Série d'exercices n° 5 : Séries de Laurent, Théorème des résidus

Exercice 1 :

Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

a) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}, z = 1$; **b)** $f(z) = (z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}, z = -2$; **c)** $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z = -2$.

Exercice 2 :

Développer $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent valable pour

a) $1 < |z| < 3$, **b)** $|z| > 3$, **c)** $0 < |z+1| < 2$, **d)** $|z| < 1$.

Exercice 3 :

a) Développer $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ en série de Laurent au voisinage de $z = 2$.

b) Déterminer le domaine de convergence de cette série.

c) Classer les singularités de f.

Exercice 4 :

Trouver les résidus de **(a)** $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ et **(b)** $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

Exercice 5 :

Trouver les résidus des fonctions suivantes en tous les points singuliers.

a) $f(z) = e^{z^2+1/z^2}$, **b)** $f(z) = \dfrac{e^{-1/z^2}}{1+z^4}$, **c)** $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, **d)** $f(z) = e^z \sin\dfrac{1}{z}$, **e)** $f(z) = z^n e^{1/z}$.

Exercice 6 :

Calculer $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz, t \in \mathbb{R}^*$ le long du cercle C d'équation **(a)** $|z| = 3$ et **(b)** $|z| = 1$.

Exercice 7 :

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \dfrac{z^3}{z^4-1}dz$, **b)** $\displaystyle\oint_{|z|=2} \dfrac{\sin z - z}{z^3(z+1)}dz$, **c)** $\displaystyle\oint_{|z+1|=3} \dfrac{e^{2iz}-5z}{z+2i}dz$, **d)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \dfrac{1}{z^2\sin z}dz$.

Exercice 8 :

Évaluer **(a)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^6+1}dx$ et **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

Exercice 9 :

Évaluer **(a)** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos t + \sin t} dt$ et **(b)** $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\sin t} dt, a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > |b|$.

Exercice 10 :

Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m},\ m > 0.$

Exercice 11 :

Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

Exercice 12 :

Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)},\quad 0 < p < 1.$

Exercice 13 :

Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Ch}(ax)}{\operatorname{Ch} x} dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)},\quad$ où $|a| < 1.$

Exercice 14 :

Démontrer que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \operatorname{Log} 2.$