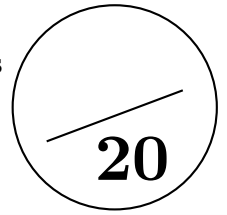




Examen final - 31 mai 2016. Durée : 1 heure et 30 minutes

Nom et Prénom :

Matricule :



Exercice 1 (4 pts.) : Soit D un domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{C}$.

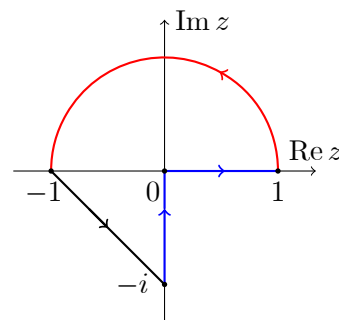
Soient f et g deux fonctions holomorphes sur D . On suppose que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$.

- a) Montrer que si $f(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in D$ ($\text{Im } f = 0$), alors la fonction f est constante.
- b) En déduire que si $f(z) \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in D$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = cg(z)$ pour tout $z \in D$.

Réponse.

Exercice 2 (6 pts.) :

- a) Évaluer les intégrales $I = \int_C z^2 dz$ et $J = \int_C \operatorname{Re}(z^2) dz$ le long de la courbe C dans les cas suivants :
1. du cercle $|z| = 1$ de 1 à -1 dans le sens direct,
 2. du segment de droite joignant -1 et $-i$,
 3. la ligne brisée formée par les segments de droite $-i$ à 0 et 0 à 1.
- b) Discuter les résultats obtenus.



Réponse.

Exercice 3 (5 pts.) : Soit Γ le cercle unité $|z| = 1$. Soit a un réel tel que $a > 1$.

Posons $z_0 = i(-a - \sqrt{a^2 - 1})$ et $z_1 = i(-a + \sqrt{a^2 - 1})$

a) Évaluer les intégrales $\int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$ et $\int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_1} dz$.

b) Vérifier que $\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_1} = \frac{c}{z^2 + 2iaz - 1}$ où c est une constante à déterminer.

c) En déduire $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + 2iaz - 1} dz$ puis en déduire $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin t} dt$.

Réponse.

Exercice 4 (5 pts.) : On considère la fonction $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+4)^2(z-2)}$.

a) En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer $\oint_{|z|=1} f(z) dz$, $\oint_{|z|=3} f(z) dz$ et $\oint_{|z|=5} f(z) dz$.

Indication : $\frac{1}{(z+4)^2(z-2)} = \frac{a}{z+4} + \frac{b}{(z+4)^2} + \frac{c}{z-2}$.

b) Trouver les résidus de f en tous ses pôles.

c) Discuter les résultats obtenus.

Réponse.