USTHB 2017-2018 Semestre 2
Faculté de Mathématiques

Analyse complexe
$2^{\text{ème}}$ année Lic Math

Examen final - 22 mai 2018. Durée : 1 heure et 30 minutes

Nom et Prénom :...

Matricule :...

/ 20

Exercice 1 (5,5 pts): Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Pour $z = x+iy$, $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$.

a) On suppose qu'il existe des nombres réels a, b, c non tous nuls, tels que l'on ait $au(x,y)+bv(x,y) = c$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est constante.

b) Même question si on suppose que $u^2(x,y) + v^2(x,y) = c$.

Réponse.

a) Comme $au(x,y) + bv(x,y) = c$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors en dérivant cette équation par rapport à x, respectivement à y, on trouve $a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, respectivement, $a\dfrac{\partial u}{\partial y} + b\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Comme f est holomorphe, elle vérifie les conditions conditions de Cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Donc on peut déduire que $a\dfrac{\partial u}{\partial x} - b\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ et $b\dfrac{\partial u}{\partial x} + a\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. Et comme $a^2 + b^2 \neq 0$ alors $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. Par conséquent la fonction u est constante.

En appliquant à nouveau les conditions de Cauchy-Riemann, on obtient $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$, et que la fonction v est constante. Il en résulte que la fonction f est aussi constante.

b) Si $c = 0$, alors $f = 0$ et c'est terminé. Sinon, supposons $c \neq 0$. En dérivant par rapport à x, puis par rapport à y, on trouve

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

En tenant compte des conditions de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, on obtient le système suivant, où les inconnues sont $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

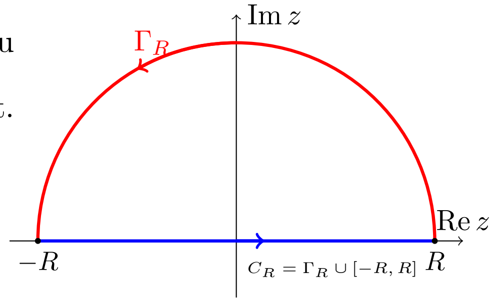
En multipliant la première équation par u et la deuxième par v puis en fait la somme, on trouve

$$\left(u^2 + v^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} = c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

De même en multipliant la première équation par v et la deuxième par u puis en fait la soustraction, on trouve $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Et donc les dérivées partielles de u sont nulles. On en déduit que u est constante. En appliquant à nouveau les conditions de Cauchy-Riemann, on obtient $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$, et donc la fonction v est constante. Il en résulte que la fonction f est aussi constante.

Exercice 2 (4,5 pts.) : Soit $R>0$. On note Γ_R le demi cercle paramétré par $t \mapsto R\,e^{it}, t \in [0,\pi]$.

On désigne par C_R le contour fermé de la figure ci-contre formé du demi cercle Γ_R et du segment $[-R,R]$, décrit dans le sens direct.



a) Calculer $I_R = \displaystyle\int_{C_R} |z|\,\overline{z}dz$ et $J_R = \displaystyle\int_{\Gamma_R} \left(z^3 + \overline{z} + \frac{1}{z}\right) dz$.

b) Vérifier que $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{I_R}{RJ_R} = 1$.

Réponse.

a) L'intégrale I_R peut-être partagée et s'écrit sous forme $I_R = \int\limits_{\Gamma_R} |z|\,\overline{z}dz + \int\limits_{[-R,R]} |z|\,\overline{z}dz$.

Le demi cercle Γ_R du cercle $|z|=R$ peut être paramétré par $z = Re^{it},\ t \in [0,\pi]$.

Les points R et $-R$ du demi cercle, correspondent respectivement à $t=0$ et $t=\pi$.

On a $dz = d\left(Re^{it}\right) = Rie^{it}dt$ et $\overline{z} = Re^{-it}, |z| = R$, donc $\int\limits_{\Gamma_R} |z|\,\overline{z}dz = \displaystyle\int_0^{\pi} RRe^{-it}Rie^{it}dt = i\pi R^3$.

Sur le segment de droite $[-R,R]$ joignant $-R$ et R, on a $z=t, \overline{z}=t$ et $dz=dt$ avec t varie entre $-R$ et R. Alors

$$\int\limits_{[-R,R]} |z|\,\overline{z}dz = \int_{-R}^{R} |t|\,tdt = \int_{-R}^{0} \left(-t^2\right) dt + \int_0^R t^2 dt = \left[\frac{-1}{3}t^3\right]_{-R}^{0} + \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^R = 0.$$

Il en résulte $I_R = i\pi R^3$.

Pour l'intégrale J_R on a

$$\begin{aligned} J_R &= \int_0^{\pi} \left(R^3e^{3it} + Re^{-it} + \frac{e^{-it}}{R}\right) Rie^{it}dt = \int_0^{\pi} ie^{4it}R^4dt + \int_0^{\pi} i\left(R^2+1\right) dt \\ &= \left[\frac{R^4}{4}e^{4it}\right]_0^{\pi} + i\pi\left(R^2+1\right) = i\pi\left(R^2+1\right). \end{aligned}$$

b) On a $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{I_R}{RJ_R} = \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{i\pi R^3}{R(i\pi(R^2+1))} = \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{R^3}{R^3+R} = 1$.

Exercice 3 (5 pts.) : On note Γ le cercle unité et soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant le disque $\overline{D}_1(0)$.

a) Exprimer en fonction des valeurs de f l'intégrale $I = \int_\Gamma \frac{f(z)}{(2z-1)(2-z)} dz$.

b) En déduire la valeur de $J = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{5-4\cos t} dt$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour une fonction f convenablement choisie, déterminer $K = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{5-4\cos t} dt$.

Réponse.

a) Comme $z = \frac{1}{2}$ est la seule singularité intérieure à Γ, alors d'après la formule intégrale de Cauchy et en posant $g(z) = \frac{f(z)}{2(2-z)}$, on trouve

$$I = \int_\Gamma \frac{g(z)}{z-\frac{1}{2}} dz = 2i\pi g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} i\pi f\left(\frac{1}{2}\right).$$

b) D'autre part, on paramètre le cercle unité par l'application $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. On trouve

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{(2e^{it}-1)(2-e^{it})} ie^{it} dt = i\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{-2e^{2it}+5e^{it}-2} e^{it} dt = i\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{5-2(e^{it}+e^{-it})} dt.$$

Comme $e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$, alors $I = i\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{5-4\cos t} dt$. On en déduit

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{5-4\cos t} dt = \frac{I}{i} = \frac{2}{3}\pi f\left(\frac{1}{2}\right).$$

c) Pour $f(z) = z^n$, on aura

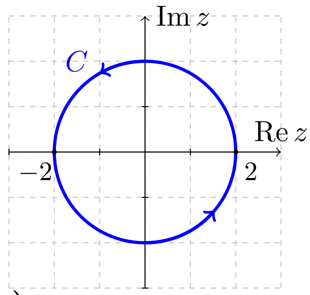
$$f\left(e^{it}\right) = e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt),$$

et donc

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{5-4\cos t} dt + i\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{5-4\cos t} dt = \frac{2}{3}\pi f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3 \times 2^{n-1}}.$$

On en déduit

$$K = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{5-4\cos t} dt = \frac{\pi}{3 \times 2^{n-1}}.$$



Exercice 4 (5 points) : On considère la fonction $f(z) = \dfrac{2z}{z^4 - 1}$.

Soit C le cercle $|z| = 2$ orienté dans le sens direct.

a) Par application de la formule intégrale de Cauchy, calculer $\int_C f(z)\, dz$.

b) Trouver les résidus de $f(z)$ en **tous ses pôles finis**.

c) Comparer le résultat obtenu en (**a**) avec la somme des résidus de la question (**b**).

Réponse.

a) La fonction $f(z) = \dfrac{2z}{z^4 - 1}$ possède quatre points singuliers $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$ et $z_4 = -i$ qui sont des racines de $z^4 - 1 = 0$.

Tous ces points singuliers sont à l'intérieur de C, car $|1| = |-1| = 1 < 2$ et $|i| = |-i| = 1 < 2$.

Alors, l'application de la formule de Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} 2\pi i f(a) & \text{si } a \in \operatorname{Int} C \\ 0 & \text{si } a \notin \operatorname{Int} C \end{cases}$$

pour $a = 1, -1, i, -i$ avec $f(z) = 1$ donne

$$\int_C \frac{1}{z-1} dz = \int_C \frac{1}{z+1} dz = \int_C \frac{1}{z-i} dz = \int_C \frac{1}{z+i} dz = 2\pi i.$$

Comme $\dfrac{2z}{z^4-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{z-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{z+1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{z-i} - \dfrac{\frac{1}{2}}{z+i}$ alors

$$\int_C \frac{2z}{z^4-1} dz = \frac{1}{2}\left(\int_C \frac{1}{z-1} dz + \int_C \frac{1}{z+1} - \int_C \frac{1}{z-i} dz - \int_C \frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi i + 2\pi i - 2\pi i - 2\pi i\right) = 0.$$

b) La fonction $f(z) = \frac{2z}{z^4-1}$ possède quatre pôles simples en $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$ et $z_4 = -i$.

Le résidu en $z_1 = 1$ est $\operatorname{Res}(f, 1) = \lim\limits_{z \to 1} (z-1) \frac{2z}{z^4-1} = \lim\limits_{z \to 1} \frac{2z}{4z^3} = \frac{1}{2}$.

Le résidu en $z_2 = -1$ est $\operatorname{Res}(f, -1) = \lim\limits_{z \to -1} (z+1) \frac{2z}{z^4-1} = \lim\limits_{z \to -1} \frac{2z}{4z^3} = \frac{1}{2}$.

Le résidu en $z_3 = i$ est $\operatorname{Res}(f, i) = \lim\limits_{z \to i} (z-i) \frac{2z}{z^4-1} = \lim\limits_{z \to i} \frac{2z}{4z^3} = \frac{-1}{2}$.

Le résidu en $z_4 = -i$ est $\operatorname{Res}(f, -i) = \lim\limits_{z \to -i} (z+i) \frac{2z}{z^4-1} = \lim\limits_{z \to -i} \frac{2z}{4z^3} = \frac{-1}{2}$.

c) Le résultat obtenu dans **(a)** est $\displaystyle\int_C \frac{2z}{z^4-1} dz = 0$.

Nous constatons que

$$2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,-1) + \operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i)\right) = 2\pi i \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = 0 = \int_C \frac{2z}{z^4-1} dz.$$