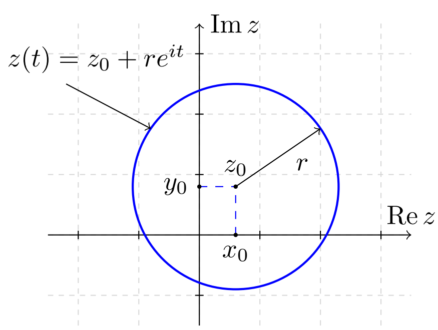
Exemple 39

Le cercle de centre z_0 et de rayon r est une courbe paramétrée par la fonction

$$t \mapsto z(t) = z_0 + r(\cos t + i\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi,$$

ou

$$t \mapsto z(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$



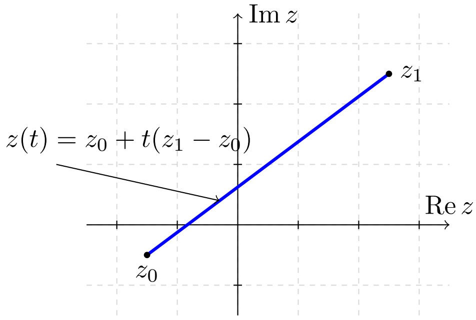
Cercle de centre z_0 et de rayon r ■

Exemple 40

Le segment d'extrémités z_0 et z_1 noté $[z_0, z_1]$ est une courbe paramétrée par la fonction

$$t \mapsto z(t) = z_0(1-t) + tz_1, \ 0 \le t \le 1,$$

ou $t \mapsto z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), \ 0 \le t \le 1.$

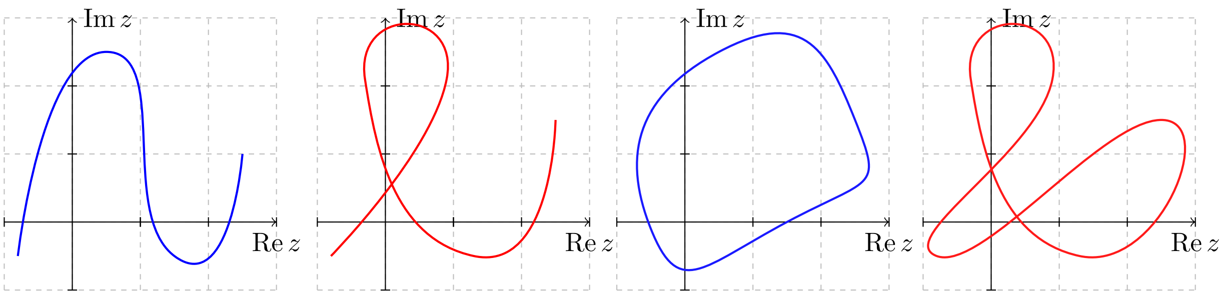


Segment d'extrémités z_0 et z_1 ■

Définition 45

1. Si les points initial et final d'un chemin coïncident, il est appelé **chemin fermé** ou **lacet**.
2. On dit qu'un chemin est **simple** si ne se recoupe pas lui-même *i.e.* il n'a pas de points doubles.
3. Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de **Jordan**.

Exemple 41



Chemin non fermé et simple | Chemin non fermé et non simple | Chemin fermé et simple | Chemin fermé et non simple ■

Définition 46

Une courbe de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux ou un chemin est obtenue en recollant un nombre fini de courbes ou chemin $([a_i, b_i], \phi_i), i = 1, ..., m$ de classe $\mathcal{C}^k$ dont l'extrémité $\phi_i(b_i)$ de l'un coïncide avec l'origine du suivant $\phi_{i+1}(a_{i+1})$.

Définition 47

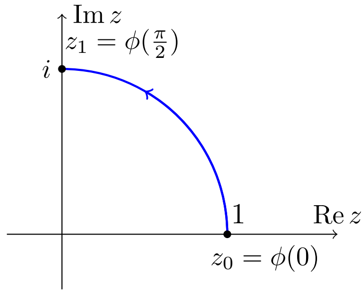
- On dit que deux chemins (I, ϕ) et (J, ψ) sont $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe une bijection $g : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$, ainsi que sa réciproque, telle que $\phi = \psi \circ g$.
- La fonction g, qui est strictement monotone, est appelée changement de paramètre.
- On dit que g est un changement de paramètre admissible de $C = \phi(I)$ si $k \ge 1$.
- Si la fonction g est strictement croissante, on dit que les chemins (I, ϕ) et (J, ψ) sont de même orientation.

Exemple 42

Soit C la courbe paramétrée par le chemin

$$\begin{aligned} \phi : \quad & \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] && \to \mathbb{C} \\ & t && \mapsto \phi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$

Le sens de l'orientation de C induite par ϕ est de $z_0 = \phi(0)$ vers $z_1 = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

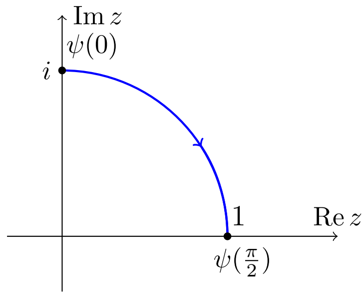


$\phi(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

Le chemin

$$\begin{aligned} \psi : \quad & \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] && \to \mathbb{C} \\ & t && \mapsto \psi(t) = ie^{-it} = \sin t + i \cos t \end{aligned}$$

admet le même support que celui de ϕ, i.e. $\phi\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \psi\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, mais l'orientation définie par ϕ est opposée à l'orientation définie par ψ.



$\psi(t) = ie^{-it},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

Le changement de paramètre $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est défini par $g(t) = \frac{\pi}{2} - t$. ▪

3.2 Intégration le long d'une courbe

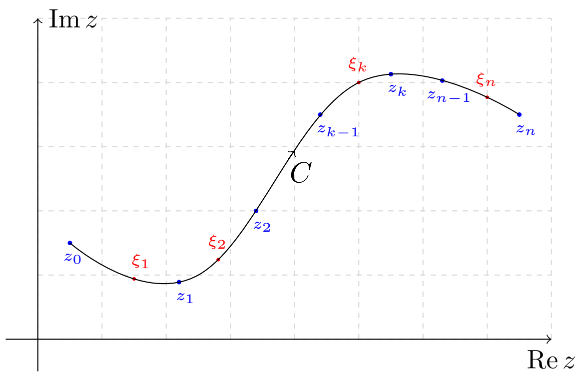
Soit D un domaine non vide du plan complexe $\mathbb{C}$ et soit C une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{aligned} \phi : \quad & [a, b] && \to D \\ & t && \mapsto \phi(t) = z(t) = x(t) + iy(t). \end{aligned}$$

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction complexe définie sur D et continue en tout point de C.

Partageons $[a, b]$ en n intervalles au moyen des points $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$, arbitrairement choisis et posons

$$z_0 = \phi(a), z_1 = \phi(t_1), \ldots, z_n = \phi(b).$$



Sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k [où k varie de 1 à n] choisissons un point ξ_k. Formons la somme suivante qui s'appelle somme de Riemann de longueur $n \in \mathbb{N}$ associée à la fonction f et au chemin ϕ subdivisé en n portions de chemins pointées par les $\xi_k \in \phi([t_{k-1}, t_k])$:

$$S_n(f, \phi, \xi) = f(\xi_1)(z_1 - z_0) + \cdots + f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) + \cdots + f(\xi_n)(z_n - z_{n-1}).$$

En posant $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$, ceci devient

$$S_n(f, \phi, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k.$$

Si l'on fait croître le nombre n des subdivisions de façon que la longueur $|\Delta z_k|$ de la plus grande des cordes tende vers zéro, alors la somme S_n tend vers une limite indépendante du mode de subdivision.

Définition 48

La limite de la suite des sommes de Riemann

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \sup\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0}} S_n(f, \phi, \xi) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \sup\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

s'appelle **intégrale** de la fonction f le long de la courbe C et se note $\int\limits_C f(z)\,dz$.

Remarque 49

1. L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un **chemin**, ou intégrale **curviligne** complexe.
2. Si la courbe est fermée et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre $\circlearrowleft$ on note $\oint\limits_C f(z)\,dz$ au lieu de $\int\limits_C f(z)\,dz$.
3. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est aussi appelé le sens positif ou sens direct.

Observons que si on suppose le chemin ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ on pourra alors approcher Δz_k par $\phi'(t_k)\Delta t_k$ donc en passant à la limite on déduit la proposition importante suivante.

Proposition 50

Soit D un domaine non vide dans $\mathbb{C}$. Si C est une courbe paramétrée par un chemin

$$\begin{array}{rlll} \phi : & [a,b] & \to D \\ & t & \mapsto \phi(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : D \to \mathbb{C}$ est une fonction continue en tout point de C, alors

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

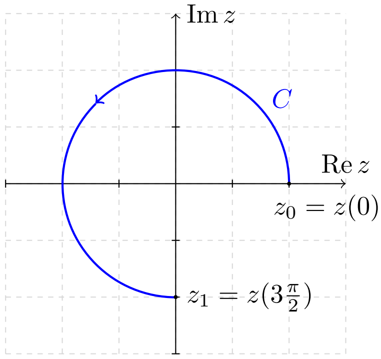
Ce résultat est souvent pris comme définition de l'intégrale de f le long de la courbe C.

Exemple 43

Soit C l'arc $\left\{z(t) \in \mathbb{C} \text{ tel que } z(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Évaluons l'intégrale $\displaystyle\int_C z^2 dz$.

On a $dz = z'(t)\,dt = 2ie^{it}dt$. Alors



$$\int_C z^2 dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(2e^{it}\right)^2 2ie^{it}dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8ie^{3it}dt$$

$$= \left[\frac{8}{3}e^{3it}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{8}{3}e^{\frac{9}{2}i\pi} - \frac{8}{3}e^0 = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3}i.$$

■

Proposition 51

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $z(t) = x(t) + iy(t)$, l'intégrale $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i(vdx + udy)\\ &= \int_a^b \{u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\}\,dt\\ &\quad +i\int_a^b \{v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)\}\,dt.\end{aligned}$$

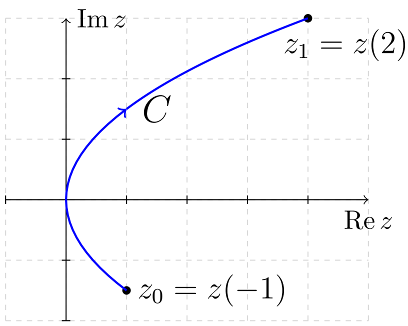
Exemple 44

Calculer $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ où $f(z) = i\overline{z} = y + ix$ et

$$C = \left\{z(t) = t^2 + \tfrac{3}{2}it \in \mathbb{C},\ t \in [-1,2]\right\}.$$

On a $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{3}{2}t$ et

$$dz = dx + idy = (x'(t) + iy'(t))\,dt = \left(2t + \tfrac{3}{2}i\right)dt.$$



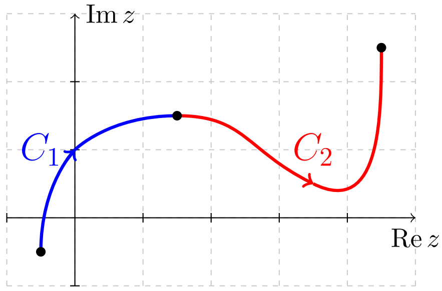
Alors

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_{t=-1}^{t=2} (y(t) + ix(t))(x'(t) + iy'(t))\,dt\\ &= \int_{-1}^{2} \left(\tfrac{3}{2}t + it^2\right)\left(2t + \tfrac{3}{2}i\right)dt = \int_{-1}^{2}\left(\tfrac{3}{2}t^2 + i\left(2t^3 + \tfrac{9}{4}t\right)\right)dt\\ &= \left[\tfrac{1}{2}t^3 + i\left(\tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{9}{8}t^2\right)\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2} + \frac{87}{8}i.\end{aligned}$$

■

3.2.1 Propriétés

Soit C une courbe dans le plan complexe. On note par $-C$, la courbe C orientée dans son sens inverse. On suppose que $C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coïncide avec le point initial de la courbe C_2.



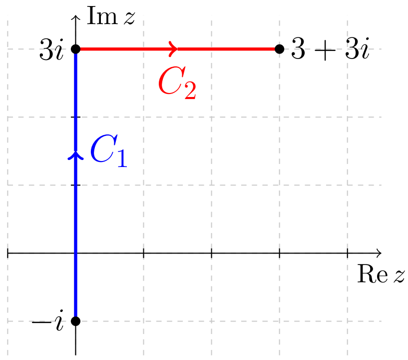
Si f et g sont continues le long de C, alors les propriétés ci-dessous se démontrent à l'aide des sommes de Riemann.

1. $\displaystyle\int\limits_C (f(z) + g(z))\, dz = \int\limits_C f(z)\, dz + \int\limits_C g(z)\, dz.$
2. $\displaystyle\int\limits_C \alpha f(z)\, dz = \alpha \int\limits_C f(z)\, dz$ où α est une constante dans $\mathbb{C}$.
3. $\displaystyle\int\limits_{-C} f(z)\, dz = -\int\limits_C f(z)\, dz.$
4. $\displaystyle\int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_{C_1 \cup C_2} f(z)\, dz = \int\limits_{C_1} f(z)\, dz + \int\limits_{C_2} f(z)\, dz.$

Exemple 45

Évaluer $\displaystyle\int_C \overline{z} dz$ où C est la courbe formée des segments joignant $-i$ à $3i$ et $3i$ à $3+3i$.

Soit $C_1 = \{(4t-1)\, i \in \mathbb{C},\ 0 \le t \le 1\}$ le segment joignant $-i$ à $3i$ et $C_2 = \{3t + 3i \in \mathbb{C},\ 0 \le t \le 1\}$ le segment joignant $3i$ à $3+3i$.



Sur le segment C_1, on a $z(t) = (4t-1)\, i$, $dz = z'(t)\, dt = 4idt$ et

$$\int_{C_1} \overline{z} dz = \int_0^1 -(4t-1)\, i\, (4idt) = \int_0^1 (16t - 4)\, dt = \left[8t^2 - 4t\right]_0^1 = 4.$$

Sur le segment C_2, on a $z(t) = 3t + 3i$, $dz = z'(t)\, dt = 3dt$ et

$$\int_{C_2} \overline{z} dz = \int_0^1 (3t - 3i)\, (3dt) = \int_0^1 (9t - 9i)\, dt = \left[\frac{9}{2} t^2 - 9it\right]_0^1 = \frac{9}{2} - 9i.$$

Le résultat demandé est $\displaystyle\int_C \overline{z} dz = \int_{C_1} \overline{z} dz + \int_{C_2} \overline{z} dz = 4 + \frac{9}{2} - 9i = \frac{17}{2} - 9i.$ ■

Longueur d'une courbe

Soit C une courbe paramétrée par un chemin de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} z:\ [a,b] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto z(t) = x(t) + iy(t). \end{aligned}$$

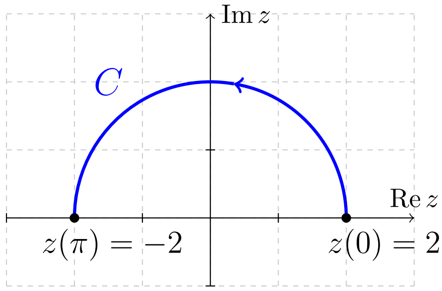
La **longueur** L_C de la courbe C est définie comme étant

$$\boxed{L_C = \int_a^b |z'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.}$$

Exemple 46

Trouver la longueur du demi-cercle

$$C = \left\{ z(t) \in \mathbb{C} \text{ où } z(t) = 2e^{it},\ t \in [0,\pi] \right\}.$$



On a $z'(t) = 2ie^{it}$ et donc $|z'(t)| = |2ie^{it}| = 2$.
D'où $L_C = \displaystyle\int_0^\pi 2dt = [2t]_0^\pi = 2\pi$. ■

Théorème d'estimation

Soit f une fonction complexe continue définie sur un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f:\ D &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z). \end{aligned}$$

Soit C une courbe paramétrée par un chemin de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} z:\ [a,b] &\to D \\ t &\mapsto z(t), \end{aligned}$$

tel que $|f(z(t))| \leq M$, $\forall t \in [a,b]$, *i.e.* $|f(z)|$ est bornée sur C par une constante réelle M. Alors

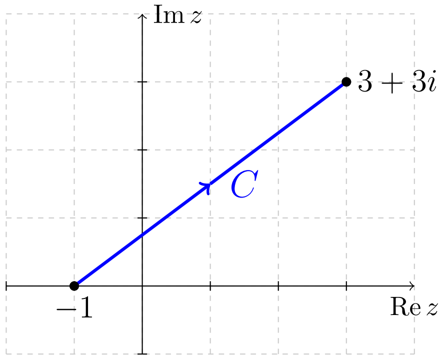
$$\boxed{\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_C |f(z)|\ |dz| \leq M \cdot L_C,}$$

où, par définition,

$$\int_C |f(z)|\ |dz| = \int_a^b |f(z(t))|\ |z'(t)|\, dt$$

et $L_C = \displaystyle\int_a^b |z'(t)|\, dt$ est la longueur de la courbe C.

Exemple 47



Soit C le segment d'extrémités -1 et $3+3i$ qui est définie par

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0,1] \text{ où } z(t) = -1 + 4t + 3it\}.$$

Vérifier le théorème d'estimation pour $f(z) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z = xy$.

On a $dz = z'(t)\,dt = (4+3i)\,dt$ et donc d'une part

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^1 (-1+4t)(3t)(4+3i)\,dt\right| = \left|10 + \frac{15}{2}i\right| = \frac{25}{2} = 12,5.$$

D'autre part

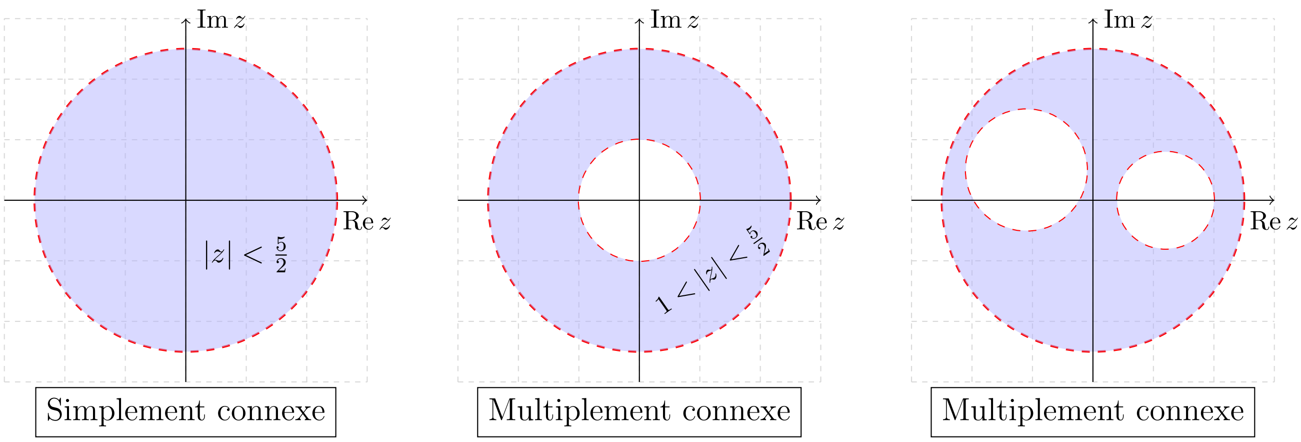
$$\int_C |f(z)|\ |dz| = \int_0^1 |f(z(t))|\ |z'(t)|\,dt = \int_0^1 |(-1+4t)(3t)|(5)\,dt = \frac{205}{16} = 12,8125.$$

Ainsi $M = \sup\limits_{0\le t\le 1} |(-1+4t)(3t)| = 9$ et $L_C = 5$.
Alors le théorème d'estimation est vérifié car $12,5 \le 12,8125 \le 45$. ■

3.3 Théorèmes de Cauchy

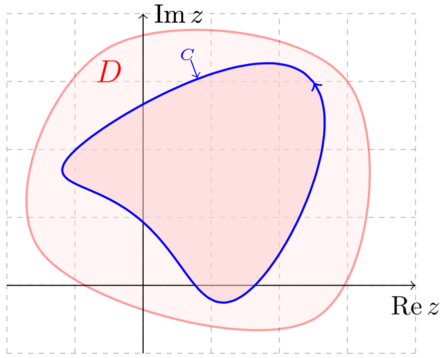
3.3.1 Domaines simplement ou multiplement connexes

Un domaine D du plan complexe est dit **simplement connexe** si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D.
Dans le cas contraire D est dit **multiplement connexe**.



Intuitivement, un domaine sans trous est simplement connexe mais s'il possède au moins un seul trou il est multiplement connexe.

3.3.2 Théorème de Cauchy



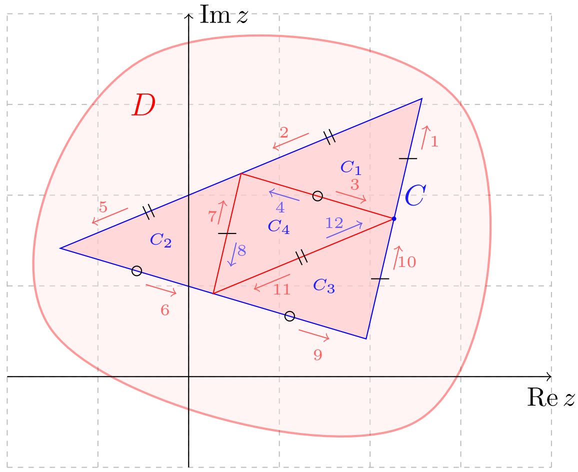
Soient f une fonction **holomorphe** dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée contenue ainsi que son intérieure dans D. Alors

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0.}$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé **théorème de Cauchy**, il est à la fois valable pour des domaines simplement connexes ou multiplement connexes.

Il existe deux démonstrations différentes de ce théorème. Il fut d'abord démontré à l'aide de la formule de Green-Riemann, ce qui nécessite l'introduction des formes différentielles et l'intégrale double, dont seront enseignées dans le cours du calcul différentiel. Plus tard Édouard Goursat en proposa une autre démonstration, que nous allons présenter ici, c'est pourquoi on l'appelle quelquefois théorème de Cauchy-Goursat.

Démonstration.



Soit $I = \left|\oint_C f(z)\,dz\right|$. Considérons d'abord le cas où C est un triangle. Au moyen des milieux de ses côtés, subdivisons-le en quatre autres triangles C_1, C_2, C_3 et C_4 comme le montre la figure ci-contre. Les segments parcourus deux fois le sont dans des sens opposés de telle sorte que $\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \oint_{C_k} f(z)\,dz.$

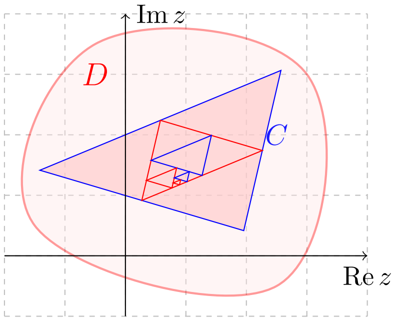
Comme

$$I = \left|\oint_C f(z)\,dz\right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\oint_{C_k} f(z)\,dz\right| \leq 4 \sup_{1\leq k\leq 4} \left|\oint_{C_k} f(z)\,dz\right|,$$

alors pour au moins l'un de ces triangles, appelons-le T_1, on a $I \leq 4 \left|\oint_{T_1} f(z)\,dz\right|$. Le périmètre de ce triangle est $L_{T_1} = \dfrac{L_C}{2}$, où L_C est le périmètre du triangle C.

En recommençant ce procédé, on obtient une suite de triangles emboîtés T_n tels que

$$I \leq 4^n \left|\oint_{T_n} f(z)\,dz\right| \quad \text{et} \quad L_{T_n} = \frac{L_C}{2^n}.$$



Comme ces triangles sont emboîtés et que leurs périmètres tend vers 0, alors leurs intersection est un point unique z_0 où f est holomorphe.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon \text{ pourvu que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Si on choisit n assez grand tel que $L_{T_n} = \frac{L_C}{2^n} < \delta$, alors pour tout $z \in T_n$:

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0| \leq \varepsilon \tfrac{L_C}{2^n}.$$

D'autre part, un calcul simple montre que $\displaystyle\oint_{T_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\, dz = 0$. Alors

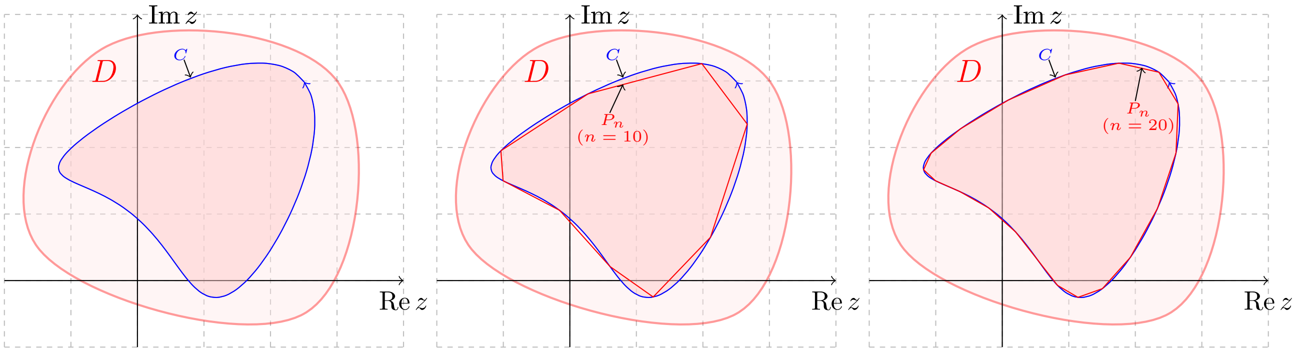
$$\begin{aligned} I &\leq 4^n \left|\oint_{T_n} f(z)\, dz\right| = 4^n \left|\oint_{T_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))\, dz\right| \\ &\leq 4^n \oint_{T_n} \left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| |dz| \\ &\leq 4^n \varepsilon \tfrac{L_C}{2^n} \oint_{T_n} |dz| = 4^n \varepsilon \tfrac{L_C}{2^n}\left(\tfrac{L_C}{2^n}\right) = \varepsilon (L_C)^2. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on doit avoir $I = 0$ et donc $\displaystyle\oint_C f(z)\, dz = 0$.

Le cas où C est un polygone se déduit du cas précédent par triangulation.

Dans le cas général, la fonction f étant continue et donc par définition, l'intégrale $\displaystyle\oint_C f(z)\, dz$ est la limite de la suite des sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$, lorsque la distance maximale ($\Delta_n = \sup_{1 \leq k \leq n} |z_k - z_{k-1}|$) entre deux points consécutifs z_{k-1} et z_k de C tend vers 0 (noter que $z_n = z_0$). D'autre part, l'intérieur du polygone P_n de sommets $z_0, z_1, \cdots, z_n = z_0$ sera entièrement contenu dans D dès que Δ_n sera suffisamment petit. Comme $\displaystyle\oint_{P_n} f(z)\, dz = 0$, alors

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C f(z)\, dz - S_n + S_n - \oint_{P_n} f(z)\, dz.$$



Donc pour tout $\varepsilon > 0$ avec Δ_n suffisamment petit on aura

$$\begin{aligned} I = \left|\oint_C f(z)\,dz\right| &\leq \left|\oint_C f(z)\,dz - S_n\right| + \left|S_n - \oint_{P_n} f(z)\,dz\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \int_{[z_{k-1},z_k]} f(z)\,dz\right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{[z_{k-1},z_k]} f(z_k) - f(z)\,dz\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} \int_{[z_{k-1},z_k]} \left|f(z) - f(z_k)\right| |dz| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2L_C} L_C = \varepsilon, \end{aligned}$$

en vertu de la continuité uniforme de f. Ceci qui implique $I = 0$ et donc $\oint_C f(z)\,dz = 0$, ce qui établit le résultat demandé. ■

Exemple 48

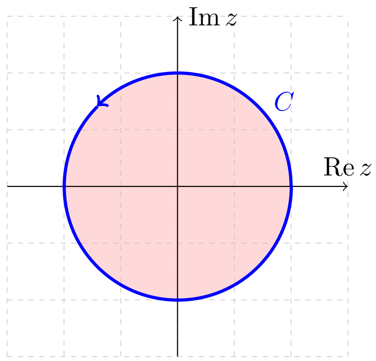
Soit le cercle de centre 0 et de rayon 2,

$$C = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2e^{it}\right\}.$$

Vérifier que $\oint_C z dz = 0$.

On a $dz = z'(t)\,dt = 2ie^{it}dt$, alors

$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} 2e^{it}\left(2ie^{it}dt\right) = 4i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt = \left[2e^{2it}\right]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0.$$



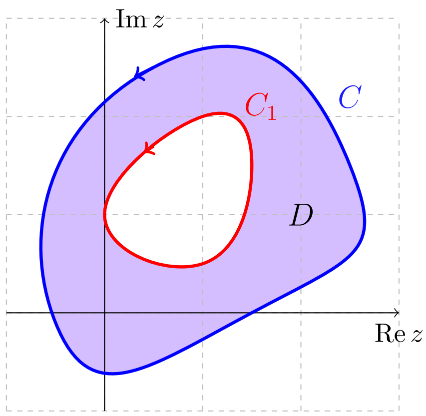
■

Théorème 52

Soit f une fonction **holomorphe** dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors-0.4cm

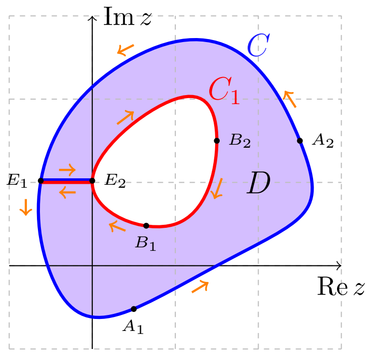
$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz.}$$

où C et C_1 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur.



Ce résultat montre que si nous désirons intégrer f le long d'une courbe C nous pouvons remplacer C par toute courbe C_1 pourvu que f soit holomorphe dans l'ouvert connexe compris entre C et C_1.

Démonstration.



Effectuons la coupure E_1E_2. La fonction f étant holomorphe dans D, nous avons d'après le théorème de Cauchy

$$\oint\limits_{E_1A_1A_2E_1E_2B_2B_1E_2E_1} f(z)\,dz = 0$$

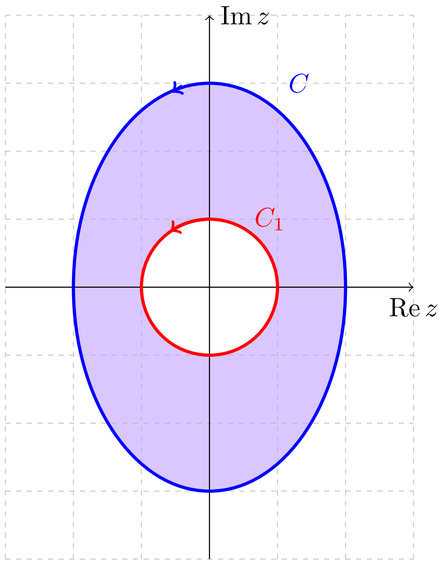
ou

$$\oint\limits_{E_1A_1A_2E_1} f(z)\,dz + \int\limits_{E_1E_2} f(z)\,dz + \oint\limits_{E_2B_2B_1E_2} f(z)\,dz + \int\limits_{E_2E_1} f(z)\,dz = 0.$$

Comme $\int\limits_{E_1E_2} f(z)\,dz = -\int\limits_{E_2E_1} f(z)\,dz$, on déduit que

$$\oint\limits_{E_1A_1A_2E_1} f(z)\,dz = -\oint\limits_{E_2B_2B_1E_2} f(z)\,dz = \oint\limits_{E_2B_1B_2E_2} f(z)\,dz \quad \text{ou} \quad \oint\limits_{C} f(z)\,dz = \oint\limits_{C_1} f(z)\,dz. \qquad \blacksquare$$

Exemple 49



Calculer $\oint\limits_{C} \frac{1}{z}dz$, où C est l'ellipse définie par

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2\cos t + 3i \sin t\}.$$

La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe dans le domaine limité par les courbes C et C_1 et sur ces courbes, où C_1 est le cercle de centre 0 et de rayon 1

$$C_1 = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = e^{it}\right\}.$$

Alors d'après la proposition précédente

$$\oint\limits_{C} \frac{1}{z}dz = \oint\limits_{C_1} \frac{1}{z}dz = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} d\left(e^{it}\right) = \int\limits_{0}^{2\pi} i dt = [it]_0^{2\pi} = 2\pi i. \qquad \blacksquare$$

Indice d'un point par rapport à courbe fermée

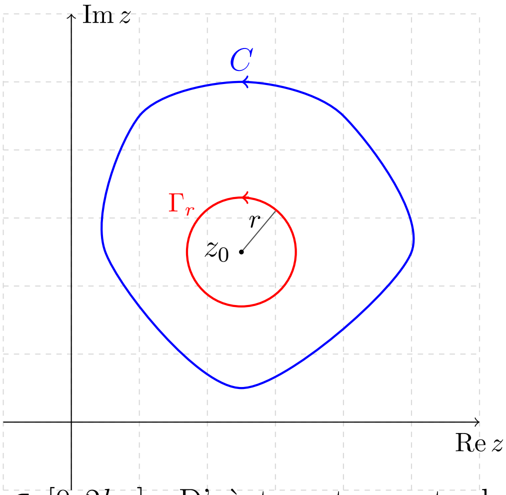
Soient C une courbe fermée paramétrée par un chemin $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $z_0 \notin C$. On appelle indice du point z_0 par rapport à C, le nombre

$$\operatorname{Ind}(z_0, C) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Proposition 53

L'indice du point z_0 par rapport à courbe fermée C est toujours un nombre entier, i.e. $\mathrm{Ind}\,(z_0, C) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On distingue deux cas possibles. Le premier cas, z_0 à l'extérieur de C. Dans ce cas la fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C. Alors d'après le théorème de Cauchy $\mathrm{Ind}\,(z_0, C) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \dfrac{1}{z - z_0} dz = 0 \in \mathbb{Z}$.



Le deuxième cas, z_0 intérieur à C. Supposons que C fait k tours autour de z_0 et soit Γ_r un cercle de rayon r, centré en $z = z_0$, tel que Γ_r soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé car $z = z_0$ est un point intérieur]. D'après le théorème précédent

$$\int\limits_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int\limits_{\Gamma_r} \frac{1}{z - z_0} dz. \tag{3.1}$$

D'autre part le cercle Γ_r lorsque parcourt k tours autour de z_0, peut être paramétré par $t \mapsto z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2k\pi]$. D'où tenant compte de $dz = ire^{it}dt$, on obtient

$$\mathrm{Ind}\,(z_0, C) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2k\pi} \frac{ire^{it}dt}{re^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2k\pi} dt = k \in \mathbb{Z},$$

qui est le résultat cherché. ∎

Le nombre $\mathrm{Ind}\,(z_0, C)$ désigne le nombre de tours que fait C autour de z_0. Si k est positif, les tours se font dans le sens positif, sinon k est négatif.

3.3.3 Primitives et intégration

Si f et F sont **holomorphes** dans un domaine connexe D et telles que $F'(z) = f(z)$, alors F est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée ou primitive de f et est notée $F(z) = \displaystyle\int f(z)\, dz$.

Exemple 50

On a $\dfrac{d}{dz}(3z^2 - 4\sin z) = 6z - 4\cos z$, alors

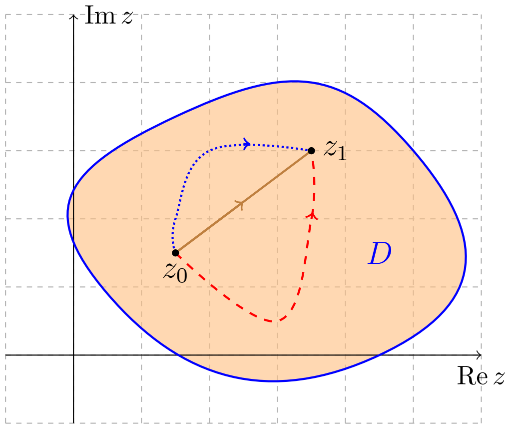
$$\int (6z - 4\cos z)\, dz = 3z^2 - 4\sin z + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

La fonction $z \mapsto 3z^2 - 4\sin z$ est une primitive de $z \mapsto 6z - 4\cos z$. ∎

Théorème fondamental de l'intégration

Soient f et F deux fonctions **holomorphes** dans un domaine **connexe** D telles que $F'(z) = f(z)$. Si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D, alors pour toute courbe C de point initial z_0 et de point final z_1, on a

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = [F(z)]_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0).}$$



Ce résultat est conséquence du théorème de Cauchy et signifie que si f est holomorphe alors la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin suivi pour aller de z_0 à z_1.

Démonstration. Soient $z_0, z_1 \in D$ et C une courbe dans D de point initial z_0 et de point final z_1. D'après le théorème de Cauchy

$$\int_C f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_0]} f(z)\,dz = 0,$$

où $[z_1, z_0]$ est le segment de droite d'extrémités z_1 et z_0. Alors

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_1]} F'(z)\,dz.$$

Rappelons que $[z_0, z_1]$ est paramétré par la fonction $t \mapsto z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)\,t,\ 0 \le t \le 1$. D'où

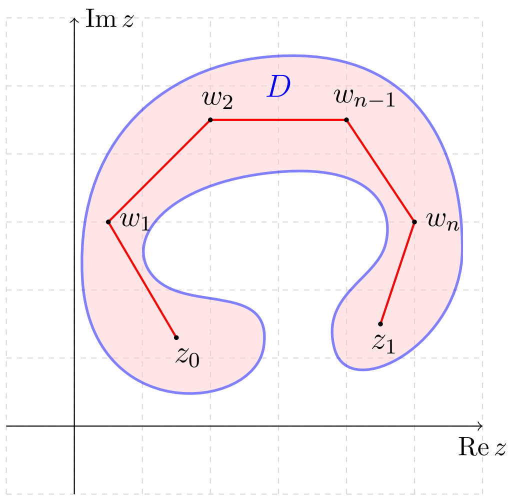
$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_1]} F'(z)\,dz &= \int_0^1 F'\Big(z_0 + (z_1 - z_0)\,t\Big)(z_1 - z_0)\,dt \\ &= \Big[F\Big(z_0 + (z_1 - z_0)\,t\Big)\Big]_{t=0}^1 = F(z_1) - F(z_0).\end{aligned}$$

Si le segment de droite $[z_0, z_1]$ n'est pas inclus dans D, nous joignons z_0 avec z_1 par une ligne polygonale de sommets successifs $z_0, w_1, \cdots, w_n$ et z_1.

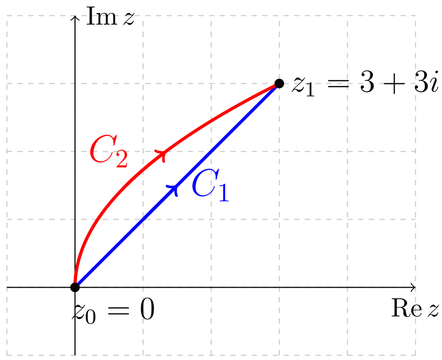
Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_{[z_0,w_1]} f(z)\,dz + \cdots + \int_{[w_n,z_1]} f(z)\,dz \\ &= F(w_1) - F(z_0) + \cdots + F(z_1) - F(w_n) \\ &= F(z_1) - F(z_0),\end{aligned}$$

qui est le résultat demandé. ■



Exemple 51



Évaluer $\int_C 2zdz$ de $z_0 = 0$ à $z_1 = 3+3i$ le long de la parabole

$$C_1 = \left\{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0,3] \text{ où } z(t) = \tfrac{1}{3}t^2 + it\right\}$$

et le long du segment de droite

$$C_2 = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0,1] \text{ où } z(t) = 3t + 3it\}.$$

Sur la parabole C_1, on a $z(t) = \frac{1}{3}t^2 + it$, $dz = z'(t)\,dt = \left(\frac{2}{3}t + i\right) dt$ et

$$\int_{C_1} 2zdz = \int_0^3 2\left(\tfrac{1}{3}t^2 + it\right)\left(\tfrac{2}{3}t + i\right) dt = \left[\left(\tfrac{1}{3}t^2 + it\right)^2\right]_0^3 = 18i.$$

Sur le segment C_2, on a $z(t) = 3t + 3it$, $dz = z'(t)\,dt = (3+3i)\,dt$ et

$$\int_{C_2} 2zdz = \int_0^1 2(3t+3it)(3+3i)\,dt = \left[(3t+3it)^2\right]_0^1 = 18i.$$

Par le théorème fondamental de l'intégration $\displaystyle\int\limits_C 2zdz = \int\limits_0^{3+3i} 2zdz = \left[z^2\right]_0^{3+3i} = 18i.$

Nous observons comment il est plus facile d'évaluer ces intégrales en utilisant une primitive, au lieu de paramétrer les chemins d'intégration. ▪

Une autre conséquence du théorème de Cauchy est la proposition suivante.

Théorème 54

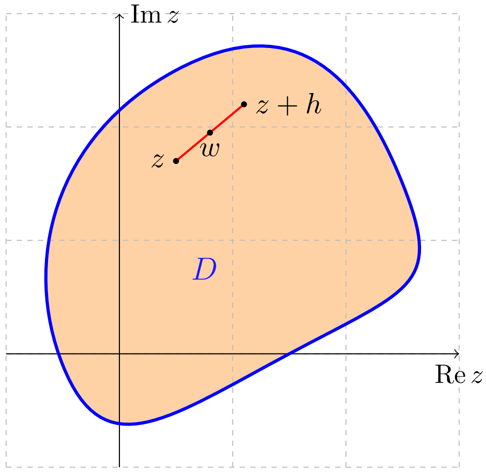
Soit f une fonction holomorphe dans un domaine **simplement connexe** D et soient a et z des points de D. Alors la fonction $z \mapsto F(z) = \displaystyle\int\limits_a^z f(w)\,dw$ est holomorphe dans D et $F'(z) = f(z)$.

Ce théorème montre que si f est holomorphe, alors elle admet une primitive holomorphe. Ce résultat n'est pas valable pour les domaines multiplement connexes. En effet, par exemple la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais sa fonction primitive $z \mapsto F(z) = \operatorname{Log} z$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. Soit h dans $\mathbb{C}^*$ tel que $z+h$ reste dans D. Nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \tfrac{1}{h}\left(\int\limits_a^{z+h} f(w)\,dw - \int\limits_a^z f(w)\,dw\right) - f(z) = \tfrac{1}{h}\left(\int\limits_z^{z+h} (f(w) - f(z))\,dw\right).$$

D'après le théorème de Cauchy, la dernière intégrale ne dépend pas du chemin joignant z à $z+h$ pourvu que l'on reste dans D. En particulier nous pouvons choisir comme chemin, le segment de droite d'extrémités z et $z+h$. Le nombre complexe h étant choisi suffisamment petit pour que le segment considéré appartienne à D.



La fonction f étant continue nous avons pour tout point w de ce segment de droite $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$, pourvu que $|w - z| < \delta$ ce qui est certainement réalisé si $|h| < \delta$.

De plus, on a $\left|\int\limits_{z}^{z+h} (f(w) - f(z))\, dw\right| < \varepsilon\, |h|$, et donc

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int\limits_{z}^{z+h} (f(w) - f(z))\, dw\right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |h| < \delta.$$

Ceci revient à dire que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$, i.e. F est holomorphe avec $F'(z) = f(z)$. ■

Théorème de Morera

Contrairement aux fonctions d'une variable réelle, pas toutes les fonctions continues d'une variable complexe admettent des primitives holomorphes. Par exemple, la fonction $z \mapsto f(z) = z\overline{z}$ est continue dans $\mathbb{C}$ mais n'a pas de primitives holomorphes.

Il existe un résultat dû à Morera qui est souvent appelé la réciproque du théorème de Cauchy.

Théorème 55

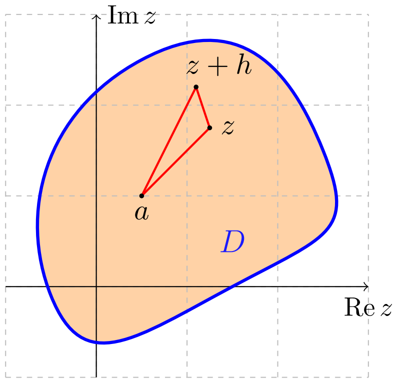
Soit f une fonction continue dans un domaine **simplement connexe** D, supposons que $\oint\limits_{T} f(z)\, dz = 0$ pour tout triangle T dans D.

Alors f est holomorphe dans D et donc admet une primitive holomorphe dans D.

Démonstration.

Soit a un point fixé dans D. On définit la fonction F dans D par $F(z) = \int\limits_{a}^{z} f(w)\, dw$. Soit h dans $\mathbb{C}^*$ tel que $z+h$ reste dans D.

Comme l'intégrale de f le long du triangle de sommets a, z et $z+h$ vaut zéro, i.e. $\int\limits_{a}^{z} f(w)\, dw + \int\limits_{z}^{z+h} f(w)\, dw + \int\limits_{z+h}^{a} f(w)\, dw = 0$,



alors $F(z+h) - F(z) = \int\limits_a^{z+h} f(w)\,dw - \int\limits_a^{z} f(w)\,dw = \int\limits_z^{z+h} f(w)\,dw.$

D'où

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int\limits_z^{z+h} (f(w)-f(z))\,dw\right|.$$

La fonction f étant continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout w dans le segment de droite $[z, z+h]$,

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon \text{ pourvu que } 0 < |w-z| < \delta,$$

ce qui est réalisé si $|h| < \delta$. Nous avons donc

$$\frac{1}{|h|}\left|\int\limits_z^{z+h} (f(w)-f(z))\,dw\right| \leq \frac{1}{|h|}\int\limits_z^{z+h} \Big|f(w)-f(z)\Big|\,|dw| < \frac{1}{|h|}\varepsilon\,|h| = \varepsilon.$$

Ce qui implique que la fonction F est holomorphe dans D, ainsi que sa fonction dérivée f. ■

Ce théorème peut être étendu aux ouverts multiplement connexes mais dans ce cas la primitive n'est pas nécessairement holomorphe dans D.

Exemple 52

On reprend l'exemple de la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais sa fonction primitive $z \mapsto F(z) = \operatorname{Log} z$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. ▪

Les résultats suivants sont des conséquence des théorèmes de Morera et celui de Cauchy.

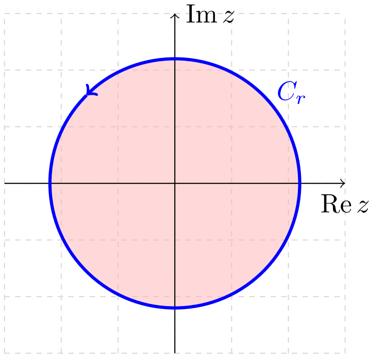
Corollaire 56

Si f une fonction continue dans un domaine **connexe** D, alors f admet une primitive holomorphe dans D si et seulement si $\oint\limits_C f(z)\,dz = 0$ pour toute courbe fermée C contenue ainsi que son intérieure dans D.

Corollaire 57

Si f une fonction continue dans un domaine **connexe** D, telle que il existe une courbe fermée C dans D dont l'intégrale $\oint\limits_C f(z)\,dz$ est non nulle, alors la fonction f n'admet pas de primitives holomorphe sur D.

Exemple 53

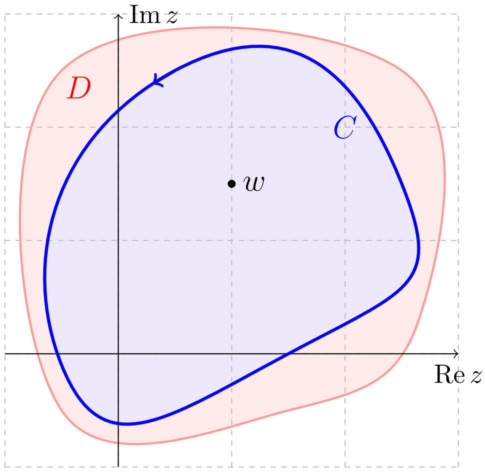


Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$.
Si on intègre la fonction f le long du cercle $C_r, r > 0$ paramétré par le chemin $t \mapsto z(t) = re^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$, on trouve

$$\oint_{C_r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

Puisque l'intégrale $\oint_{C_r} \frac{1}{z} dz$ est non nulle, on déduit que la fonction f n'admet pas de primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ malgré elle est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. ∎

3.4 Formule intégrale de Cauchy



Soient f une fonction **holomorphe** dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et C une courbe fermée simple contenue ainsi que son intérieure dans D.
Si w est un point intérieur à C, alors

$$\boxed{f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - w} dz,}$$

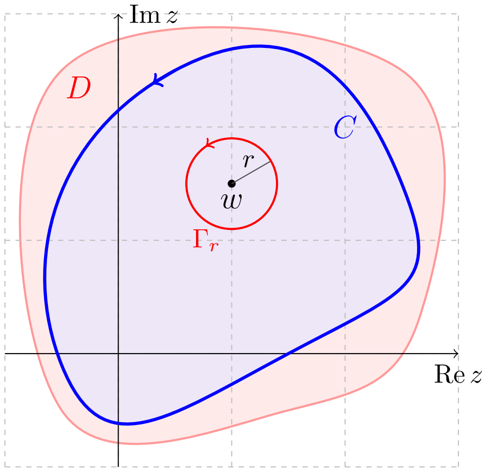
où la courbe C est décrite dans le sens direct.
De même la n-ième dérivée de f en w est donnée par

$$\boxed{f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.}$$

- La première formule peut être considérée comme un cas particulier de la deuxième si l'on pose $0! = 1$.
- Les deux formules précédentes sont appelées **formules intégrales de Cauchy** et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C.
- Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première dans un domaine simplement connexe D, toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D.
  Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Démonstration.

La fonction $z \mapsto \dfrac{f(z)}{z-w}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C sauf au point $z = w$. D'après le théorème 52 page 43 nous avons



$$\oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz = \oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

où l'on peut prendre pour contour Γ_r un cercle centré en w et de rayon r suffisamment petit. L'équation de Γ_r s'écrit $|z-w| = r$ ou $z(t) = w + re^{it}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$. On a donc $dz = ire^{it}dt$ et l'intégrale sur Γ_r devient

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(w+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt = i\int_0^{2\pi} f\left(w+re^{it}\right) dt.$$

On a donc

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz = i\int_0^{2\pi} f\left(w+re^{it}\right) dt.$$

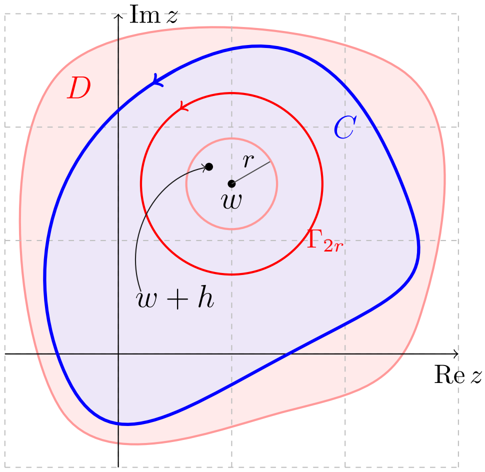
En prenant la limite des deux membres et en utilisant la continuité de f, on obtient

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz = i\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f\left(w+re^{it}\right) dt = i\int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f\left(w+re^{it}\right) dt = i\int_0^{2\pi} f(w)\, dt = 2\pi i f(w).$$

On a donc le résultat demandé $f(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz.$

Maintenant, on va démontrer que f' existe et est donnée par $f'(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz.$

Soit $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $w+h$ reste dans l'intérieur du cercle Γ_r centré en w et de rayon r. On a donc



$$\begin{aligned}\frac{f(w+h)-f(w)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-w-h}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-w}dz\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)}dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^2}dz + \frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)^2}dz.\end{aligned}$$

Nous montrons que le dernier terme tend vers zéro quand $h \to 0$.

D'après le théorème 52 page 43, on a

$$\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)^2}dz = \frac{h}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{2r}} \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)^2}dz$$

La fonction f étant holomorphe dans D, nous pouvons trouver un nombre positif M tel que $|f(z)| \leq M$. On a aussi $|z-w| = 2r$ et $|z-w-h| \geq |z-w| - |h| \geq 2r - r = r$. Alors

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{2r}} \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)^2}dz\right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{M(2\pi \cdot 2r)}{r(2r)^2} = |h|\frac{M}{2r^2}.$$

Il en résulte que le premier membre tend vers zéro quand $h \to 0$. On obtient alors le résultat cherché, i.e.

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^2}dz.$$

Par récurrence sur n, on voit par un raisonnement semblable que l'on a pour la n-ième dérivée $f^{(n)}$ et sous les mêmes hypothèses, la relation

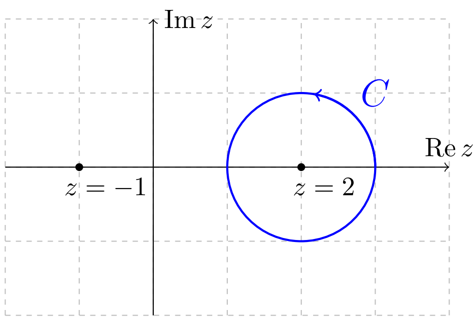
$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz.$$

Ce résultat est équivalent à

$$f^{(n)}(w) = \frac{d^n}{dw^n}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-w}dz\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial^n}{\partial w^n}\left(\frac{f(z)}{z-w}\right)dz,$$

qui est une extension aux intégrales complexes de la règle de dérivation sous le signe $\oint$. ■

Exemple 54



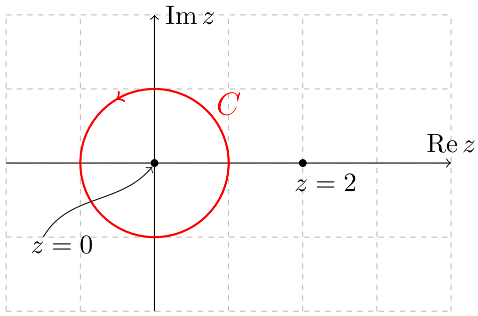
Utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer $\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz$ le long du cercle $C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0, 2\pi] \text{ où } z(t) = 2 + e^{it}\}$.

La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z+1}$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, alors d'après la formule intégrale de Cauchy avec $w = 2$, on a

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)}dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-2}dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i\frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}\pi i.$$ ■

Exemple 55

Calculons l'intégrale $\oint_C \frac{1}{z^{n+1}(z-2)}dz$ le long du C le cercle unité qui est centré à l'origine et de rayon $r=1$.



Observons que si on pose $f(z) = \frac{1}{z-2}$ on obtient une fonction holomorphe sur le disque fermé centré à l'origine et de rayon $r=1$. D'après la deuxième formule intégrale de Cauchy la dérivée d'ordre n de f au point $z=0$ est égale à $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$.

Donc on aura

$$\oint_C \frac{1}{z^{n+1}(z-2)}dz = \tfrac{2\pi i}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z-2}\right)\Big|_{z=0}.$$

Ainsi, puisque pour tout entier n on a $\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z-2}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(z-2)^{n+1}}$ on en déduit que

$$\oint_C \frac{1}{z^{n+1}(z-2)}dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(-2)^{n+1}} = -\frac{\pi i}{2^n}. \quad \blacksquare$$

3.4.1 Quelques théorèmes importants

Dans ce qui suit on énonce quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

Inégalité de Cauchy

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C et sur C, où C désigne le cercle d'équation $|z-z_0| = r$, alors

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{M\,n!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

où M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C, i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C.

Démonstration. On a d'après les formules intégrales de Cauchy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Comme $|z - z_0| = r$ sur C et la longueur de C est $2\pi r$, alors on a

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{M\,n!}{r^n},$$

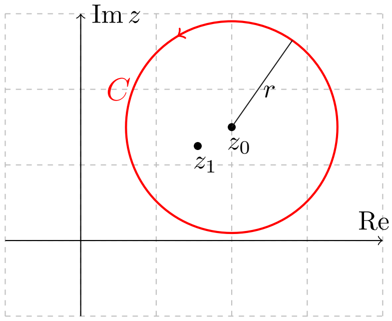
qui est le résultat demandé. ■

Théorème de Liouville

Une fonction f entière [holomorphe dans $\mathbb{C}$] et bornée [$|f(z)| < M$, où M désigne une constante] est nécessairement une constante.

Démonstration.

Soit z_0 et z_1 deux points quelconques du plan complexe $\mathbb{C}$. Considérons le cercle C de rayon r centré en z_0 et contenant le point z_1. On a d'après la formule intégrale de Cauchy



$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_1}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \\ &= \frac{z_1 - z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_1)}dz. \end{aligned}$$

D'autre part $|z - z_0| = r$ sur C et

$$|z_1 - z_0| = |z - z_1| = |z - z_0 + z_0 - z_1| \geq |z - z_0| - |z_0 - z_1| = r - |z_0 - z_1| \geq \frac{r}{2}$$

si l'on choisit r suffisamment grand pour que $|z_0 - z_1| \leq \frac{r}{2}$. Alors tenant compte de $|f(z)| < M$ et de ce que la longueur de C est $2\pi r$, on a

$$|f(z_1) - f(z_0)| = \frac{|z_1 - z_0|}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_1)}dz\right| \leq \frac{|z_1 - z_0|}{2\pi}\cdot\frac{(2\pi r)M}{r\frac{r}{2}} = \frac{2|z_1 - z_0|M}{r}.$$

Faisant tendre r vers $+\infty$ on voit alors que $|f(z_1) - f(z_0)| = 0$ soit $f(z_1) = f(z_0)$ ce qui montre que f est une constante. ■

Théorème fondamental de l'algèbre (Théorème de D'Alembert)

Toute équation algébrique $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, possède au moins une racine.

De cela on déduit que $P(z) = 0$ possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

Démonstration. Si $P(z) = 0$ n'a pas de racine, alors $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ est entière (holomorphe dans $\mathbb{C}$). De plus est bornée (en fait tend vers 0) quand $|z| \to +\infty$.
Alors d'après le théorème précédent de Liouville f et donc P est constant. On est donc conduit à une contradiction et on en conclut que $P(z) = 0$ possède au moins une racine, ou comme on le dit quelquefois, P a au moins un zéro.
Soit α cette racine ; alors $P(\alpha) = 0$. D'où

$$P(z) - P(\alpha) = a_1 (z - \alpha) + a_2 \left(z^2 - \alpha^2\right) + \cdots + a_n (z^n - \alpha^n) = (z - \alpha) Q(z),$$

où Q est un polynôme de degré $(n - 1)$.
En procédant à nouveau comme précédemment, nous voyons que Q possède au moins un zéro que nous appellerons β [qui peut être égal à α], d'où $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta) R(z)$. En continuant de cette manière on voit que P a exactement n zéros. ■

Théorème de Gauss sur la valeur moyenne

Si f est holomorphe à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - z_0| = r$ et sur C, alors $f(z_0)$ est la moyenne des valeurs de f sur C, i.e.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt.$$

Démonstration. D'après la formule intégrale de Cauchy $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz$. Le cercle C peut être paramétré par $z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt,$$

qui est le résultat demandé. ■

Théorème du module maximum

Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, si de plus f n'est pas constante alors le maximum de $|f(z)|$ est atteint sur C.

Il y a plusieurs démonstrations différentes, nous allons présenter ici la démonstration qui est basée sur le théorème de Gauss sur la valeur moyenne.

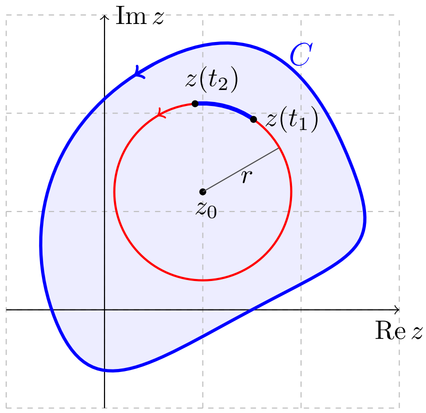
Démonstration.

Soit z_0 un point intérieur de C. D'après le théorème de Gauss sur la valeur moyenne, on a

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right| dt.$$

Supposons que $|f(z_0)|$ soit un maximum, on a donc

$$\left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right| \leq |f(z_0)|\,.$$



Si $|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)|$ pour une valeur de t, alors d'après la continuité de f cette inégalité est encore valable pour l'arc $\{z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [t_1, t_2]\}$. Mais dans ce cas on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right| dt < |f(z_0)|\,,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité ci-dessus. On en déduit que dans tout disque ouvert $D_r(z_0)$ contenu dans C, f est constante. Si f n'est pas constante, $|f(z)|$ atteint sa valeur maximum sur C. ■

Théorème du module minimum

Si f est une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, et sur C, si de plus $f(z) \neq 0$ à l'intérieur de C alors$|f(z)|$ atteint son minimum sur C.

Démonstration. La fonction f étant holomorphe dans C et sur C, f ne s'annulant pas dans C, on en déduit que $\dfrac{1}{f}$ est holomorphe dans C. D'après le théorème du module maximum la fonction$\dfrac{1}{|f|}$ ne peut atteindre son maximum à l'intérieur de C et donc $|f|$ ne peut atteindre son minimum dans C. La fonction $|f|$ ayant un minimum, celui-ci est donc atteint sur C. ■

Si f est holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, f s'annulant en un point intérieur à C, alors $|f|$ n'atteint pas nécessairement sa valeur minimum sur C. En effet, si $f(z) = z$ pour $|z| \leq 1$, C est donc le cercle unité centré à l'origine. Nous avons $f(z) = 0$ en $z = 0$. Si $f(z) = re^{it}$, alors $|f(z)| = r$ et il est clair que la valeur minimum de $|f(z)|$ n'est pas atteinte sur C mais dans C pour $r = 0$, i.e. en $z = 0$.

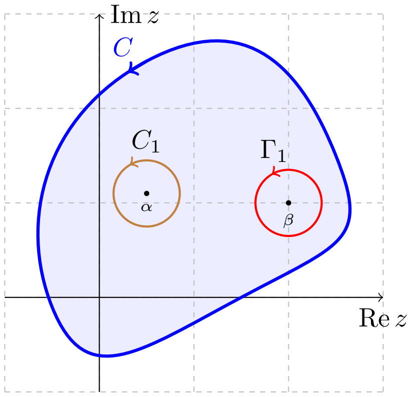
Théorème de l'argument

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe formée simple C, et sur C, à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C. On a alors

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P.$$

où N et P désignent respectivement le nombre de zéros comptés avec multiplicité et le nombre de pôles comptés avec leur ordre, de f intérieurs à C.

Démonstration.



D'abord, nous supposons que f est holomorphe à l'intérieur de C et sur C, à l'exception d'un pôle $z = \alpha$ d'ordre p, intérieur à C. Supposons également que dans C, f a un seul zéro $z = \beta$ de multiplicité n et aucun zéro sur C.

Démontrons que $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - p$.

Soit C_1 et Γ_1 deux cercles extérieurs l'un à l'autre situés dans C, et contenant respectivement $z = \alpha$ et $z = \beta$. Alors

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Le point $z = \alpha$ étant un pôle d'ordre p, donc $f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p}$, où F est holomorphe et différente de zéro dans et sur C_1. En prenant la dérivée logarithmique de f on trouve

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha}.$$

Si bien que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{p}{z-\alpha}dz = 0 - p = -p.$$

Le point $z = \beta$ étant un zéro d'ordre n, $f(z) = (z-\beta)^n G(z)$, où $G(z)$ est holomorphe et différente de zéro dans et sur Γ_1. Par dérivation logarithmique on obtient

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{n}{z-\beta}.$$

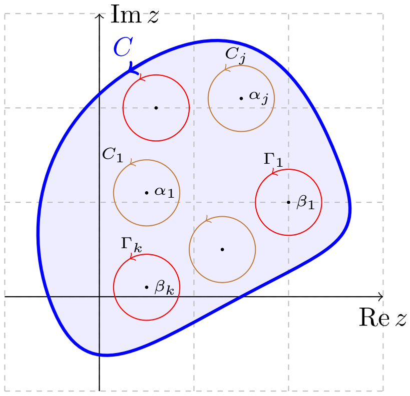
Si bien que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{G'(z)}{G(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{n}{z-\beta}dz = 0 + n = n.$$

Dans ces conditions on trouve le résultat demandé

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - p.$$

Maintenant, on démontre le théorème dans le cas général. On désigne respectivement par $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$ et $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ les pôles et les zéros de f situés à l'intérieur de C et l'on suppose que les ordres de multiplicité sont respectivement $p_1, p_2, \cdots, p_j$ et $n_1, n_2, \cdots, n_k$.



On entoure chaque pôle et chaque zéro par des cercles ne se recouvrant pas $C_1, C_2, \cdots, C_j$ et $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$. Ceci peut toujours être réalisé car les pôles et les zéros sont isolés. On a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_l} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{l=1}^{j} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_l} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{l=1}^{k} n_l + \sum_{l=1}^{j} p_l = N - P,$$

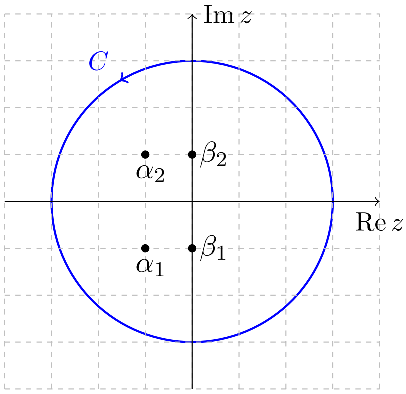
ce qui démontre le théorème. ∎

Remarque 58

Une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ qui est holomorphe sur le domaine D à l'exception de singularités isolées qui sont toutes des pôles pour f est dite fonction **méromorphe**.

Exemple 56

Calculons l'intégrale $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ où $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$ et C est le cercle $|z| = 4$.



La fonction f possède deux zéros doubles $\beta_1 = -i, \beta_2 = i$ [racines de z^2+1] et deux pôles triples en $\alpha_1 = -1-i, \alpha_2 = -1+i$ [racines de z^2+2z+2]. Tous ces zéros et ces pôles sont intérieurs à C : $|z| = 4$. On a donc $N = 2+2 = 4$ et $P = 3+3 = 6$, alors d'après le théorème de l'argument $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P = 4 - 6 = -2$.

D'où $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -4\pi i.$ ∎

Théorème de Rouché

Si f et g sont holomorphes dans et sur une courbe fermée simple C, et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C, alors $f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C.

Démonstration. Soit $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ et donc $g(z) = f(z) F(z)$ ou $g = fF$. Alors si N_1 et N_2 désignant respectivement le nombre de zéros intérieurs à C de $f + g$ et f, on a d'après le théorème de l'argument, utilisant le fait que ces fonctions n'ont pas de pôles à l'intérieur de C,

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(f' + g')(z)}{(f + g)(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(f' + f'F + fF')(z)}{(f + fF)(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F'(z)}{1 + F(z)} dz$$

et

$$N_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

On a donc

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F'(z)}{1 + F(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F'(z) \left(1 - F + F^2 - F^3 + \cdots\right)(z)\, dz = 0,$$

utilisant le fait que $|F| < 1$ sur C si bien que la série est uniformément convergente sur C et l'intégration terme à terme donne la valeur zéro. On a donc l'égalité $N_1 = N_2$ ainsi qu'il était demandé. ■

Exemple 57

L'équation $z^3 + e^{-1+iz} = 0$ admet exactement trois racines de module strictement plus petit que 1, comme on le voit en appliquant le théorème de Rouché aux fonctions $f(z) = z^3$ et $g(z) = e^{-1+iz}$ sur le cercle $|z| = 1$. ■