Chapitre 5

Séries de Laurent, Théorème des résidus

Sommaire

5.1 Séries de Laurent

Définition 87

Une série des puissances de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$= \cdots + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + a_3 (z-z_0)^3 + \cdots$$

s'appelle **série de Laurent** centrée au point $z_0 \in \mathbb{C}$.

La série des puissances négatives

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \cdots$$

s'appelle la **partie principale**.

La série des puissances positives

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

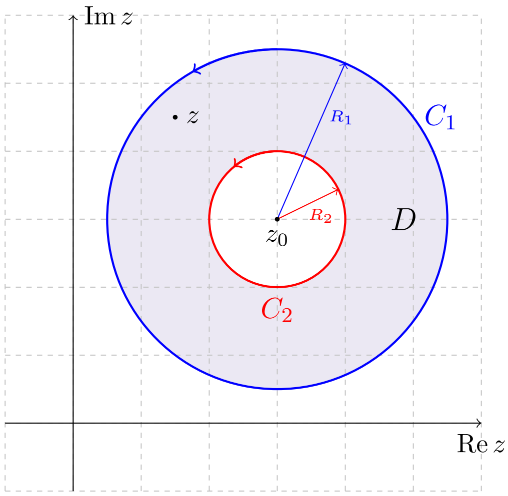
s'appelle la **partie régulière ou analytique**.

Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

On dira que la série de Laurent converge si ses parties principale et analytique convergent.

Théorème 88 (de Laurent)

Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre z_0 et de rayons respectifs R_1 et R_2.
On suppose que f est uniforme et **holomorphe** sur C_1 et C_2 et également dans la couronne D [ou région annulaire D] limitée par C_1 et C_2.
Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.
Alors la fonction f se développe de manière unique en série de Laurent centrée au point z_0 i.e.



$$\text{pour tout } z \in D, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{avec } C = C_1 \text{ ou } C_2.$$

Démonstration. D'après la formule intégrale de Cauchy, pour tout $z \in D$, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Notons que pour tout $w \in C_1$ on a $|z-z_0| < |w-z_0| = R_1$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Cette dernière série étant uniformément convergente dans C_1, ce qui nous permet d'intervertir les signes somme et intégrale :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}f(w)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw.$$

De la même façon que ci-dessus, en notant que pour tout $w\in C_2$ on a $R_2=|w-z_0|<|z-z_0|$, on peut écrire alors

$$\frac{-1}{w-z}=\frac{1}{z-z_0-(w-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}.$$

Et donc

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}f(w)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}dw=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw.$$

On en déduit que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

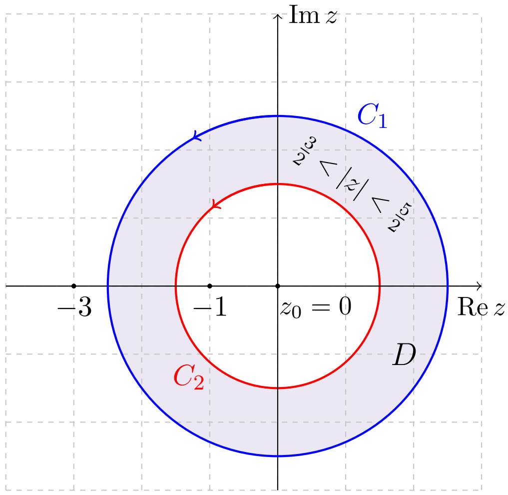
qui est le résultat demandé.

Noter que l'expression des coefficients an de la série de Laurent trouvée impliques que les a_n ne dépendent que de $f(z)$ et donc ils sont uniques. ∎

Exemple 62

Déterminons le développement en série de Laurent de la fonction $z\mapsto f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{z+3}\right)$

dans la couronne $D=\left\{z\in\mathbb{C},\ \frac{3}{2}<|z|<\frac{5}{2}\right\}$.



La fonction f est holomorphe dans D et sur sa frontière, car les singularités -1 et -3 sont à l'extérieur D.

Donc f admet un développement en série de Laurent centré à l'origine $z_0=0$.

Si $|z|>\dfrac{3}{2}>1$, on a

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\cdots.$$

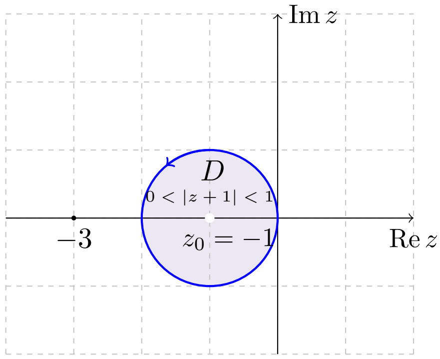
Si $|z| < \frac{5}{2} < 3$, on a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \cdots.$$

Alors dans la couronne $D = \left\{z \in \mathbb{C},\ \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\right\}$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right) = \cdots - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \cdots. \qquad \blacksquare$$

Exemple 63



Développons en série de Laurent la fonction de l'exemple précédent

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

mais dans le disque pointé de $z_0 = -1$,

$D = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z+1| < 1\}$.

Notons que pour tout $0 < |z+1| < 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+1+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z+1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^n.$$

D'où

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \cdots. \blacksquare$$

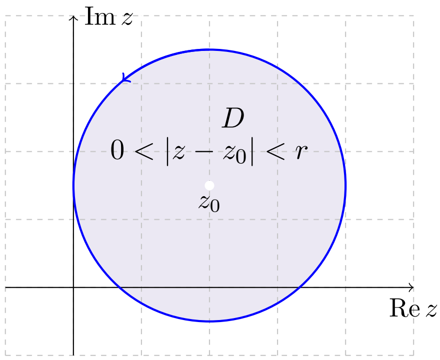
Exemple 64

Développons en série de Laurent la fonction $z \mapsto f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Rappelons que $e^w = \sum\limits_{n\geq 0}\frac{w^n}{n!}, w \in \mathbb{C}$, alors pour $w = \frac{1}{z}$ on a

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!z^n} = \cdots + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 1. \qquad \blacksquare$$

5.1.1 Classification des singularités



Le point z_0 est appelé **singularité isolée**, ou **point singulier isolé** de f, si la fonction f est holomorphe sur un disque pointé de z_0, $D = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < r\}$, $r > 0$.

Il est possible de classer les singularités **isolées** d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent.

Pôles

Si f à la forme (**??**) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

où $a_{-n}\neq 0$, alors $z=z_0$ est appelé un **pôle d'ordre** n.

Si $n=1$ on a affaire à un **pôle simple**.

Si $z=z_0$ est un pôle de f alors $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Exemple 65

La fonction $z\mapsto f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ de l'exemple 63 présente un pôle simple au point $z_0=-1$. ▪

Singularités apparentes

Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z=z_0$ mais si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existe, alors $z=z_0$ est appelée une **singularité apparente**. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z=z_0$ comme étant égal à $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Exemple 66

Si $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ alors $z=0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$. On définit $f(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$. On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left\{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right\}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots.$$ ▪

Singularités essentielles

Si f est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une **singularité essentielle**. Si $z=z_0$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une **infinité de terme**.

Exemple 67

Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots,$$

on en déduit que $z=0$ est une singularité essentielle. ▪

Singularités à l'infini

En posant $z = \dfrac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w = 0$.

Exemple 68

La fonction $z \mapsto f(z) = z^3$ a un pôle triple en $z = \infty$ car $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \dfrac{1}{w^3}$ possède un pôle triple en $z = 0$. ▪

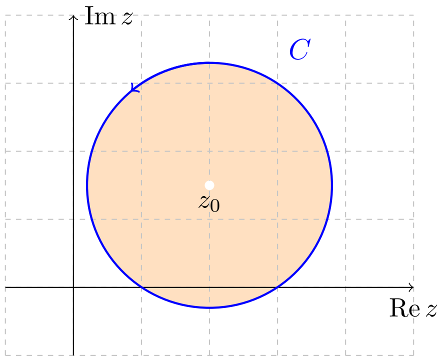
Exemple 69

De la même façon $z \mapsto f(z) = e^z$ possède une singularité essentielle en $z = \infty$ car

$$F(w) = f\left(\tfrac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$$

a une singularité essentielle en $w = 0$. ▪

5.2 Résidus



Soit f une fonction holomorphe et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C, **excepté** au point $z = z_0$ centre de C. Alors comme nous l'avons vu dans la section précédente, f possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$, donné par

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \quad & a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \\ & + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \cdots \end{aligned} \tag{5.1}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Dans le cas particulier $n = -1$ on a

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{5.3}$$

Observons que l'intégrale $\oint_C f(z)\, dz$ s'exprime à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (5.1).

On peut obtenir formellement (5.3) à partir de (5.1) par intégration terme à terme en utilisant le résultat

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^p} dz = \begin{cases} 2\pi i & p = 1 \\ 0 & p \in \mathbb{Z},\ p \neq 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Définition 89

Avec les notations ci-dessus, le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de z_0 s'appelle le **résidu** de f au point z_0 et se note

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz.$$

5.2.1 Calcul des résidus

Pour obtenir le résidu d'une fonction f en $z = z_0$ on pourrait croire d'après (5.1) à la nécessité d'écrire le développement de f en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$. Dans beaucoup de cas on peut déterminer le résidu sans passer par le développement de Laurent.

Pôle simple

Si $z = z_0$ est un pôle simple le calcul du résidu est particulièrement simple

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z). \tag{5.5}$$

Exemple 70

Trouver le résidu de $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ en $z = 1$.
Le point $z = 1$ est un pôle simple et le résidu en $z = 1$ est

$$\mathrm{Res}\,(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \left\{ \frac{z+1}{(z+2)(z-1)} \right\} = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z+2} = \frac{2}{3}.$$

■

Remarque 90

Si $z = z_0$ est un pôle simple et $f(z)$ se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0 \text{ et } Q'(z_0) \neq 0,$$

alors en utilisant la règle de L'Hôpital, nous avons

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \tag{5.6}$$

Exemple 71

Trouver le résidu de $f(z) = \dfrac{e^{z+1}}{z^3+1}$ en $z=-1$.

Le point $z=-1$ est un pôle simple et le résidu peut être calculé par la formule (5.6) :

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \frac{\left.e^{z+1}\right|_{z=-1}}{\left.(z^3+1)'\right|_{z=-1}} = \frac{\left.e^{z+1}\right|_{z=-1}}{\left.3z^2\right|_{z=-1}} = \frac{e^{1-1}}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

Pôle d'ordre $m \geq 2$

Dans le cas où $z = z_0$ est un **pôle d'ordre** $m \geq 2$, le résidu a_{-1} est donné par la formule

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{(z-z_0)^m f(z)\right\}. \tag{5.7}$$

En effet. si z_0 est pôle d'ordre m de f, alors le développement en série de Laurent de f est

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \; & a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \\ & + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $(z-z_0)^m$, on a

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \cdots,$$

qui représente la série de Taylor de la fonction analytique du premier membre. Par dérivation des deux membres $(m-1)$ fois par rapport à z, on obtient

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{(z-z_0)^m f(z)\right\} = (m-1)!a_{-1} + \frac{m!}{1!} a_0 (z-z_0) + \frac{(m+1)!}{2!} a_1 (z-z_0)^2 + \cdots.$$

Soit en faisant tendre z vers z_0

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{(z-z_0)^m f(z)\right\} = (m-1)!a_{-1},$$

d'où l'on déduit le résultat cherché.

Si $m = 2$ (**pôle double**) le résultat est

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left\{(z-z_0)^2 f(z)\right\}. \tag{5.8}$$

Exemple 72

Trouver le résidu de $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ en $z=-1$. Le point $z=-1$ est un pôle double et on a d'après (5.8)

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left\{(z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right)\right\} = -\frac{1}{4}. \qquad \blacksquare$$

Point singulier essentiel

Si $z = z_0$ est un **point singulier essentiel**, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

Exemple 73

Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, alors $z = 0$ est un point singulier essentiel et d'après le développement connu

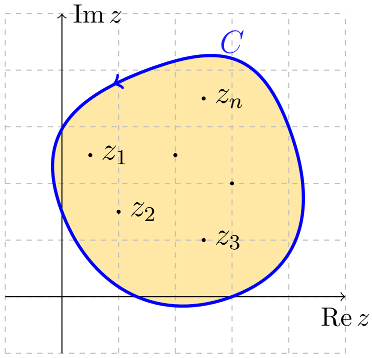
$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots,$$

avec $u = -\frac{1}{z}$, on trouve

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots,$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ sa valeur est -1. ∎

5.3 Le théorème des résidus



Soit f une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, sauf en un nombre fini de singularités z_1, z_2, z_3, ... z_n intérieures à C.

Alors le théorème des résidus établit que :

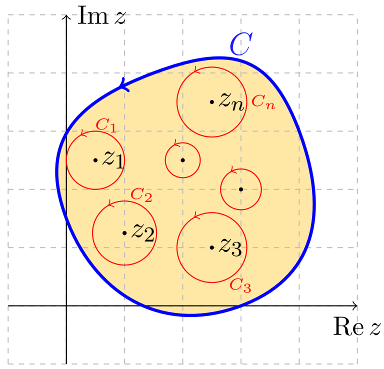
Théorème 91

L'intégrale de f le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de f en les singularités contenues dans C, i.e.

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Notons que le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce théorème.

Démonstration.



On construit les cercles $C_1, C_2, \cdots, C_n$ centrés en $z_1, z_2, \cdots, z_n$ et situés entièrement à l'intérieur de C.

D'après le théorème 52 page 43 on a

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,dz.$$

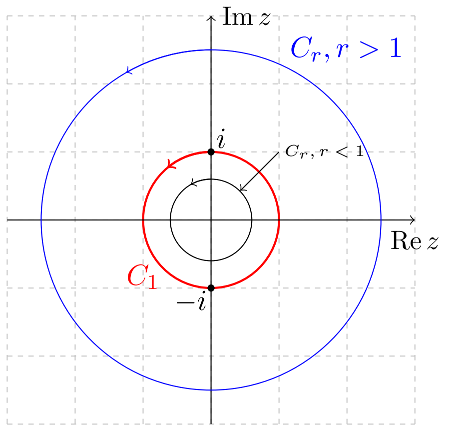
Mais d'après la formule (5.3), $\oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Alors on déduit que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) = 2\pi i \cdot \text{la somme des résidus de } f \text{ dans } C,$$

qui est le résultat demandé. ■

La démonstration précédente établit le théorème des résidus pour des domaines simplement connexes contenant un nombre fini de singularités de f. On peut l'étendre à des domaines contenant une infinité de singularités isolées de f ou étant multiplement connexes.

Exemple 74



Calculer $\oint_{C_r} f(z)\,dz$ où $f(z) = \dfrac{z^3+1}{z^2+1}$ et C_r le cercle centré à l'origine et de rayon r, $r \neq 1$.

La fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{z^3+1}{z^2+1}$$

possède deux pôles simples $z_1 = i$, $z_2 = -i$ et on a d'après la remarque 90 page 81,

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{z^3+1\Big|_{z=i}}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}} = \frac{z^3+1\Big|_{z=i}}{2z\Big|_{z=i}} = \frac{1-i}{2i} = \frac{-1-i}{2},$$

et

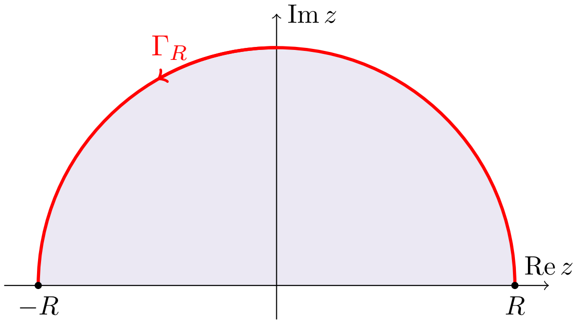
$$\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{z^3+1\Big|_{z=-i}}{(z^2+1)'\Big|_{z=-i}} = \frac{z^3+1\Big|_{z=-i}}{2z\Big|_{z=-i}} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{-1+i}{2}.$$

Notons que pour $0 < r < 1$ l'intégrale $\oint_{C_r} \dfrac{z^3+1}{z^2+1} dz = 0$ car la fonction f est holomorphe à l'intérieur de C_r et sur C_r. Mais, si $r > 1$ on aura

$$\oint_{C_r} \frac{z^3+1}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)\right) = 2\pi i \left(\frac{-1-i}{2} + \frac{-1+i}{2}\right) = -2\pi i. \quad ■$$

5.4 Application du théorème des résidus

5.4.1 Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales



Lorsque l'on calcule certaines types d'intégrales, il est souvent nécessaire de montrer que $\int_{\Gamma_R} F(z)\,dz$ et $\int_{\Gamma_R} F(z)\,e^{i\alpha z}dz, \alpha \in \mathbb{R}^*$ tendent vers zéro quand $R \to +\infty$, où Γ_R est un demi-cercle centré à l'origine et de rayon R.

Les proposition suivantes sont fondamentales.

Proposition 92

Si $|F(z)| \leq \dfrac{M}{R^k}$ pour $z = R\,e^{it}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 0$.

Démonstration. D'après le théorème d'estimation [voir l'inégalité (3.1) page 39], nous avons

$$\left| \int_{\Gamma_R} F(z)\,dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}},$$

car la longueur L de l'arc Γ_R est $L = \pi R$. Alors

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{\Gamma_R} F(z)\,dz \right| = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 0. \qquad \blacksquare$$

Proposition 93

Si $|F(z)| \leq \dfrac{M}{R^k}$ pour $z = R\,e^{it}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z)\,dz = 0, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Si $z = R\,e^{it}$, on a

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z)\,dz = \int_0^{\pi} e^{i\alpha R\,e^{it}} F\left(R\,e^{it}\right) R\,ie^{it}dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z}F(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} e^{i\alpha R e^{it}}F\left(R e^{it}\right)R i e^{it}dt\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} \left|e^{i\alpha R e^{it}}F\left(R e^{it}\right)R i e^{it}\right|dt \\
&= \int_0^{\pi} \left|e^{-\alpha R\sin t}e^{i\alpha R\cos t}F\left(R e^{it}\right)\right|Rdt \\
&= \int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin t}\left|F\left(R e^{it}\right)\right|Rdt \\
&\leq \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin t}dt = \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin t}dt.
\end{aligned}$$

De plus, par l'étude de la fonction $t \mapsto \frac{2}{\pi}t - \sin t$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on voit que $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La dernière intégrale est donc inférieure ou égale à

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}dt = \frac{2M}{R^{k-1}}\left[\frac{-\pi}{2\alpha R}e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi M}{\alpha R^k}\left(1 - e^{-\alpha R}\right),$$

qui tend vers zéro quand $R \to +\infty$ car α et k sont strictement positifs ce qui démontre le résultat annoncé. ■

5.4.2 Application aux transformées de Fourier

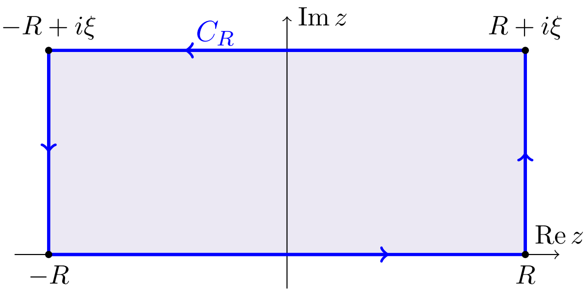
Définition 94

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.
Sa **transformée de Fourier** est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\xi x}dx.$$

La transformée de Fourier est un outil essentiel des mathématiques appliquées. Elle peut souvent être obtenue via le calcul des résidus.

Exemple 75



Calculons la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Considérons $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ où C_R désigne le rectangle d'extrémités $-R, R, R+i\xi$ et $-R+i\xi$, $\xi > 0$.
La fonction $z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}$ n'a aucune singularité à l'intérieur de C_R, alors $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$, i.e.

$$\int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{\xi} e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} idy + \int_{R}^{-R} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx + \int_{\xi}^{0} e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} idy = 0.$$

On a $\left| \int_{0}^{\xi} e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} idy \right| \leq \int_{0}^{\xi} \left| e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} \right| dy = \int_{0}^{\xi} e^{\frac{-R^2+y^2}{2}} dy \to 0$ quand $R \to +\infty$. De même $\int_{\xi}^{0} e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} idy \to 0$ quand $R \to +\infty$. Donc, lorsque $R \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = 0,$$

il vient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

On en déduit que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \blacksquare$$

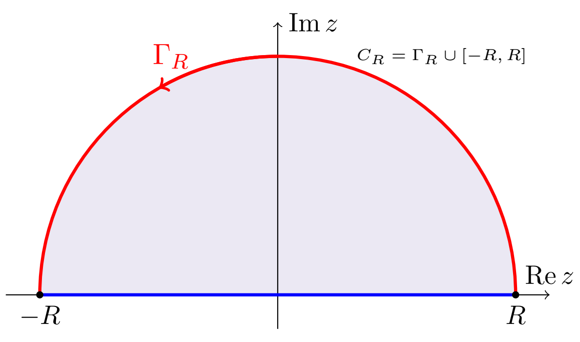
Cas d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle intégrable sur $\mathbb{R}$ et $z_k, \operatorname{Im} z_k \neq 0, k = 1, ..., n$ ses pôles.

Pour calculer la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

de la fonction f par la méthode des résidus, on considère $\int_{C_R} f(z) e^{-i\xi z} dz$, $\xi < 0$ où C_R désigne la



courbe fermée ou le **contour** fermé formé du segment $[-R,+R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Si le nombre R est suffisamment grand alors

$$\int_{C_R} f(z)\, e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{-i\xi z}, z_k\right),$$

i.e.

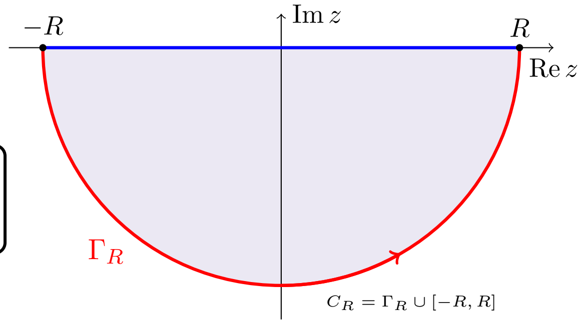
$$\int_{-R}^{R} f(x)\, e^{-i\xi x} dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\, e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{-i\xi z}, z_k\right),$$

Si l'on prend la limite quand $R \to +\infty$ et si l'on utilise le fait que $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, e^{-i\xi z} dz = 0$, on obtient

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{-i\xi z}, z_k\right), \text{ si } \xi < 0.}$$

De même, en choisissant le demi cercle avec des parties imaginaires négatives on obtient

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k<0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{-i\xi z}, z_k\right), \text{ si } \xi > 0.}$$



Exemple 76

Calculons la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

On a $z^2+1=0$ pour $z=i$ et $z=-i$, ces valeurs de z sont les pôles simples de $\dfrac{1}{z^2+1}$ et

$$\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, i\right) = \frac{e^{-i\xi z}\big|_{z=i}}{(z^2+1)'\big|_{z=i}} = \frac{e^{-i\xi z}\big|_{z=i}}{2z\big|_{z=i}} = \frac{e^{\xi}}{2i},$$

$$\operatorname{Res}\left(\tfrac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, -i\right) = \frac{e^{-i\xi z}\big|_{z=-i}}{(z^2+1)'\big|_{z=-i}} = \frac{e^{-i\xi z}\big|_{z=-i}}{2z\big|_{z=-i}} = \frac{e^{-\xi}}{-2i}.$$

Alors

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, i\right), & \text{si } \xi < 0, \\ -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2+1}, -i\right), & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i \frac{e^{\xi}}{2i}, & \text{si } \xi < 0, \\ -2\pi i \frac{e^{-\xi}}{-2i}, & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \pi e^{-|\xi|}. \quad \blacksquare$$

5.4.3 Calcul d'intégrales définies diverses

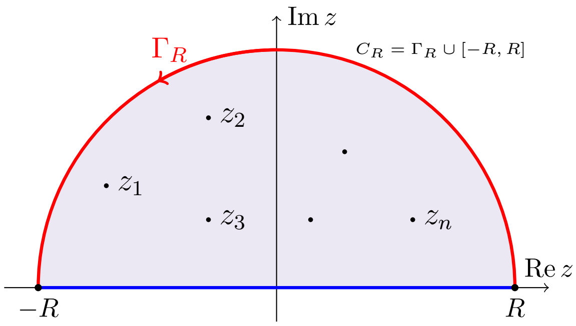
Le calcul d'intégrales définies généralisées peut souvent être effectué en utilisant le **théorème des résidus** appliqué à une **fonction** et à un **contour** convenables dont le choix peut demander une grande **ingéniosité**.

Les types d'intégrales qui suivent sont souvent rencontrées dans la pratique.

Intégrale du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Soit f une fonction complexe holomorphe dans le demi plan $\operatorname{Im} z \geq 0$ sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $z_1, z_2, ..., z_n$ de demi plan $\operatorname{Im} z > 0$. On suppose de plus que $|f(z)| \leq \dfrac{M}{R^k}$ pour $z = R\,e^{it}$, $k > 1$ et $M > 0$.

On considère $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$, où C_R désigne le contour fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.



Si le nombre R est pris suffisamment grand alors le théorème des résidus permet d'écrire

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k),$$

i.e.

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k).$$

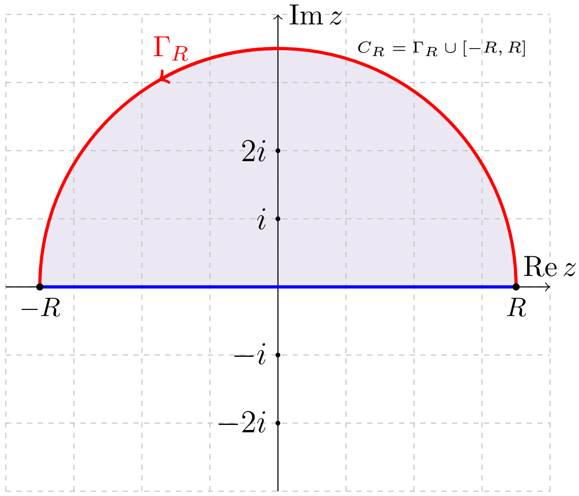
D'après la proposition 92, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$. Alors lorsque $R \to +\infty$, on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k).}$$

Remarque 95

Si $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes avec $\deg Q \geq 2 + \deg P$, et aucun des zéros de Q n'étant réel, alors la formule précédente est valable, les z_k étant les zéros de Q tels que $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Exemple 77



Calculons l'intégrale $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.

Les pôles de $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ situés à l'intérieur du contour C_R sont les pôles simples $z = i$ et $z = 2i$ et on a

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \left\{ (z - i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right\} = \frac{i}{6},$$

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \to 2i} \left\{ (z - 2i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right\} = \frac{-i}{3}.$$

Si R est suffisamment grand alors d'après le théorème des résidus

$$\int\limits_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 2i) \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right\} = \frac{\pi}{3}.$$

i.e.

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \frac{\pi}{3}.$$

Comme $\lim\limits_{R \to +\infty} R^2 \left| f\left(Re^{it}\right) \right| = 1$, alors $|f(z)| \leq \dfrac{M}{R^2}$ pour $z = Re^{it}$, $M > 0$. Donc d'après la proposition 92,

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 0.$$

Par conséquent, lorsque $R \to +\infty$, on obtient

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{3}. \qquad \blacksquare$$

Intégrale du type $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle en x et en y qui n'a pas de pôles sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Si on pose $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, alors $\sin t = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos t = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ et $dz = ie^{it} dt$ ou $dt = \dfrac{1}{iz} dz$. Par conséquent

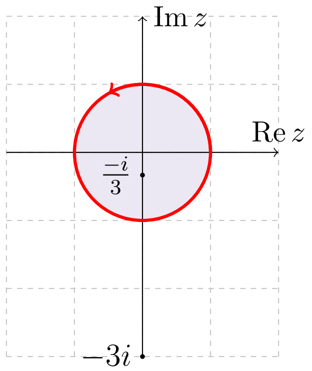
$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i} \right) dz.$$

Posons $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$, on a alors d'après le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f(z), z_k),$$

où les z_k sont les pôles de la fraction rationnelle f qui appartiennent à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Exemple 78



Calculons l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt$.
Pour calculer cette intégrale on va appliquer la méthode ci-dessus qui consiste à poser $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz\left(5+3\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} dz = \int_{|z|=1} \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz$$
$$= \int_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)} dz.$$

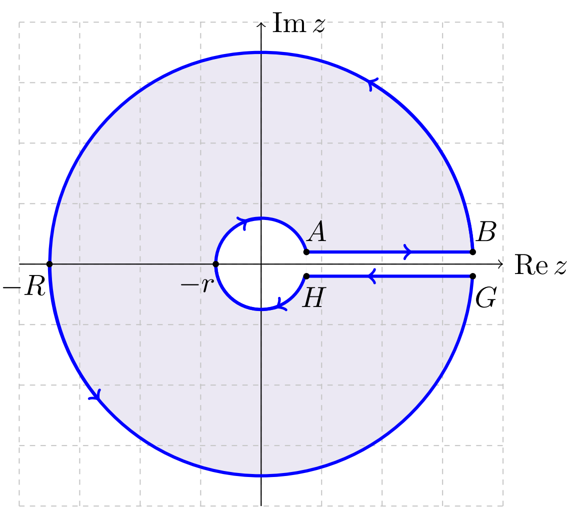
Puisque le nombre $\frac{-i}{3}$ est le seul pôle de $\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors par le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}, \frac{-i}{3}\right) = 2\pi i \frac{2}{3\left(\frac{-i}{3}+3i\right)} = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx$

Soit α un réel strictement positif. Soient P et Q deux polynômes avec $\deg Q > \alpha + \deg P$, tels que $P(0) \neq 0$ et aucun des zéros de Q n'étant réel positif ou nul. Si z_k, $k = 1, ..., n$ sont des points singuliers de $\frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1}$, alors $\mathrm{Re}\, z_k \notin [0, +\infty[$.

On va considérer cette fois la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}$, $\mathrm{Arg}(\mathrm{Log}\, z) \in]-\pi, \pi[$, et le contour $C_{R,r}$ de la figure ci-contre où l'axe réel positif est la coupure et où AB et GH coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension. Le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r.



Si R est assez grand et r est assez petit, alors le théorème des résidus permet d'écrire

$$\int\limits_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz = & \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{(\alpha-1)i\pi} x^{\alpha-1} dx + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \\ & + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-(\alpha-1)i\pi} x^{\alpha-1} dx - \int\limits_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz.\end{aligned}$$

Lorsque $r \to 0$, on obtient

$$\lim_{r\to 0} \left| \int\limits_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \right| = \lim_{r\to 0} \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(r\,e^{it})}{Q(r\,e^{it})} \left(-r\,e^{it}\right)^{\alpha-1} r\,e^{it} dt \right| \leq \lim_{r\to 0} K\,r^{\alpha} = 0.$$

Quand $R \to +\infty$

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \right| = \lim_{R\to+\infty} \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(R\,e^{it})}{Q(R\,e^{it})} \left(-R\,e^{it}\right)^{\alpha-1} R\,e^{it} dt \right| \leq \lim_{R\to+\infty} K\,R^{\beta} = 0,$$

où $\beta = \alpha + \deg P - \deg Q < 0$. On en déduit que

$$e^{-(\alpha-1)i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx + e^{(\alpha-1)i\pi} \int_{+\infty}^{0} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k\right).$$

Par conséquent

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k\right).}$$

Exemple 79

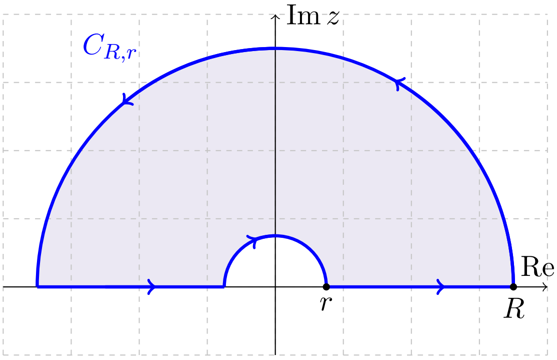
Par application de la formule précédente on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \text{Res}\left(\frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}, -1\right) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, 0 < \alpha < 1.$$ ▪

Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx, \alpha > 0$

Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas des racines réelles et $\deg Q \geq \deg P$.

Considérons la fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \dfrac{e^{i\alpha z}}{z}$ et le contour $C_{R,r}$ de la figure ci-contre, $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons R et r. Donc, d'après le théorème des résidus on obtient



$$\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$$

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right).$$

Notons que si on procède comme ci-dessus on vérifie que l'intégrale $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$.

Pour l'intégrale sur Γ_r on a

$$\lim_{r \to 0} \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = \lim_{r \to 0} \int_0^\pi \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} \frac{e^{i\alpha re^{it}}}{re^{it}} ire^{it} dt = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)}.$$

Donc si on fait tendre r vers zéro et R vers $+\infty$ on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)} + 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right).}$$

Exemple 80

Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\, x} dx$.

Puisque le nombre i est le seul pôle de $\dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)\, z}$ avec partie imaginaire strictement positive, alors par application de la formule précédente on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)\, x} dx = i\pi + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)\, z}, i \right) = i\pi \left(1 - e^{-1}\right).$$

Notons que

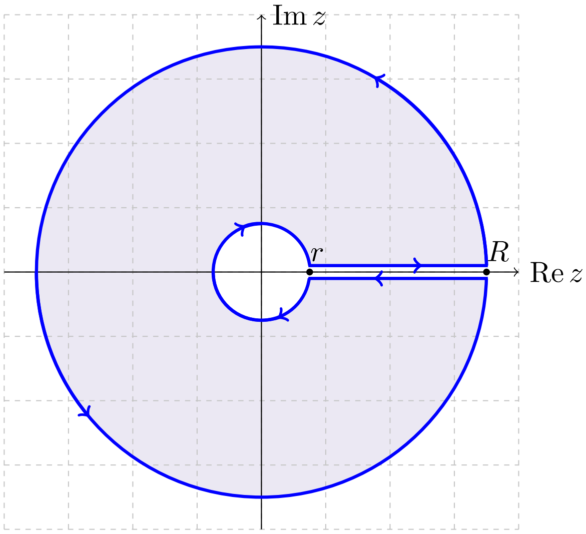
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)\, x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)\, x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\, x} dx = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\, x} dx.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\, x} dx = \left(1 - e^{-1}\right) \frac{\pi}{2}.$$

■

Intégrale du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx$



Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas de racines réelles positives ou nulles,

$$P(0) \neq 0 et \deg Q \geq 2 + \deg P.$$

On considère la fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2,$$

et le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ de la figure ci-contre où Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r.

Si R est assez grand et r est assez petit, alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned}\int\limits_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2 dz &= \int\limits_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x)^2 dx + \int\limits_{\Gamma_R} f(z) dz \\ &\quad + \int\limits_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx - \int\limits_{\Gamma_r} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k\right).\end{aligned}$$

Comme précédemment les intégrales sur Γ_r et Γ_R tendent vers zéro lorsque $r \to 0$ et $R \to +\infty$. On obtient alors la relation

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x)^2 dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k\right).$$

D'où

$$-2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx - 2\pi i \int\limits_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k\right).$$

Alors

$$\boxed{\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k\right)\right), \\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k\right)\right).\end{aligned}}$$

Exemple 81

Calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3} dx$.

Ici $P(x) = 1$ et $Q(x) = (x+1)^3$, toutes les conditions sont vérifiées, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} \operatorname{Log} x dx = \frac{-1}{2} \operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1\right)\right),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx = \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1\right)\right).$$

Comme -1 est un pôle triple, pour le résidu on a donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1\right) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to -1} \left((z+1)^3 \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(z+1)^3}\right)'' \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \left((\operatorname{Log} z)^2\right)'' = \lim_{z \to -1} \frac{1 - \operatorname{Log} z}{z^2} \\
&= \frac{1 - \operatorname{Log}(-1)}{(-1)^2} = 1 - (0 + i\pi) = 1 - i\pi.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3} dx = \frac{-1}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$