

Série d'exercices n° 4 : Fonctions Analytiques

**Exercice 1 :**

Déterminer le domaine de convergence des séries

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} n! z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}.$$

**Exercice 2 :**

Que peut-on dire de la convergence uniforme des séries suivantes dans les régions indiquées?

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}, |z| \leq 1; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}, 1 < |z| < 2; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nz)}{n^3}, |z| \leq 1; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^n}, |z| < 1.$$

**Exercice 3 :**

Déterminer le rayon de convergence et la nature pour  $|z| = R$  des séries entières suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \text{Log} \left( 1 + \frac{1}{2^n} \right) \right) z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} z^n, a \neq 0, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n + n} z^{3n-1}.$$

**Exercice 4 :**

Soit  $f(z) = \text{Log}(1+z)$ , où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour  $z = 0$ .

- Développer  $f$  en série de Taylor au voisinage de  $z = 0$ .
- Déterminer le domaine de convergence de la série de (a).
- Développer  $\text{Log} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)$  en série de Taylor au voisinage de  $z = 0$ .

**Exercice 5 :**

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur une courbe fermée simple  $C$ . Montrer que la fonction  $g$  définie par  $g(z) = \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw$  est analytique en tout point intérieur à  $C$ .

**Exercice 6 :**

Soit  $f$  une fonction analytique dans le disque  $|z| < 1$ . Trouver une condition suffisante pour que la fonction  $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$  soit analytique dans  $|z| < 1$ .

**Exercice 7 :**

- Soit  $z \mapsto S_n(z)$  continue continue sur  $|z| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\{S_n\}$  converge uniformément vers  $S$  dans  $|z| = 1$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |S_n(e^{it})|^2 dt = \int_0^{2\pi} |S(e^{it})|^2 dt$ .
- Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est analytique dans  $|z| \leq 1$ , montrer que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2$ .

*Indication.* Noter que si  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , alors

$$|S_n(z)|^2 = S_n(z) \overline{S_n(z)} = (a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) (\overline{a_0} + \overline{a_1} \bar{z} + \dots + \overline{a_n} \bar{z}^n) \text{ et } \int_{|z|=1} z^n \bar{z}^m \frac{dz}{z} = 0, n \neq m.$$

**Exercice 8 :**

Déterminer dans les cas suivants les fonctions analytiques sur le disque ouvert  $|z| < 1$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , **a)**  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ , **b)**  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$ , **c)**  $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{-1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}$ , **d)**  $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$ .

**Exercice 9 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur le disque ouvert  $|z| < 1$  par  $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$ . Montrer que  $f$  est analytique sur  $|z| < 1$ . Quels sont ses zéros sur le disque  $|z| < 1$ ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés?

**Exercice 10 :**

Soit  $f$  une fonction analytique sur  $\mathbb{C}$  et  $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } f(z) = 0\}$  l'ensemble de ses zéros.

- a) Donner un exemple de fonction non constante telle que  $Z(f) = \emptyset$ .
- b) Donner un exemple de fonction non constante telle que  $Z(f)$  est infini.
- c) Montrer que pour tout compact  $K$ ,  $Z(f) \cap K$  est fini.
- d) Montrer que  $Z(f)$  est dénombrable.

**Exercice 11 :**

Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{C}$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques sur  $D$  telles que  $f(z)g(z) = 0$  pour tout  $z \in D$ . Montrer que  $f$  ou  $g$  est identiquement nulle.

**Exercice 12 :**

Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$  et  $L = \{z_0 + tb, t \in \mathbb{R}\}$ , où  $b \in \mathbb{C}^*$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $D$  et analytique sur  $D \setminus L$ . Montrer que  $f$  est analytique sur  $D$ .

**Exercice 13 :**

Soit  $f$  une fonction analytique sur  $H^+ = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$ , continue et bornée sur  $\overline{H^+} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z \geq 0\}$  et ne prenant que des valeurs réelles sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 14 :**

Soit  $f$  une fonction analytique sur le disque ouvert  $|z| < r, r > 1$  et ne prenant que des valeurs réelles sur le cercle unité  $|z| = 1$ . Que peut-on dire de  $f$ ?